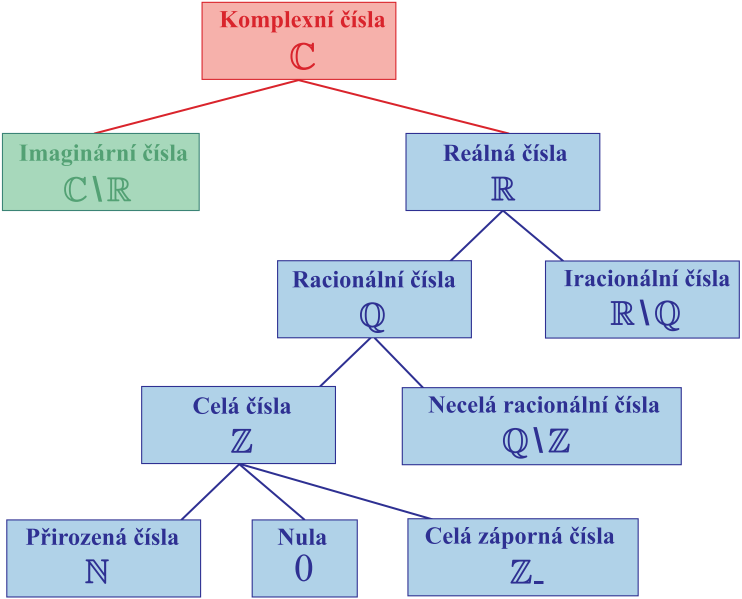
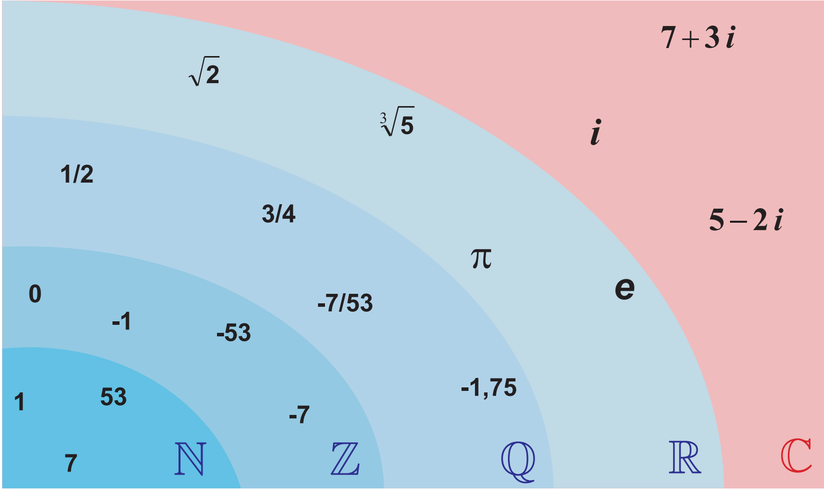
PŘEDNÁŠKA 1

MNOŽINY ČÍSEL

A JEJICH VLASTNOSTI

Druhy čísel


Komplexní čísla
ℂ
Imaginární čísla
ℂ\ℝ
Reálná čísla
ℝ
Racionální čísla
ℚ
Iracionální čísla
ℝ\ℚ
Celá čísla
ℤ
Necelá racionální čísla
ℚ\ℤ
Přirozená čísla
ℕ
Nula
0
Celá záporná čísla
ℤ₋



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbf{C}$$

Množina přirozených čísel

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \dots\}, \qquad \mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\}$$

Axiom matematické indukce.

Nechť je $U \subset \mathbb{N}$ taková, že $1 \in U$.

Jestliže z vlastnosti $n \in U$ plyne $(n+1) \in U$, pak $U = \mathbb{N}$.

☛ ***Příklad.*** Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,. \tag{1}$$

Řešení: Označme $U = \{n \in N \mid \text{pro } n \text{ platí (1)}\}$.

1. krok: $1 \in U:\quad 1^2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$

2. krok: $n \in U \Rightarrow (n+1) \in U:$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\,,$$

to je právě vztah (1) pro $n = n+1$. $\square$

Množina celých čísel

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$$

Množina celých čísel je rozšířením množiny $\mathbb{N}_0$ o množinu všech řešení rovnic tvaru

$$n_1 + x = n_2\,, \quad \text{kde} \quad n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}\,.$$

Množina racionálních čísel

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n},\ \text{kde } z \in \mathbb{Z}\,,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Množina racionálních čísel je rozšířením množiny $\mathbb{Z}$ o množinu všech řešení rovnic tvaru

$$z_1 x = z_2\,, \quad \text{kde} \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{Z}\,.$$

Množina reálných čísel

$\mathbb{R} = \{a_0.a_1a_2\ldots a_n\ldots,\ a_0 \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0,\ \ldots, 9\}$ pro $k \geq 1\}$,

kde ke každému $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $n > n_0$ takové, že $a_n \neq 9$.

Množina reálných čísel je tedy zavedena jako množina všech desetinných rozvojů, které nejsou zakončeny samými devítkami – jinak by např. číslo 1 mělo dva různé rozvoje,

$$1.000\ldots \qquad \text{a} \qquad 0.999\ldots\ ,$$

a jeho vyjádření by nebylo jednoznačné:

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = 1\,.$$

Racionální čísla představují pouze **periodické desetinné rozvoje**, kde existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n > n_0$ je $a_{n+k} = a_n$ (jistá skupina čísel se neustále opakuje). Čísla, která neodpovídají periodickým desetinným rozvojům, se nazývají **iracionální čísla**.

Uspořádání na množině $\mathbb{R}$.

Řekneme, že reálné číslo $x = x_0.x_1x_2\dots x_{n-1}x_nx_{n+1}\dots$ je menší než reálné číslo $y = y_0.y_1y_2\dots y_{n-1}y_ny_{n+1}\dots$, píšeme $x < y$, právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že $x_k = y_k$ pro $k < n$ a $x_n < y_n$.

Chceme-li vyjádřit, že $a < b$ nebo $a = b$, píšeme $a \le b$; je-li $a > b$ nebo $a = b$, píšeme $a \ge b$.

Reálná čísla $a > 0$ se nazývají **kladná čísla**, $a < 0$ **záporná čísla**, $a \ge 0$ **nezáporná čísla** a $a \le 0$ **nekladná čísla**.

Vlastnosti uspořádání

➥ Pro každá dvě reálná čísla a, b platí právě jeden ze vztahů: $a < b, \quad a = b, \quad a > b.$

➥ Pro každá tři reálná čísla $a,\ b,\ c$ platí:

- Je-li $a < b$ a zároveň $b < c$, pak $a < c$.
- Je-li $a < b$, pak $a + c < b + c$.
- Je-li $a < b$ a zároveň $c > 0$, pak $ac < bc$.

➥ Pro každá čtyři reálná čísla a, b, c, d platí:

- Je-li $a < b$ a zároveň $c < 0$, pak $ac > bc$.
- Je-li $a < b$ a zároveň $c < d$, pak $a + c > b + d$.
- Je-li $0 < a < b$ a zároveň $0 < c < d$, pak $ac < bd$.
- Je-li $0 < a < b$, pak $1/a < 1/b$.

Geometrická reprezentace množiny reálných čísel

Reálná čísla jsme zvyklí znázorňovat pomocí **číselné osy**. To nám umožňuje následující tvrzení:

Tvrzení 2. *Existuje zobrazení množiny **R** na přímku, které má tyto vlastnosti:*

- *Je vzájemně jednoznačné, tj. obrazem každého reálného čísla je právě jeden bod přímky a naopak, každý bod přímky je obrazem právě jednoho reálného čísla.*
- *Jsou-li* $a,\ b,\ c$ *libovolná reálná čísla, pro která platí* $a < b < c$, *pak obraz čísla* b *leží na přímce mezi obrazy čísel* $a,\ c$.

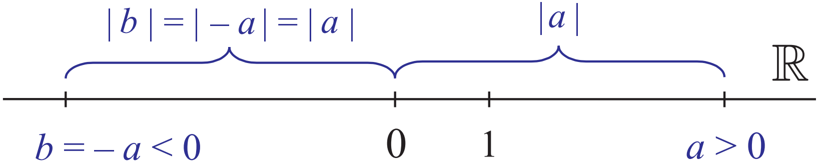
Grafické znázornění reálných čísel na číselné ose

Zvolme přímku x a na ní dva různé body, z nichž jeden prohlásíme za obraz čísla 0, označíme jej stejným symbolem a nazveme jej **počátkem**, druhý zvolíme za obraz čísla 1, označíme jej rovněž symbolem 1 a nazveme jej **jednotkovým bodem**. Přímce x se pak říká **číselná osa**; její poloha se obvykle volí vodorovná a bod 1 se na ní volí vpravo od počátku 0.

Každému reálnému číslu a se na číselné ose přiřazuje bod zvaný **obraz čísla** a, který budeme značit stejně. **Kladné číslo** a se přitom zobrazuje na polopřímku '01' tak, že vzdálenost obrazu od počátku je rovna číslu a (tj. a krát velikost jednotkové úsečky '01'), obraz **záporného čísla** b leží na polopřímce opačné k polopřímce '01' a jeho vzdálenost od počátku 0 je rovna číslu $-b$. Polopřímka '01' se proto nazývá **kladná poloosa** (obvykle je opatřena šipkou), polopřímka opačná k polopřímce '01' se nazývá **záporná poloosa**. Pro jednoduchost se o reálných číslech často hovoří přímo jako o **bodech číselné osy**.

Absolutní hodnota reálného čísla a je definována takto:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{je-li} \quad a \geq 0, \\ -a, & \text{je-li} \quad a < 0. \end{cases}$$



Absolutní hodnota nezáporného čísla je tedy dané číslo samo, absolutní hodnota záporného čísla je číslo k němu opačné.

Vzdálenost reálných čísel

Uvědomme si, že pro libovolná $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

1. $|x - y| \geq 0$,
2. $|x - y| = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
3. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ (trojúhelníková nerovnost).

V grafickém znázornění reálných čísel na číselné ose představuje absolutní hodnota $|\,a\,|$ **vzdálenost obrazu čísla a od počátku**; $|\,a - b\,|$ pak představuje **vzdálenost obrazů čísel $a,\ b$.**

Obecně bychom mohli **vzdálenost** dvou reálných čísel zavést jako libovolnou funkci $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující podmínky 1.–3. Nebude-li však řečeno jinak, budeme vzdáleností rozumět absolutní hodnotu.

Rozšíření množiny reálných čísel o $+\infty$ a $-\infty$

Mnohdy je výhodné rozšířit množinu reálných čísel o dva symboly, $+\infty$ a $-\infty$, pro které platí: $-\infty < x < +\infty$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Takto rozšířenou množinu budeme značit jako $\mathbb{R}^*$ a přirozeně na ni rozšíříme některé algebraické operace:

$$|\pm\infty| = +\infty\,, \qquad \pm\infty + x = \pm\infty \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}\,,$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty\,, \qquad -\infty - (-\infty) = -\infty\,,$$

$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \text{ pro každé } x > 0\,,$$

$$x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \text{ pro každé } x < 0\,,$$

$$\frac{\pm\infty}{x} = \pm\infty \text{ pro } x > 0\,, \qquad \frac{\pm\infty}{x} = \mp\infty \text{ pro } x < 0\,,$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R}\,.$$

Nelze definovat: $+\infty+(-\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$, $0/0$, $\pm\infty/\pm\infty$.

Interval je podmnožina množiny všech reálných čísel, která se na číselné ose zobrazí jako úsečka, polopřímka nebo přímka, přičemž krajní body úsečky a počáteční bod polopřímky k ní mohou, ale nemusí patřit.

- **Interval omezený** (na číselné ose znázorněn **úsečkou**)
  - **Uzavřený:** $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$

  - **Polouzavřený:**

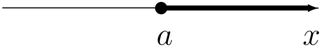
$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$, $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$

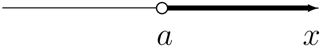
  - **Otevřený:** $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

➥ **Neomezený** (znázorněn přímkou nebo polopřímkou)

➥ **Neomezený zprava:**

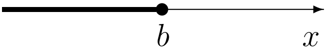
$$\langle a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}\,, \;\; (a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$$

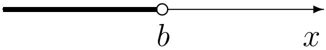




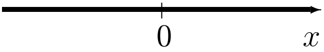
➥ **Neomezený zleva:**

$$(-\infty,b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}\,, \;\; (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$$





➥ **Oboustranně neomezený:** $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$



Množiny reálných čísel a jejich vlastnosti

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá

- **shora omezená**, jestliže existuje $H \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí nerovnost $x \leq H$;
- **zdola omezená**, jestliže existuje $D \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí nerovnost $x \geq D$;
- **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Číslo H se nazývá **horní odhad množiny** M, číslo D se nazývá **dolní odhad množiny** M.

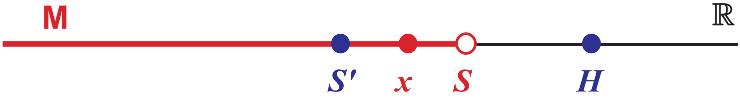
Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $S \in \mathbb{R}$, pro které platí:

1. pro každé $x \in M$ je $x \leq S$,
2. pro každé $S' < S$ existuje $x \in M$ takové, že $x > S'$,

se nazývá **supremum množiny M.**

Supremum množiny je tedy její **nejmenší horní odhad.**

První podmínka říká, že S je horní odhad, druhá podmínka říká, že je ze všech horních odhadů nejmenší, tj. žádné číslo S' menší než supremum není horním odhadem. Supremum S nemusí být prvkem množiny M.



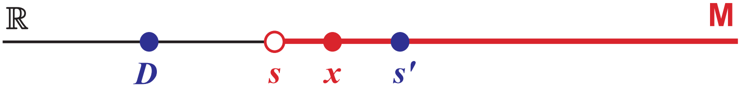
Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $s \in \mathbb{R}$, pro které platí

1. pro každé $x \in M$ je $x \geq s$,
2. pro každé $s' > s$ existuje $x \in M$ takové, že $x < s'$,

se nazývá **infimum množiny M.**

Infimum množiny je tedy její **nejmenší horní odhad.**

První podmínka říká, že s je dolní odhad, druhá podmínka říká, že je ze všech dolních odhadů největší, tj. žádné číslo s' větší než infimum není dolním odhadem. Infimum s nemusí být prvkem množiny M.



Věta o supremu a infimu v $\mathbb{R}$

1. *Pro každou neprázdnou shora omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ existuje právě jedno supremum $S \in \mathbb{R}$.*

2. *Pro každou neprázdnou zdola omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ existuje právě jedno infimum $s \in \mathbb{R}$.*

Poznámka. Povšimněme si, že v množině racionálních čísel uvedená věta neplatí. Stačí uvažovat

$$M = \left\{ q \in \mathbb{Q} \, ; \; q^2 < 2 \right\} \, .$$

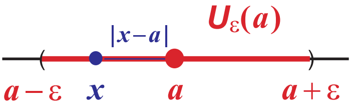
V reálném oboru by bylo supremum $\sqrt{2}$, infimum $-\sqrt{2}$, tato čísla však nejsou racionální.

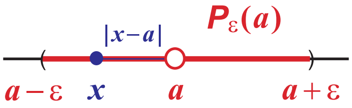
Definice. Nechť $\varepsilon > 0$. **Okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$ se nazývá množina $U_\varepsilon(a)$ všech bodů $x \in \mathbb{R}$, jejichž vzdálenost od bodu a je menší než ε, tj.

$$U_\varepsilon(a) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ |x-a| < \varepsilon\right\}.$$

Definice. **Prstencovým okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$ se nazývá množina $P_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, tj.

$$P_\varepsilon(a) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ 0 < |x-a| < \varepsilon\right\}.$$





Pro $\varepsilon > 0$ definujeme **okolí bodu** $+\infty$ jako

$$U_\varepsilon(+\infty) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ x > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{+\infty\}$$

a **okolí bodu** $-\infty$ jako

$$U_\varepsilon(-\infty) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ x < -\frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{-\infty\}\,.$$

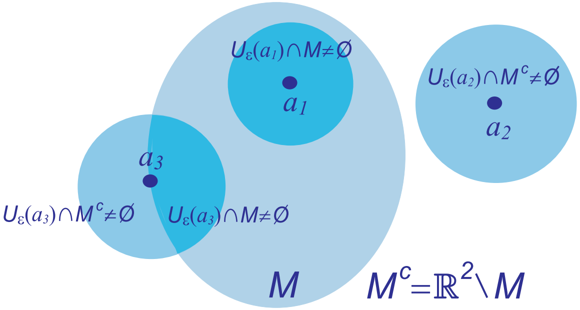
Prstencová okolí je definují bez bodů $\pm\infty$:

$$P_\varepsilon(+\infty) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ x > \frac{1}{\varepsilon}\right\}\,,$$

$$P_\varepsilon(-\infty) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ x < -\frac{1}{\varepsilon}\right\}\,.$$

Definice. Uvažujme množinu $M \subset \mathbb{R}$. Bod a se nazývá

- **vnitřní bod množiny M**, existuje-li okolí $U_\varepsilon(a) \subset M$.
- **vnější bod množiny M**, existuje-li okolí $U_\varepsilon(a)$ takové, že $U_\varepsilon(a) \cap M = \emptyset$.
- **hraniční bod množiny M** má-li každé jeho okolí $U_\varepsilon(a)$ neprázdný průnik jak s množinou M tak jejím doplňkem $M^C = \mathbb{R} \setminus M$.

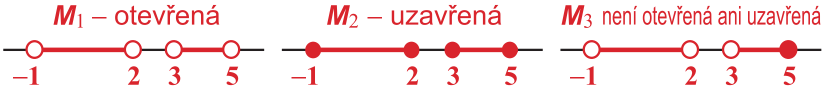


Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá

- ➥ **otevřená** právě tehdy, když je každý její bod jejím vnitřním bodem.
- ➥ **uzavřená** právě tehdy, když je její doplněk $M^C = \mathbb{R} \setminus M$ otevřená množina.

☛ ***Příklad.***

- $M = (-1, 2) \cup (3, 5)$ je otevřená množina.
- $M = \langle -1, 2\rangle \cup \langle 3, 5\rangle$ je uzavřená množina.
- $M = (-1, 2) \cup (3, 5\rangle$ není otevřená ani uzavřená.



Definice. Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá **vnitřek množiny M** a značí se M°.

Definice. **Uzávěrem množiny M** nazýváme doplněk ke vnitřku doplňku množiny M a značíme jej $\overline{M}$, tj. $\overline{M} = \mathbb{R} \setminus \big(\mathbb{R} \setminus M\big)^\circ$.

Definice. **Hranicí množiny M** nazýváme množinu všech jejích hraničních bodů a značíme ji ∂M.

☛ ***Příklad.*** Uvažujme $M = (-1, 2) \cup (3, 5\rangle$.

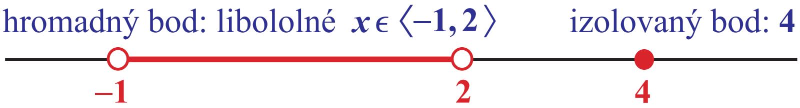
- $M^\circ = (-1, 2) \cup (3, 5)$,
- $\overline{M} = \langle -1, 2\rangle \cup \langle 3, 5\rangle$,
- $\partial M = \{-1, 2, 3, 5\}$.

Definice. Bod x se nazývá

- **hromadný bod** množiny M právě tehdy, když pro každé jeho prstencové okolí $P_\varepsilon(x)$ je $M \cap P_\varepsilon(x) \neq \emptyset$.
- **izolovaný bod** množiny M právě tehdy, když existuje prstencové okolí $P_\varepsilon(x)$ takové, že $M \cap P_\varepsilon(x) = \emptyset$.

☛ ***Příklad.***

$$M = (-1, 2) \cup \{4\}$$



Definice. Uzavřená a omezená množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá **kompaktní**.