Množiny čísel

Axiom matematické indukce: Nechť je $U \subset \mathbb{N}$ taková, že $1 \in U$. Jestliže z vlastnosti $n \in U$ plyne $(n+1) \in U$, pak $U = \mathbb{N}$.

Definice. Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je *shora omezená*, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí nerovnost $x \le K$
Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je *zdola omezená*, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí nerovnost $x \ge K$.
Množina $M \subset \mathbb{R}$, která je omezená shora i zdola, se nazývá *omezená*.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo S, resp. s, pro které platí
1. Pro každé $x \in M$ je $x \le S$, resp. $x \ge s$
2. Pro každé $S' < S$, resp. $s' > s$, existuje $x \in M$
   takové, že $x > S'$, resp. $x < s'$

se nazývá *supremum*, resp. *infimum*, množiny M.

Definice. Nechť $\varepsilon > 0$. *Okolím bodu* $a \in \mathbb{R}$ (přesněji *otevřeným ε–novým okolím*) $U_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}$ nazveme množinu všech bodů $x \in \mathbb{R}$, jejichž vzdálenost od bodu a je menší než ε, tj.

$$U_\varepsilon(a) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ |x-a| < \varepsilon\right\}.$$

Definice. *Prstencovým okolím* bodu $a \in \mathbb{R}$ se nazývá množina $P_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, tj.

$$P_\varepsilon(a) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ 0 < |x-a| < \varepsilon\right\}.$$

Definice. Bod a se nazývá *vnitřní bod* množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže existuje okolí $U_\varepsilon(a) \subset M$.
Bod a se nazývá *vnějším bodem* množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže existuje okolí $U_\varepsilon(a)$ takové, že $U_\varepsilon(a) \cup M = \emptyset$.
Bod a se nazývá *hraničním bodem* množiny M právě tehdy, když má každé jeho okolí $U_\varepsilon(a)$ neprázdný průnik jak s množinou M tak jejím doplňkem $M^C = \mathbb{R} \setminus M$.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *otevřená* právě tehdy, když je každý její bod jejím vnitřním bodem.

Definice. Množina M se nazývá *uzavřená* právě tehdy, když je její doplněk $M^C = \mathbb{R} \setminus M$ otevřená množina.

Definice. Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá *vnitřek* množiny M a značí se M°.

Definice. *Uzávěrem* množiny M nazýváme doplněk ke vnitřku doplňku množiny M a značíme jej $\overline{M}$, tj. $\overline{M} = \mathbb{R} \setminus \big(\mathbb{R} \setminus M\big)^\circ$.

Definice. *Hranicí* množiny M nazýváme množinu všech jejich hraničních bodů a značíme ji ∂M.

Definice. Bod x se nazývá *hromadným bodem* množiny M právě tehdy, když pro každé jeho prstencové okolí $P_\varepsilon(x)$ je $M \cap P_\varepsilon(x) \ne \emptyset$.

Definice. Bod $x \in M$ se nazývá *izolovaný bod* množiny M právě tehdy, když existuje prstencové okolí $P_\varepsilon(x)$ takové, že $M \cap P_\varepsilon(x) = \emptyset$.

Definice. Uzavřená a omezená množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *kompaktní*.

Posloupnosti v $\mathbb{R}$

Definice. *Posloupností* nazýváme zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$.

"Definice". Nechť jsou dány množiny X a Y. Jestliže každému $x \in X$ je přiřazeno právě jedno $y \in Y$, říkáme, že je dáno *zobrazení* množiny X do množiny Y.
Zobrazení lze také definovat jako podmnožinu $f \subset X \times Y$, ve které je každá množina

$$Y_x = \big\{x \in X\,;\ (x, y) \in f\big\}$$

jednobodová.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\big(a_n\big)$ je *shora omezená*, resp. *zdola omezená*, resp. *omezená*, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $a_n \le K$, resp. $a_n \ge K$, resp. $\big|a_n\big| \le K$.

Definice. Posloupnost $\big(a_n\big)$ se nazývá *rostoucí*, resp. *klesající*, resp. *neklesající*, resp. *nerostoucí*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $a_{n+1} > a_n$, resp. $a_{n+1} < a_n$, resp. $a_{n+1} \ge a_n$, resp. $a_{n+1} \le a_n$. Takové posloupnosti nazýváme *monotonní* a posloupnosti rostoucí a klesající *ryze monotonní*.

Definice. Nechť je dána posloupnost $\big(a_n\big)$ a rostoucí posloupnost přirozených čísel $\big(k_n\big)$, tj. $k_n \in \mathbb{N}$ a $k_{n+1} > k_n$. Pak posloupnost $\big(b_n\big)$, pro jejíž členy platí $b_n = a_{k_n}$ nazveme *vybranou posloupností* z posloupnosti $\big(a_n\big)$.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\big(a_n\big)$ má *limitu* $a \in \mathbb{R}$ (*vlastní limitu*), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n > n_0$ platí nerovnost $\big|a_n - a\big| < \varepsilon$. Výrok posloupnost $\big(a_n\big)$ má limitu a zapisujeme jako $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\big(a_n\big)$ má *nevlastní limitu* $+\infty$, resp. $-\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ je $a_n > K$, resp. $a_n < K$.

Definice. Jestliže posloupnost $\big(a_n\big)$ má vlastní limitu, nazýváme ji *konvergentní*. Jestliže posloupnost $\big(a_n\big)$ má nevlastní limitu nebo limitu nemá, nazýváme ji *divergentní*.

Definice. Jestliže posloupnost $\big(a_n\big)$ splňuje *Cauchy–Bolzanovu podmínku*: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuj n_0 takové, že pro každá m, n, $m > n_0$ a $n > n_0$, platí $\big|a_m - a_n\big| < \varepsilon$, se nazývá *cauchyovská*.

Definice. Bod $a \in \mathbb{R}^*$ se nazývá *hromadným bodem* posloupnosti $\big(a_n\big)$ právě tehdy, když existuje vybraná posloupnost $\big(b_n\big)$ taková, že $a = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Definice. Nechť je M množina všech hromadných bodů posloupnosti $\big(a_n\big)$. Číslo $S = \sup M$, resp. $s = \inf M$ se nazývá *limes superior*, resp. *limes inferior*, posloupnosti $\big(a_n\big)$ a značí se $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, resp. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Číselné řady

Definice. Nechť je dána posloupnost (a_n). Posloupnost (s_n), kde $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, se nazývá *posloupnost částečných součtů* posloupnosti (a_n).

Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, pak s nazveme *součtem řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Jestliže je posloupnost s_n konvergentní, tj. existuje $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, nazýváme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

Je-li posloupnost (s_n) divergentní nazýváme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje k* $\pm\infty$.

Definice. Jestliže je konvergentní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, nazývá se řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní.*

Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergentní, nazývá se řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *neabsolutně konvergentní.*

Věta. Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí nerovnost $0 \le a_n \le b_n$, pak z konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a z divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta. Nechť jsou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s nezápornými členy. Pak platí:

1) Jestliže existuje konečná limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = K \in \mathbb{R}$, pak z konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Jestliže existuje (konečná nebo nekonečná) nenulová limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k > 0$, pak z divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

3) Jestliže existuje konečná nenulová limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, pak řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ současně konvergují nebo divergují.

Věta. (*odmocninové kritérium*)

Jestliže existuje n_0 takové, že pro všechna $n > n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Jestliže pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $n > n_0$ takové, že $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta. (*limitní odmocninové kritérium*)

Nechť $a_n \geq 0$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = q$. Je-li $q < 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a je-li $q > 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta. (*podílové kritérium*) Nechť je $a_n > 0$.

Nechť existuje n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ je $0 \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Nechť existuje n_0 takové, že pro všechna $n > n_0$ je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta. (*limitní podílové kritérium*)

Nechť $a_n > 0$. A existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Je-li $q < 1$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a je-li $q > 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta. (*Rabeho kritérium*)

Nechť $a_n > 0$ a existuje $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = s$. Je-li $s > 1$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, a je-li $s < 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta. (*Leibnizovo kritérium pro alternující řady*)

Nechť $a_n \geq 0$ je monotonní posloupnost, pro kterou platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Pak je řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergentní.

Věta. Nechť jsou částečné součty $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ omezené, posloupnost $\big(a_n\big)$ je monotonní a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Věta. Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje a posloupnost $\big(a_n\big)$ je monotonní a omezená. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Základní vlastnosti funkcí

Definice. Nechť X a Y jsou podmnožiny $\mathbb{R}$. *Reálnou funkcí* jedné reálné proměnné nazýváme zobrazení $f : X \to Y$.
Množina X se nazývá *definiční obor* zobrazení f a budeme jej značit D_f.

Definice. Nechť je dána funkce $f : X \to Y$. Pak množinu $G_f = \big\{(x,y) \in X \times Y\,;\ x \in X\,,\ y = f(x)\big\}$ nazýváme *graf* funkce $y = f(x)$.

Definice. Nechť je $f : X \to Y$ funkce. Pro každou množinu $A \subset X$ se množina

$$f(A) = \big\{y \in Y\,;\ \exists x \in A\,,\ y = f(x)\big\}$$

nazývá *obraz množiny* A.
Množina $H_f = f(X)$ se nazývá *obor hodnot* funkce f.

Definice. Nechť je $F : X \to Y$ funkce a $B \subset Y$. Množina

$$F^{(-1)}(B) = \big\{x \in X\,;\ f(x) \in B\big\}$$

se nazývá *vzor množiny* B.

Definice. Nechť jsou $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ funkce. Funkce $h : X \to Z$ definovaná předpisem $h(x) = g\big(f(x)\big)$ se nazývá *složená funkce*. Tuto funkci h budeme značit $g \circ f$.

Definice. Nechť je $f : X \to Y$ funkce.
Jestliže z rovnosti $f\big(x_1\big) = f\big(x_2\big)$ plyne rovnost $x_1 = x_2$, nazývá se funkce f *prostá*.
Je-li $H_f = Y$ říkáme, že funkce f je *na množinu* Y.
Je-li funkce f zároveň prosta a na množinu Y, nazývá se *vzájemně jednoznačná*.

Definice. Nechť je $f : X \to Y$. Funkce $g : Y \to X$, pro kterou je $g \circ f = \mathrm{id}_X$ a $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, se nazývá *inverzní funkce* k funkce f a budeme ji značit $g = f^{(-1)}$.

Definice. Nechť je $f : X \to Y$ a $A \subset X$. Funkci $g : A \to Y$ definovanou předpisem $g(a) = f(a)$ pro každé $a \in A$ nazýváme *zúžením* funkce f na množinu A a značíme $f_{|A}$.

Definice. Nechť je $f : X \to Y$.
Existuje-li $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in X$ je $f(x) \le K$, nazývá se funkce f *shora omezená*.
Existuje-li $k \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in X$ je $f(x) \ge k$, nazývá se funkce f *zdola omezená*.
Je-li funkce f omezená shora i zdola, nazývá se *omezená*.

Definice. Nechť je $f : x \to Y$ a $M \subset X$. Funkce f se nazývá *shora omezená*, resp. *zdola omezená*, resp. *omezená*, *na množině* M, je-li funkce $f_{|M}$ shora omezená, resp. zdola omezená, resp. omezená.

Definice. Nechť je $f : X \to Y$.
Řekneme, že je funkce f *rostoucí*, platí-li pro každé x_1, $x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$.
Řekneme, že je funkce f *klesající*, platí-li pro každé x_1, $x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ nerovnost $f(x_1) > f(x_2)$.
Řekneme, že je funkce f *neklesající*, platí-li pro každé x_1, $x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ nerovnost $f(x_1) \le f(x_2)$.
Řekneme, že je funkce f *nerostoucí*, platí-li pro každé x_1, $x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ nerovnost $f(x_1) \ge f(x_2)$.
Funkce neklesající nebo nerostoucí se nazývají *monotonní* a funkce rostoucí nebo klesající se nazývají *ryze monotonní*.

Definice. Nechť je $f : X \to Y$ a $M \subset X$. říkáme, že funkce f je *rostoucí*, resp. *klesající*, resp. *neklesající*, resp. *nerostoucí*, *na množině* M, je-li rostoucí, resp. klesající, resp. neklesající, resp. nerostoucí, její zúžení $f_{|M}$.
Funkce f se nazývá *monotonní*, resp. *ryze monotonní*, *na množině* M, je-li monotonní, resp. ryze monotonní, funkce $f_{|M}$.

Definice. Řekneme, že funkce $f : X \to Y$ má v bodě $x_0 \in X$ *maximum*, resp. *minimum*, jestliže pro každé $x \in X$ je $f(x_0) \geq f(x)$, resp. $f(x_0) \leq f(x)$.
Maxima a minima funkce se nazývají *extrémy*.

Definice. Nechť je $I \subset \mathbb{R}$ interval. Funkce $f : I \to Y$ se nazývá *konvexní*, resp. *konkávní*, jestliže pro každé tři body x_1, x_2, $x_3 \in I$, pro která je $x_1 < x_2 < x_3$, je y-ová souřadnice bodu, který leží na přímce procházející body $\big[x_1; f(x_1)\big]$ a $\big[x_3; f(x_3)\big]$ a jehož x-ová souřadnice je x_2 větší, resp. menší, než $f(x_2)$.

Definice. Nechť pro každé $x \in X$ je $-x \in X$. Funkce $f : X \to Y$ se nazývá *sudá*, resp. *lichá*, jestliže $f(-x) = f(x)$, resp. $f(-x) = -f(x)$.

Definice. Nechť je $L > 0$ a pro každé $x \in X$ je $x \pm L \in X$. Funkce $f : X \to Y$ se nazývá *periodická* s periodou L, jestliže pro každé $x \in X$ platí $f(x \pm L) = f(x)$.

Definice. Nechť $k \in \mathbb{R}$, $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$, $f_2 : X_2 \to \mathbb{R}$, $X = X_1 \cap X_2$ a $X = \big\{x \in X_2\,;\ f_2(x) = 0\big\}$. Pak
$kf_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ je definována předpisem $\big(kf_1\big)(x) = kf_1(x)$ pro každé $x \in X_1$;
$f_1 + f_2 : X \to \mathbb{R}$ je definována předpisem $\big(f_1 + f_2\big)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ pro každé $x \in X$;
$f_1 \cdot f_2 : X \to \mathbb{R}$ je definována předpisem $\big(f_1 \cdot f_2\big)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ pro každé $x \in X$;
$\dfrac{f_1}{f_2} : X \setminus X_0 \to \mathbb{R}$ je definována předpisem $\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ pro každé $x \in X \setminus X_0$.

Limita a spojitost funkce

Definice. (*vlastní limita ve vlastním bodě*)
Nechť je dána funkce $f : X \to Y$ a nechť je $a \in \mathbb{R}$ hromadný bod množiny X. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě *a limitu* $A \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in X$, pro které je $0 < |x-a| < \delta$, platí nerovnost $\big|f(x) - A\big| < \varepsilon$.
Tento výrok zapisujeme jako $\lim\limits_{x \to a} f(X) = A$.

Definice. Nechť je dána funkce $f : X \to Y$ a bod a, který je hromadná bod množiny $X = D_f$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ *limitu* $A \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když ke každému okolí $U(A)$ bodu A existuje prstencové okolí $P(a)$ takové, že pro každé $x \in P(a) \cap X$ je $f(x) \in U(A)$. Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}$ mluvíme o *vlastní limitě ve vlastním bodě*; je-li $a \in \mathbb{R}$ a $A = \pm\infty$, mluvíme o *nevlastní limitě ve vlastním bodě*; je-li $a = \pm\infty$ a $A \in \mathbb{R}$ mluvíme o *vlastní limitě v nevlastním bodě*; je-li $a = \pm\infty$ a $A \pm \infty$ mluvíme o *nevlastní limitě v nevlastním bodě.*

Definice. Nechť je dána funkce $f : X \to Y$, množina $M \subset X$ a bod a, který je hromadným bodem množiny M. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu A vzhledem k množině M, jestliže pro každé okolí $U(A)$ bodu A existuje prstencové okolí $P(a)$ bodu a takové, že pro každé $x \in P(a) \cap M$ je $f(x) \in U(A)$. Toto tvrzení zapisujeme $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = A$.

Definice. Nechť je dána funkce $f : X \to Y$ a bod $a \in \mathbb{R}$. Nechť je a hromadný bod množiny $X_{a-} = \big\{x \in X\,;\ x < a\big\} = X \cap (-\infty, a)$, resp. $X_{a+} = \big\{x \in X\,;\ x > a\big\} = X \cap (a, +\infty)$. Řekneme, že má funkce $f(x)$ v bodě *a limitu zleva*, resp. *limitu zprava*, rovnou A, jestliže ke každému okolí $U_\varepsilon(A)$ bodu A existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in X$, $0 < a - x < \delta$, resp. $0 < x - a$, je $f(x) \in U(a)$.
Toto tvrzení píšeme zkráceně jako $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$, resp. $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$.

Definice. Nechť je $f : X \to Y$ a bod $a \in X$. Řekneme, že funkce $f(x)$ je *spojitá v bodě a* právě tehdy, když ke každému okolí $U_\varepsilon\big(f(a)\big)$ existuje okolí $U_\delta(a)$ takové, že pro každé $x \in X \cap U_\delta(a)$ je $f(x) \in U_\varepsilon(a)$.

Definice. Funkce $f : X \to Y$ se nazývá *spojitá na množině* $M \subset X$ právě tehdy, je-li spojitá v každém bodě $x \in M$.
Funkce spojitá na množině $X = D_f$ se nazývá *spojitá.*

Diferencovatelné funkce

Definice. Nechť je $f : X \to Y$ a bod a je vnitřní bod množiny X. Existuje-li $A \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{h} = 0\,,$$

řekneme, že je funkce $f(x)$ *diferencovatelná* v bodě a a lineární funkce $\mathrm{d}f(a;h) = Ah$ proměnné h se nazývá *diferenciál* funkce $f(x)$ v bodě a.

Definice. Nechť je $f : X \to Y$ a bod a je vnitřní bod množiny X. Existuje-li konečná limita

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,,$$

nazýváme ji *derivací* (vlastní derivací) *funkce* $f(x)$ v bodě a.

Definice. Nechť je $f : X \to Y$. Jestliže existuje konečná limita

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,,$$

resp.

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,,$$

nazýváme ji *derivace zprava*, resp. *derivace zleva* funkce $f(x)$ v bodě a.

Definice. Funkce $f : X \to Y$ se nazývá *diferencovatelná na množině* $M \subset X$, je-li diferencovatelná v každém bodě množiny M.

Věta. (*Rolleova věta o střední hodnotě*)
Nechť je $f : X \to Y$ je funkce spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b\rangle \subset X$, $a < b$, která má v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) derivaci, a nechť platí $f(a) = f(b)$. Pak existuje alespoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f'(\xi) = 0$.

Věta. (*Lagrangeova věta o střední hodnotě*)
Nechť je $f : X \to Y$ funkce spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b\rangle \subset X$, $a < b$, a je diferencovatelná v otevřeném intervalu (a, b). Pak existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$.

Věta. (*Cauchyova věta o střední hodnotě*)
Nechť jsou funkce $f : X \to \mathbb{R}$ a $g : X \to \mathbb{R}$ spojité na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b\rangle \subset X$, $a < b$, diferencovatelné na otevřeném intervalu (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ je $g'(x) \neq 0$. Pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Definice. Řekneme, že funkce $f : X \to Y$ má v bodě $a \in X$ *lokální maximum*, resp. *lokální minimum*, právě tehdy, když existuje okolí $U(a)$ bodu a takové, že po každé $x \in X \cap U(a)$ je $f(x) \leq f(a)$, resp. $f(x) \geq f(a)$.
Jestliže nahradíme neostré nerovnosti ostrými, mluvíme o *ostrém lokálním maximu*, resp. o *ostrém lokálním minimu*.
Lokální maxima a minima nazýváme *lokální extrémy* a ostrá lokální maxima a minima *ostré lokální extrémy* funkce $f(x)$.

Derivace a diferenciály vyšších řádů

Definice. Nechť má funkce $f : X \to Y$ v okolí bodu $a \in X$ derivaci $f'(x)$. Existuje-li

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \big(f'\big)'(a) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(a) = f''(a)\,,$$

nazýváme ji *druhou derivací* funkce $f(x)$ v bodě a.
Má-li funkce $f(x)$ v okolí bodu $a \in X$ $(n-1)$–ní derivaci $f^{(n-1)}(x)$, a existuje konečná limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(f^{(n-1)}\Big)(a) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(a) = f^{(n)}(a)\,,$$

nazýváme tuto limitu *n–tou derivací* funkce $f(x)$ v bodě a.
Má-li funkce $f(x)$ v bodě $a \in X$ n–tou derivaci $f^{(n)}(a)$, pak nazýváme funkci $\mathrm{d}^n f(a;h) = f^{(n)}(a)h^n$ proměnné $h \in \mathbb{R}$ *diferenciálem n–tého řádu* funkce $f(x)$ v bodě a.

Definice. Má-li funkce $f : X \to Y$ v každém bodě množiny X derivaci n–tého řádu, nazveme funkci $f^{(n)} : X \to \mathbb{R}$, která přiřazuje každému $x \in X$ hodnotu n–té derivace funkce $f(x)$ v tomto bodě *n–tou derivací* funkce $f(x)$ na množině X.

Definice. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je *třídy $C_n(M)$*, jestliže má na množině M spojité derivace n–tého řádu.
Řekneme, že funkce $f : X \to \mathbb{R}$ je *třídy $C_\infty(M)$*, jestliže má na M spojité derivace všech řádů.

Definice. Nechť má funkce $f(x)$ v bodě a derivace až do řádu n včetně. Polynom

$$T_n(x;a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nazýváme *Taylorovým polynomem* funkce $f(x)$ se středem v bodě a.

Použití diferenciálního počtu

Definice.
Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$, nazývá se přímka $x = a$ *svislou asymptotou* grafu funkce $y = f(x)$.
Jestliže existují reálná k a q taková, že $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - kx - q\big) = 0$, nazývá se přímka $y = kx + q$ *asymptotou* (vodorovnou pro $k = 0$ a šikmou pro $k \neq 0$) grafy funkce $y = f(x)$ v bodě $\pm\infty$.

Definice. Nechť jsou dány dvě funkce $f : X \to \mathbb{R}$ a $g : X \to \mathbb{R}$ a bod $a \in X$. Jestliže $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$, $f''(a) = g''(a)$, $\ldots$, $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$, říkáme, že křivky $y = f(x)$ a $y = g(x)$ mají v bodě a *dotyk řádu* n.

Definice. Přímka, která má s křivkou Γ v jejím bodě M_0 dotyk prvního řádu, se nazývá *tečna* ke křivce Γ v bodě M_0.

Definice. Kružnice, která má s rovinnou křivkou Γ v jejím bodě M_0 dotyk druhého řádu, se nazývá *oskulační kružnice* ke křivce Γ v bodě M_0.
Poloměr R oskulační kružnice se nazývá *poloměr křivosti*, jeho převrácená hodnota $k = \dfrac{1}{R}$ se nazývá *křivost* a střed S oskulační kružnice nazýváme *střed křivosti*.

Definice.
Množina všech středů křivosti rovinné křivky Γ se nazývá *evoluta* křivky Γ.
Křivka Γ, jejíž evoluta je křivka $\widehat{\Gamma}$, se nazývá *evolventa* křivky $\widehat{\Gamma}$.

Definice. Nechť je Γ_α, kde $\alpha \in A$, je systém rovinných křivek. *Obálkou* (*obalovou křivkou*) systému křivek Γ_α, $\alpha \in A$, nazýváme křivku, která má dotyk prvního řádu s každou křivkou ze systému Γ_α a která má v každém svém bodě dotyk prvního řádu aspoň s jednou křivkou ze sytému Γ_α.

Neurčitý integrál

Definice. Nechť je dána funkce $f : X \to Y$. Každou funkci $F : X \to \mathbb{R}$, pro kterou pro každé $x \in X$ platí $F'(x) = f(x)$, nazýváme *primitivní funkcí* k funkci $f(x)$.

Definice. Nechť je $f : X \to Y$. *Neurčitým integrálem* funkce $f(x)$ nazveme třídu všech funkcí $\big[F(x)\big]$ takovou, že pro každé $x \in X$ je $F'(x) = f(x)$.

Věta. (*integrace per partes*)
Nechť jsou $f : X \to \mathbb{R}$ a $g : X \to \mathbb{R}$ diferencovatelné funkce a nechť existuje $\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. Pak existuje také $\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ a platí rovnost $\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta. (*první věta o substituci*)
Nechť je $f : X \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\varphi : T \to X$ je diferencovatelná funkce. Pak platí $\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F\big(\varphi(t)\big)$.

Věta. (*druhá věta o substituci*)
Nechť je $T \subset \mathbb{R}$ interval, $\varphi : T \to X$ je prostá diferencovatelná funkce na množinu X a pro každé $t \in T$ je $\varphi'(t) \neq 0$.Existuje-li $\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Psi(t)$, pak existuje $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \big(\Psi \circ \varphi^{-1}\big)(x) = \Psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$.

Riemannův integrál

Definice. Nechť je $I = \langle a, b\rangle$ omezený interval v $\mathbb{R}$. *Dělením intervalu* nazveme každou konečnou posloupnost bodů $a_0 = a \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n = b$.

Definice. Nechť je funkce $f(x)$ omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ označme $m_i = \inf\limits_{x\in\langle a_{i-1}, a_i\rangle} f(x)$ a $M_i = \sup\limits_{x\in\langle a_{i-1}, a_i\rangle} f(x)$. Číslo $s_{\mathcal{D}} = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\bigl(a_i - a_{i-1}\bigr)$, resp. $S_{\mathcal{D}} = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i\bigl(a_i - a_{i-1}\bigr)$, nazýváme *dolní*, resp. *horní*, *Riemannův součet* funkce $f(x)$ příslušný k dělení $\mathcal{D}$.

Definice. Číslo $s = \sup\limits_{\mathcal{D}} s_{\mathcal{D}}$, resp. $S = \inf\limits_{\mathcal{D}} S_{\mathcal{D}}$ se nazývá, *dolní*, resp. *horní*, *Riemannův integrál* funkce $f(x)$ od bodu a do bodu b.

Definice. Jestliže platí $s = S$, kde s je dolní a S horní Riemannův integrál funkce $f(x)$ od bodu a do bodu b, nazýváme toto číslo *Riemannův integrál* funkce $f(x)$ od bodu a do bodu b a značíme jej $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Existuje-li Riemannův integrál funkce $f(x)$ od bodu a do bodu b, říkáme, že je funkce $f(x)$ *integrovatelná* na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Definice. Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ omezená množina a $f : M \to \mathbb{R}$. Nechť je $I = \langle a, b\rangle$ omezený, uzavřený interval takový, že $M \subset I$. *Riemannovým integrálem* funkce $f(x)$ přes množinu M rozumíme integrál $\displaystyle\int_M f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x$, kde $\tilde{f}(x) = f(x)$ pro $x \in M$ a $\tilde{f}(x) = 0$ pro $x \in I \setminus M$.

Věta. (*první věta o střední hodnotě integrálního počtu*)
Nechť jsou $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, $g(x) \ge 0$ a $k \le f(x) \le K$. Pak platí nerovnost

$$k \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \in_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le K \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Je-li navíc $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá, existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta. (*druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu*)
Nechť je funkce $f(x)$ spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $g(x)$ je na tomto intervalu monotonní spojitě diferencovatelná funkce. Pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(b) \int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x + g(a) \int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nevlastní Riemannův integrál

Definice. Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, nazýváme číslo $F(b) - F(a)$ *Newtonovým určitým integrálem* funkce $f(x)$ od bodu a do bodu b.

Definice. Nechť $a < b$ a pro každé $y \in (a, b)$ existuje Riemannův integrál $\displaystyle\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže existuje vlastní limita $\displaystyle\lim_{y\to b-}\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$, nazveme ji *nevlastním* (nebo *zobecněným*) *Riemannovým integrálem* funkce $f(x)$ od bodu a do bodu b.

Definice. Jestliže existují nevlastní Riemannovy integrály $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\displaystyle\int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$, nazýváme integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *absolutně konvergentní.*

Jestliže integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a integrál $\displaystyle\int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$ diverguje, říkáme, že integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je *neabsolutně konvergentní.*

Posloupnosti funkcí a mocninné řady

Definice. *Posloupnost funkcí* je zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny funkcí definovaných na jisté množině $M \subset \mathbb{R}$.

Definice. Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a pro každé $x \in M$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí nerovnost $\left|f(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$, říkáme, že posloupnost funkcí $\big(f_n(x)\big)$ *konverguje bodově* k funkci $f(x)$ nebo že funkce $f(x)$ je *bodová limita* posloupnosti funkcí $\big(f_n(x)\big)$.

Definice. Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $x \in M$ a pro každé $n > n_0$ platí nerovnost $\left|f(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$, říkáme, že posloupnost funkcí $\big(f_n(x)\big)$ *konverguje stejnoměrně* k funkci $f(x)$ nebo že funkce $f(x)$ je *stejnoměrná limita* posloupnosti funkcí $\big(f_n(x)\big)$.

Definice. Nechť je $\big(f_n(x)\big)$ posloupnost funkcí definovaných na množině $M \subset \mathbb{R}$. Pro každé $x \in M$ označme $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, tzv. *n–tý částečný součet*. Množinu všech $x \in M$, pro která existuje konečná bodová limita $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$ nazveme *oborem konvergence* řady $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ a číslo $s(x)$ *součtem* řady funkcí $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

Jestliže posloupnost $s_n(x)$ konverguje na množině X stejnoměrně, říkáme, že řada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ je *stejnoměrně konvergentní.*

Definice. *Mocninnou řadou* nazýváme řadu funkcí tvaru $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, kde c_n a a jsou reálné konstanty.

Definice. Číslo $a \in \mathbb{R}$ se nazývá *střed mocninné řady* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$.

Číslo $R \in \mathbb{R}^*$ takové, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < R$, řada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ konverguje a pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| > R$ řada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ diverguje se nazývá *poloměr konvergence* mocninné řady $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$.