Přednáška 6 – Použití diferenciálního počtu

1. Průběh funkce $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$

(1) Definiční obor $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

(2) Funkce sudá; $[x; y] \to [-x; y]$.

(3) Spojitost

(4) Nulové a jiné speciální body.

(5) $f(x) > 0$, $H_f \subset (0, +\infty)$.

(6) Limity v krajních bodech D_f. Asymptoty.

(7) Derivace $f'(x) = \dfrac{x(x^2-3)}{(x^2-1)^{3/2}}$.

(8) Derivace sudé funkce je lichá a derivace liché funkce je sudá.

(9) Intervaly monotonie a lokální extrémy; $H_f = \left\langle 2\sqrt{2}, +\infty\right)$.

(10) Druhá derivace $f''(x) = \dfrac{3(x^2+1)^2}{(x^2-1)^{5/2}} > 0$; Funkce konvexní.

2. Derivace funkce dané parametricky.

(1) Podmínka $\dot\xi(t) \neq 0$, resp. $\big(\dot\xi(t)\big)^2 + \big(\dot\eta(t)\big)^2 \neq 0$.

(2) Inverzní funkce $t = \tau x$.

(3) $y(x) = \eta\big(\tau(x)\big) \Rightarrow y(\big(\xi(t)\big) = \eta(t)$.

(4) První derivace $y'(x) \cdot \dot\xi(t) = \dot\eta(t)$.

(5) Druhá derivace.

(6) Příklad $x = \xi(t) = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $y = \eta(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$, $t \in (0, +\infty)$

3. Derivace funkce definované implicitně.

(1) Křivka v rovině a rovnice $F(x, y) = 0$.

(2) Příklad $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

(3) První derivace $\big(y^2 - x\big)y' = y - x^2$.

(4) Podmínka $y^2 - x \neq 0$.

(5) Druhá derivace.

(6) Extrémy funkce definované implicitně.

4. Dotyk křivek n–tého řádu.

5. Tečna a normála křivky.

(1) Tečna a normála křivky $y = f(x)$ v bodě $M_0 = \big[x_0; y_0\big] = \big[x; f(x_0)\big]$.

(2) Tečna a normála ke křivce $xy = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ v bodě $M_0 = \left[\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}; \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$.

6. Oskulační kružnice. Příklad: oskulační kružnice epicykloidy $x = a(1 + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

7. Evoluta a evolventa. Příklad: evoluta elipsy $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

8. Obálka množiny křivek. Příklad: Obálka množiny křivek $x\sin t + y\cos t = \cos t + \sin t$.