

Přednáška 9 – NEVLASTNÍ RIEMANNŮV INTEGRÁL

1. Newtonův integrál.
2. Vztah mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem.
3. Příklad: $f(x) = \frac{1}{n}$ pro $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, m a n nesoudělná, $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\int_0^1 f(x) dx = 0$.
4. $f(x) = 3x^2 \sin \frac{\pi}{x^3} - \frac{3\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x^3}$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$, není omezená, ale $F(x) = x^3 \sin \frac{\pi}{x^3}$ pro $x \neq 0$ a $F(0) = 0$.
5. Nevlastní Riemannův integrál funkce neomezené v okolí bodu.
6. Příklady: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$, $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ neexistuje.
7. Definice nevlastního Riemannova integrálu $\int_a^b f(x) dx$, kde $f(x)$ je lokálně omezená na $\langle a, b \rangle$.
8. Definice nevlastního Riemannova integrálu $\int_a^b f(x) dx$, kde $f(x)$ je lokálně omezená na $\langle a, b \rangle$.
9. Nevlastní Riemannův integrál, když existuje jako Riemannův integrál.
10. Nevlastní Riemannův integrál přes neomezenou množinu.
11. Příklady: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ neexistuje.
12. Definice nevlastního Riemannova integrálu $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.
13. Definice nevlastního Riemannova integrálu $\int_{-\infty}^a f(x) dx$.
14. Příklady: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$.
15. Obecná definice nevlastního Riemannova integrálu.
16. Cauchy–Bolzanova podmínka konvergence nevlastního Riemannova integrálu.
17. Integrál $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ konverguje $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
18. Integrál $\int_a^b |f(x)| dx$ konverguje \Rightarrow integrál $\int_a^b f(x) dx$ konverguje.
19. Absolutně a neabsolutně konvergentní integrály.
20. Srovnávací kritérium pro absolutně konvergentní integrály.
21. Integrální kritérium konvergence řad s nezápornými členy.
22. Konvergence integrálů $\int_a^b f(x) dx$ a $\int_a^b g(x) dx$ a limita $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$.
23. Konvergence integrálů $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$.
24. Konvergence integrálů $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

25. Příklad $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3} \cdot \sqrt[3]{x^3-3x+2}}$.

26. Příklad $\int_1^\infty \frac{\sqrt[4]{x^3+2x+1}}{\sqrt[3]{x^2+1} \cdot \sqrt[5]{x^6+x^4+x^2+1}} dx$.

27. Konvergence integrálů $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^p} dx$, kde $f(x)$ má v bodě $x = 0$ spojitě derivace do řádu n včetně a $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ a $f^{(n)}(0) \neq 0$.

28. Příklad $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} dx$.

29. Dirichletovo kritérium neabsolutní konvergence.

30. Příklad $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ a $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$.