

Příklad 4 – plošné integrály

Najděte obsah plochy \mathcal{S} , která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v, \quad 0 < v < u < 1.$$

$$\left[\frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1) \right]$$

Najděte obsah plochy \mathcal{S} , která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = uv, \quad y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad z = \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad u^2 + v^2 \leq 2, \quad u, v \geq 0.$$

$$\left[\frac{1}{2} \sqrt{2} \pi \right]$$

Najděte obsah plochy \mathcal{S} , která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = 2r \cos^2 \varphi, \quad y = r \sin^2 \varphi, \quad z = r, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2} \pi, \quad 0 < r < 1.$$

$$\left[\frac{3}{2} \right]$$

Najděte obsah plochy \mathcal{S} , která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = e^{-u} \cos v, \quad y = e^{-u} \sin v, \quad z = e^{-u}, \quad 0 \leq v \leq \pi, \quad 0 < u < \infty.$$

$$\left[\frac{1}{2} \sqrt{2} \pi \right]$$

Najděte obsah části kulové plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad z \geq 4.$$

$$\left[8\pi \right]$$

Najděte obsah části plochy \mathcal{S} , která je dána rovnicí $z = 4 + x^2 + xy - y^2$ a leží uvnitř válce $x^2 + y^2 \leq 2$.

$$\left[\frac{2}{15} \pi (11\sqrt{11} - 1) \right]$$

Najděte obsah části plochy \mathcal{S} , která je dána rovnicí $z = x^2 + 2y^2$ a leží uvnitř eliptického válce $x^2 + 4y^2 \leq 1$.

$$\left[\frac{1}{12} \pi (5\sqrt{5} - 1) \right]$$

Najděte obsah plochy \mathcal{S} , která je dána vztahy

$$z^2 = 4(x^2 + y^2), \quad 0 \leq z \leq 4.$$

$$\left[2\sqrt{5} \pi \right]$$

Najděte obsah plochy \mathcal{S} , která je dána vztahy

$$2x - 2y + z = 1, \quad x^2 + y^2 + z \leq 1.$$

[6π]

Najděte hmotnost kuželové plochy \mathcal{S} , která je daná vztahy

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad z > 0,$$

a jejíž hustota je $\rho(x, y, z) = e^{-z^2}$.

[$\sqrt{2}\pi$]

Najděte hmotnost plochy \mathcal{S} , která je daná parametrickými rovnicemi

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \cosh r, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1$$

a jejíž hustota je $\rho(x, y, z) = \frac{1}{z}$.

[π]

Najděte hmotnost plochy \mathcal{S} , která je daná parametrickými rovnicemi

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1$$

a jejíž hustota je $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

[$\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$]

Najděte hmotnost plochy \mathcal{S} , která je daná vztahy

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad z \leq 2$$

a jejíž hustota je $\rho(x, y, z) = z$.

[$\frac{2}{15}\pi(25\sqrt{5} + 1)$]

Najděte hmotnost plochy \mathcal{S} , která je daná vztahy

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0$$

a jejíž hustota je $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

[$\frac{1}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$]

Najděte hmotnost plochy \mathcal{S} , která je daná parametrickými rovnicemi

$$x = r^2 \cos \varphi, \quad y = r^2 \sin \varphi, \quad z = r, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi, \quad 1 \leq r \leq 2$$

a jejíž hustota je $\rho(x, y, z) = \frac{1}{z}$.

[$\frac{1}{24}\pi(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$]

Najděte hmotnost plochy \mathcal{S} , která je daná rovnicemi

$$z^2 = x^2 - y^2, \quad y^2 + z^2 \leq 2y, \quad x, z \geq 0$$

a jejíž hustota je $\rho(x, y, z) = z$.

[$\frac{2}{3}\sqrt{2}$]

Najděte souřadnici z_T těžiště poloviny homogenní kulové plochy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0,$$

jestliže víte, že její obsah je 2π . $\left[z_T = \frac{1}{2} \right]$

Najděte souřadnici y_T těžiště homogenní plochy

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 2x, \quad y \geq 0,$$

jestliže víte, že její obsah je $\frac{1}{2} \sqrt{2} \pi$. $\left[y_T = \frac{4}{3\pi} \right]$

Najděte souřadnici z_T těžiště homogenní plochy

$$z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 2,$$

jestliže víte, že její obsah je $\frac{13}{3} \pi$. $\left[z_T = \frac{74}{65} \right]$

Najděte souřadnici x_T těžiště homogenní plochy

$$z = \arctg \frac{y}{x}, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad x > 0,$$

jestliže víte, že její obsah je $\frac{1}{2} \pi (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$. $\left[x_T = \frac{4(2\sqrt{2} - 1)}{3\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))} \right]$

Najděte souřadnici z_T těžiště homogenního trojúhelníka s vrcholy v bodech $A = [2, 0, 0]$, $B = [0, 3, 0]$ a $C = [0, 0, 6]$, jestliže víte, že jeho obsah je $3\sqrt{14}$. $\left[z_T = 2 \right]$

Najděte souřadnici x_T těžiště homogenního trojúhelníka s vrcholy v bodech $A = [4, 0, 0]$, $B = [0, 3, 0]$ a $C = [0, 0, 2]$, jestliže víte, že jeho obsah je $\sqrt{61}$. $\left[x_T = \frac{4}{3} \right]$

Najděte souřadnici x_T homogenní plochy \mathcal{S} , která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = 2r \cos^2 \varphi, \quad y = r \sin^2 \varphi, \quad z = r, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2} \pi, \quad 0 < r < 2,$$

když víte, že její obsah je roven 6. $\left[x_T = \frac{4}{3} \right]$

Najděte souřadnici z_T homogenní plochy \mathcal{S} , která je dána rovnicemi

$$z^2 = x^2 - y^2, \quad y^2 + z^2 \leq 2y, \quad x, z \geq 0$$

když víte, že její obsah je roven $\frac{\sqrt{2}}{2} \pi$. $\left[z_T = \frac{4}{3\pi} \right]$

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z , tj. integrál $J_z = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) dS$, plochy dané vztahy

$$z = xy, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad x, y \geq 0.$$

$$\left[J_z = \frac{1}{15} \pi (\sqrt{2} + 1) \right]$$

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z , tj. integrál $J_z = \iint_S (x^2 + y^2) dS$, plochy dané vztahy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0.$$

$$\left[J_z = \frac{4}{3} \pi \right]$$

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z , tj. integrál $J_z = \iint_S (x^2 + y^2) dS$, plochy dané vztahy

$$4z^2 = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

$$\left[J_z = 16\sqrt{5} \pi \right]$$

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z , tj. integrál $J_z = \iint_S (x^2 + y^2) dS$, plochy dané vztahy

$$x + 2y - 2z = 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \leq 0.$$

$$\left[J_z = 20 \right]$$

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z , tj. integrál $J_z = \iint_S (x^2 + y^2) dS$, plochy dané vztahy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad z \geq 4.$$

$$\left[J_z = \frac{28}{3} \pi \right]$$

Najděte plošný integrál $\iint_S (x dy dz + y dz dx + z dx dy)$, kde \mathcal{S} je plocha daná parametrickými rovnicemi

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 1 \leq r \leq 2,$$

která je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná.

$$\left[3\pi \right]$$

Najděte plošný integrál $\iint_S (x dy dz + y dz dx + z dx dy)$, kde \mathcal{S} je plocha daná parametrickými rovnicemi

$$x = 2uv, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = u^2 + v^2, \quad u^2 + v^2 \leq 1, \quad v \geq 0,$$

která je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná.

$$\left[0 \right]$$

Najděte plošný integrál $\iint_S \mathbf{f} d\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (z, 0, x)$ a plocha \mathcal{S} dána parametrickými rovnicemi

$$x = \frac{u^2}{v}, \quad y = \frac{v^2}{u}, \quad z = uv, \quad 1 \leq u \leq 2, \quad 1 \leq v \leq 2$$

je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je záporná.

$$\left[\frac{45}{4} - 7 \ln 2 \right]$$

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (z \, dy \, dz + y \, dz \, dx + dx \, dy)$, kde \mathcal{S} je plocha daná parametrickými rovnicemi

$$x = \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad y = uv, \quad z = u + v, \quad 0 \leq u \leq v \leq 2,$$

která je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. [$-\frac{16}{15}$]

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (z \, dy \, dz + y \, dz \, dx + \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy)$, kde \mathcal{S} je plocha daná parametrickými rovnicemi

$$x = \frac{u}{v}, \quad y = \frac{v}{u}, \quad z = uv, \quad 1 < u < 4, \quad 1 < v < 2,$$

která je orientovaná tak, že první složka vektoru její normály je kladná. [20]

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx)$, kde \mathcal{S} je plocha

$$z = xy \quad x, y > 0, \quad x + y \leq 1,$$

která je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. [$-\frac{1}{12}$]

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (xy \, dy \, dz + yz \, dz \, dx + xz \, dx \, dy)$, kde \mathcal{S} je trojúhelník s vrcholy v bodech $A = [3, 0, 0]$, $B = [0, 2, 0]$ a $C = [0, 0, 6]$ orientovaný tak, že třetí složka vektoru jeho normály je kladná. [18]

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (y \, dy \, dz + z \, dx \, dy)$, kde \mathcal{S} je plocha

$$z = x^2 + y^2 \quad 0 \leq z \leq 4,$$

která je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. [8π]

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx)$, kde \mathcal{S} je plocha

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad z \geq 0,$$

která je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. [$\frac{4}{3}\pi$]

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (x \, dz \, dx + (z^2 - 1) \, dx \, dy)$, kde \mathcal{S} je plocha

$$x^2 + y^2 = 1 \quad -1 \leq z \leq 2,$$

která je orientovaná tak, že v bodě $A = [1, 0, 0]$ je první složka vektoru její normály je kladná. [0]

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx)$, kde \mathcal{S} je plocha

$$x^2 + y^2 = 1 \quad -1 \leq z \leq 2,$$

která je orientovaná tak, že v bodě $A = [1, 0, 0]$ je první složka vektoru její normály je záporná. [-6π]

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} ((x - y) \, dy \, dz + (x + y) \, dz \, dx + z \, dx \, dy)$, kde \mathcal{S} je plocha

$$z = x^2 + y^2 \quad 0 \leq z \leq 1,$$

která je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. [$-\frac{1}{2}\pi$]

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f} \, d\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (y, x, z)$ a plocha \mathcal{S} popsána vztahy

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$$

je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je záporná. [-8π]

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f} \, d\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (yz, xz, xy)$ a plocha \mathcal{S} popsána vztahy

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 13, \quad x, y, z \geq 0$$

je orientovaná tak, že první složka vektoru její normály je záporná. [-6]

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f} \, d\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (x, y, z)$ a plocha \mathcal{S} popsána vztahy

$$4(x^2 + y^2) = (1 - z)^2, \quad 0 \leq z \leq 1$$

je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. [$\frac{1}{4}\pi$]

Najděte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f} \, d\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (x, y, z)$ a plocha \mathcal{S} popsána vztahy

$$z(x^2 + y^2) = 1, \quad 1 \leq z \leq 4$$

je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. [$6\pi \ln 2$]

Nechť jsou \mathbf{i} , \mathbf{j} , resp. \mathbf{k} jednotkové vektory ve směru souřadných os x , y , resp. z . Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ plochou \mathcal{S} , která je popsána parametrickými rovnicemi

$$\mathbf{x} = r \cos t \mathbf{i} + r \sin t \mathbf{j} + r^2 \mathbf{k}, \quad 0 < t < \pi, \quad 0 < r < 1,$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. [$\frac{1}{3}\pi$]

Nechť jsou \mathbf{i} , \mathbf{j} , resp. \mathbf{k} jednotkové vektory ve směru souřadných os x , y , resp. z . Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou \mathcal{S} , která je popsána parametrickými rovnicemi

$$x = r \cos^2 t, \quad y = r \sin^2 t, \quad z = r^2, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \pi$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. [$-\frac{1}{4}$]

Nechť jsou \mathbf{i} , \mathbf{j} , resp. \mathbf{k} jednotkové vektory ve směru souřadných os x , y , resp. z . Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{k}$ plochou \mathcal{S} , která je dána vztahy

$$x^2 + y^2 = 4, \quad 0 \leq z \leq 3, \quad x, y > 0,$$

a je orientována tak, že první složka vektoru její normály je záporná. [$-\frac{3}{2}$]

Nechť jsou \mathbf{i} , \mathbf{j} , resp. \mathbf{k} jednotkové vektory ve směru souřadných os x , y , resp. z . Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou \mathcal{S} , která je dána vztahy

$$z = x^2 + y^2, \quad z \leq 4$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. [8π]

Nechť jsou \mathbf{i} , \mathbf{j} , resp. \mathbf{k} jednotkové vektory ve směru souřadných os x , y , resp. z . Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou \mathcal{S} , která je dána vztahy

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x, y, z \geq 0$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. [$\frac{1}{12} \pi$]

Nechť jsou \mathbf{i} , \mathbf{j} , resp. \mathbf{k} jednotkové vektory ve směru souřadných os x , y , resp. z . Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou \mathcal{S} , která je dána vztahy

$$x^2 + 4y^2 = z^2, \quad 0 \leq z \leq 2$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je záporná. [0]

Nechť jsou \mathbf{i} , \mathbf{j} , resp. \mathbf{k} jednotkové vektory ve směru souřadných os x , y , resp. z . Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou \mathcal{S} , která je dána vztahy

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq z \leq 1$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná. [π]

Nechť jsou \mathbf{i} , \mathbf{j} , resp. \mathbf{k} jednotkové vektory ve směru souřadných os x , y , resp. z . Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ plochou \mathcal{S} , která je dána vztahy

$$z^2 = 4x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 2$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je záporná. [$\frac{8}{3} \pi$]

Nechť jsou \mathbf{i} , \mathbf{j} , resp. \mathbf{k} jednotkové vektory ve směru souřadných os x , y , resp. z . Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou \mathcal{S} , která je dána vztahy

$$x + y = z^2, \quad y, z \geq 0, \quad y + z \leq 2$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná.

$\left[\frac{4}{3}\right]$

Nechť jsou \mathbf{i} , \mathbf{j} , resp. \mathbf{k} jednotkové vektory ve směru souřadných os x , y , resp. z . Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou \mathcal{S} , která je popsána rovnicemi

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná.

$\left[\frac{1}{2}\pi\right]$

Nechť jsou \mathbf{i} , \mathbf{j} , resp. \mathbf{k} jednotkové vektory ve směru souřadných os x , y , resp. z . Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ částí roviny, které prochází body $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 2, 0]$ a $C = [0, 0, 3]$, leží v prvním oktantu, tj. $x, y, z \geq 0$ a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná.

$\left[3\right]$

Spočítejte plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f} \, d\mathbf{S}$, kde

$$\mathbf{f} = (x^2 + xy + y^2, y^2 + yz + z^2, x^2 + xz + z^2)$$

a plocha \mathcal{S} je kladně orientovaná hranice čtyřstěnu

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + y + z \leq 1.$$

$\left[\frac{3}{8}\right]$

Najděte plošný integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} \left((x^2 + yz) \, dy \, dz + (y^2 + xz) \, dz \, dx + (z^2 + xy) \, dx \, dy \right),$$

kde \mathcal{S} je kladně orientovaná hranice polokoule

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0.$$

$\left[\frac{1}{2}\pi\right]$

Nechť jsou \mathbf{i} , \mathbf{j} , resp. \mathbf{k} jednotkové vektory ve směru souřadných os x , y , resp. z . Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ kladně orientovaným povrchem válce

$$x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

$\left[2\pi\right]$

Nechť jsou \mathbf{i} , \mathbf{j} , resp. \mathbf{k} jednotkové vektory ve směru souřadných os x , y , resp. z . Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ povrchem tělesa

$$x^2 + y^2 \leq z^2, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

který je orientován tak, že vektor normály na ploše $z = 1$ má zápornou třetí složku.

$\left[\frac{1}{4}\pi\right]$
