PŘEDNÁŠKA 9

NEVLASTNÍ RIEMANNŮV INTEGRÁL

Nevlastní Riemannův integrál

Definice. Nechť $a < b$ a pro každé $y \in (a, b)$ existuje Riemannův integrál $\displaystyle\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže existuje vlastní limita $\displaystyle\lim_{y\to b-} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$, nazveme ji **nevlastním** (nebo **zobecněným**) **Riemannovým integrálem funkce** $f(x)$ **od bodu** a **do bodu** b, a řekneme, že nevlastní integrál je **konvergentní**. V případě, že je výše uvedená limita nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že integrál **diverguje**. Nevlastní Riemannův integrál funkce $f(x)$ od a do b značíme opět $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Podle definice je tedy

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to b-} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x.$$

O tomto integrálu říkáme, že je **nevlastní vlivem integrandu**. Bod b, v jehož každém okolí je integrand neomezený, se nazývá **singulárním bodem** integrandu nebo nevlastního integrálu. Uvedená rovnost platí i tehdy, když integrál vlevo existuje jako vlastní Riemannův integrál. Proto můžeme bez obav používat pro nevlastní integrály totéž označení jako pro integrály vlastní.

Nevlastní integrál pro funkce, jejichž jediným singulárním bodem je bod a, tj. dolní integrační mez, definujeme analogicky:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to a+} \int\limits_x^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jsou-li oba krajní body a, b integračního oboru jedinými singulárními body integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pak rozdělíme integrační obor nějakým bodem $c \in (a,b)$ a vyšetřujeme integrály $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Podobně, je-li některý bod $c \in (a,b)$ singulárním bodem integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, uvažujeme každý z integrálů $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zvlášť.

Newton–Leibnizova formule pro nevlastní integrály

Věta. *Předpokládejme, že integrál* $I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *má jediný singulární bod* a*, že existují vlastní integrály* $\int_x^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *pro* $x \in (a,b)$ *a že funkce* f *má primitivní funkci* F *v intervalu* $(a,b\rangle$*. Konverguje-li integrál* I*, pak platí:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Analogicky v případě, že jediným singulárním bodem je b.

Srovnávací kritérium konvergence integrálu

Věta. *Nechť funkce* f, g *jsou definovány v intervalu* (a, b) *a nechť* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in (a, b)$. *Nechť existují vlastní integrály* $\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_\alpha^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *pro každé* $\alpha \in (a, b)$. *Potom platí následující dvě tvrzení.*

1. *Konverguje-li integrál* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, *konverguje také integrál* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. *Diverguje-li integrál* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *diverguje také integrál* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Funkce f, resp. integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ve srovnávacím kritériu se nazývá **minorantní funkce**, resp. **minorantní integrál**. Funkce g, resp. integrál $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ se nazývá **majorantní funkce**, resp. **majorantní integrál**.

Absolutně konvergentní integrály

Definice. Jestliže existují nevlastní Riemannovy integrály $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$, nazýváme integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **absolutně konvergentní**.

Jestliže integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a integrál $\int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$ diverguje, říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je **neabsolutně konvergentní**.

Ze srovnávacího kritéria bezprostředně plyne následující tvrzení.

Věta. *Nechť funkce* f *je definovaná v intervalu* $(a, b\rangle$*, nechť existuje integrál* $\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *pro každé* $\alpha \in (a, b)$*. Nechť konverguje integrál* $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$*. Potom konverguje i integrál* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$*.*

Integrály nevlastní vlivem mezí

Definice. Nechť pro každé $y > a$ existuje Riemannův integrál $\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{y\to+\infty} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazýváme ji **nevlastním** (nebo **zobecněným**) **Riemannovým integrálem**.

Nechť pro každé $y < a$ existuje Riemannův integrál $\int_y^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{y\to-\infty} \int_y^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazýváme ji **nevlastním** (nebo **zobecněným**) **Riemannovým integrálem**.

Definice. Nechť funkce f má vlastní Riemannův integrál přes libovolný omezený interval (x, y) a nechť $c \in \mathbb{R}$. Říkáme, že **nevlastní Riemannův integrál I funkce f od $-\infty$ do ∞ konverguje** právě tehdy, když konvergují integrály $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Integrál I značíme $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ a definujeme

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lze ukázat, že konvergence ani hodnota integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ nezávisí na volbě bodu $c \in \mathbb{R}$.

Absolutně konvergentní integrály

Definice. Jestliže existují nevlastní Riemannovy integrály $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$, nazýváme integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **absolutně konvergentní**.

Jestliže integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a integrál $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ diverguje, říkáme, že integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ je **neabsolutně konvergentní**.

Věta. *Nechť funkce f je definovaná v intervalu (a, ∞) a nechť existuje vlastní Riemannův integrál $\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$ pro každé $y \in (a, \infty)$. Nechť konverguje integrál $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Potom konverguje také integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Avšak z konvergence integrálu $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ neplyne konvergence integrálu $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$.*

Nutná podmínka konvergence

Věta. *Nechť existuje vlastní integrál* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *pro každé* $b > a$ *a nechť existuje vlastní nebo nevlastní limita* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 0$. *Pak integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje.*

Srovnávací kritérium

Věta. *Nechť jsou funkce* f, g *definovány v intervalu* (a, ∞), *nechť* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in (a, \infty)$. *Nechť existují vlastní integrály* $\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$ *pro každé* $\beta \in (a, \infty)$. *Potom platí následující dvě tvrzení.*

1. *Konverguje-li integrál* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$, *konverguje i integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. *Diverguje-li integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, *diverguje i integrál* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$.