Ukázka 1

Najděte integrál $\int \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Najděte integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)(x+2)}{(x-3)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 4\,, \qquad x^2 + y^2 - 2z^2 \ge 1\,.$$

Najděte souřadnici y_T těžiště homogenní křivky $\mathcal{C}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \cos t\,, \quad y = \sin t\,, \quad z = 1 - \ln\cos t\,, \qquad 0 \le t \le \tfrac{1}{3}\pi\,,$$

jestliže víte, že její délka je $\ln\bigl(2 + \sqrt{3}\bigr)$.

Najděte plošný integrál $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x)$, kde $\mathcal{S}$ je plocha

$$z = xy \qquad x,\, y > 0\,, \quad x + y \le 1\,,$$

která je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná.

Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + \dfrac{2}{t}\,x = 3\ln t, \quad x(1) = 0.$

Ukázka 2

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}}$.

Rozhodněte, zda konverguje integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Najděte souřadnici x_T homogenního tělesa $\mathcal{T}\subset\mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2+y^2\le 4\,,\qquad x^2+z^2\le 4\,,\qquad 0\le x\le 1\,,$$

jestliže víte, že jeho objem je $V=\frac{44}{3}$.

Ukažte, že křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{C}}\Big(x(3x+2y)\,\mathrm{d}x+(x^2-2y+3z)\,\mathrm{d}y+(3y-2z+1)\,\mathrm{d}z\Big)$$

nezávisí na integrační cestě a spočítejte jej po křivce $\mathcal{C}$, která začíná v bodě $A=[1,1,1]$ a končí v bodě $B=[-1,2,0]$.

Najděte obsah plochy $\mathcal{S}$, která je dána parametrickými rovnicemi

$$x=2r\cos^2\varphi\,,\quad y=r\sin^2\varphi\,,\quad z=r\,,\qquad 0\le\varphi\le\tfrac{1}{2}\pi\,,\quad 0<r<1\,.$$

Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $x''-4x=-4\mathrm{e}^{-2t}+17\mathrm{e}^{2t}\cos t$.

Ukázka 3

Najděte integrál $\displaystyle\int (x^2 + x + 1) \sin \tfrac{1}{2}\, x \,\mathrm{d}x$.

Najděte integrál $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln x + 4)\,\mathrm{d}x}{x(\ln x + 2)(\ln^2 x - 4)}$.

Pomocí substituce $u = xy^2$ a $v = \dfrac{y}{x}$ najděte souřadnici x_T těžiště homogenní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je dána nerovnostmi

$$1 \le xy^2 \le 8\,, \qquad x \le 27y \le 27x\,,$$

jestliže víte, že její obsah je 9.

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru osy x, y, resp. z. Najděte práci silového pole $\mathbf{f} = (y + z)\mathbf{i} - (x + z)\mathbf{j}$ po křivce $\mathcal{C}$ dané parametrickými rovnicemi

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{-t} \cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{e}^{-t} \sin t\,\mathbf{j} + \mathrm{e}^{-t}\,\mathbf{k}\,, \qquad 0 \le t < \infty\,,$$

která je orientovaná ve směru rostoucího parametru.

Najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose z, tj. integrál $J_z = \displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$, plochy dané vztahy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25\,, \qquad z \ge 4\,.$$

Najděte obecné řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x_1' = -3x_1 - 8x_2 + \mathrm{e}^{2t}\,, \qquad x_2' = 2x_1 + 5x_2 + 3\mathrm{e}^{2t}\,.$$

Ukázka 4

Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{(2x-1)\,\mathrm{d}x}{x^2-4x+8}$.

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^{\pi} x|\sin 2x|\,\mathrm{d}x$.

Najděte objem tělesa $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2+y^2+z^2 \le 1\,, \qquad x^2+y^2 \le x\,.$$

Najděte délku křivky $\mathcal{C}$, která je dána rovnicemi

$$x^2+y^2+z^2 = 25\,, \qquad x+2y=5\,.$$

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru souřadných os x, y, resp. z. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$, která je popsána parametrickými rovnicemi

$$\mathbf{x} = r\cos t\,\mathbf{i} + r\sin t\,\mathbf{j} + r^2\,\mathbf{k}\,, \qquad 0<t<\pi\,, \quad 0<r<1\,,$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná.

Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + x = \dfrac{1}{x}$, $\quad x(0)=2$.

Ukázka 5

Vypočtěte integrál $\int (2x+1) \ln \sqrt{x+1} \, \mathrm{d}x$.

Najděte integrál $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+x-2)}$.

Hustota v tělese $\mathcal{T}$, které je dáno nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\,, \qquad x \geq 0\,,$$

je $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Najděte celkový hmotnost M tělesa $\mathcal{T}$, tj. integrál

$$M = \iiint_{\mathcal{T}} \rho(x,y,z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z\,.$$

Najděte křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{C}} (x+y) \mathrm{e}^{x+y+z} \, \mathrm{d}s\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je úsečka z bodu $A = [1,2,-3]$ do bodu $B = [3,1,-1]$.

Nechť jsou $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, resp. $\mathbf{k}$ jednotkové vektory ve směru souřadných os x, y, resp. z. Najděte tok vektoru $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ plochou $\mathcal{S}$, která je dána vztahy

$$x + y = z^2\,, \qquad y,\, z \geq 0\,, \qquad y + z \leq 2$$

a je orientována tak, že třetí složka vektoru její normály je kladná.

Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + 2x = 4\mathrm{e}^{-t} \cos 2t, \quad x(0) = 1.$

Ukázka 6

Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)}$.

Najděte integrál $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos 2x \sin 3x \,\mathrm{d}x$.

Pomocí polárních souřadnic najděte obsah oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která je určena nerovnostmi

$$\left(x^2+y^2\right)^3 \le 8xy(x^2-y^2)\,, \qquad x\,, y \ge 0\,.$$

Najděte délku křivky $\mathcal{C}$, která je dána rovnicemi

$$x^2+y^2+z^2=6\,, \qquad y+z=2\,.$$

Najděte plošný integrál $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, kde $\mathbf{f} = (z,0,x)$ a plocha $\mathcal{S}$ dána parametrickými rovnicemi

$$x=\frac{u^2}{v}\,, \quad y=\frac{v^2}{u}\,, \quad z=uv\,, \qquad 1\le u\le 2\,, \quad 1\le v\le 2$$

je orientovaná tak, že třetí složka vektoru její normály je záporná.

Nalezněte řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{aligned} x_1' - 4x_2' + 5x_1 &= 0\,, \qquad & x_1(0) &= 2\,, \\ 2x_1' - 3x_2' + 5x_2 &= 0\,, \qquad & x_2(0) &= 4\,. \end{aligned}$$
