

PŘEDNÁŠKA 2

ČÍSELNÉ ŘADY

A JEJICH VLASTNOSTI

Definice. Nechť je dána posloupnost (a_n) . Posloupnost (s_n) , kde $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, se nazývá **posloupnost částečných součtů** posloupnosti (a_n) .

Existuje-li $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, pak s nazveme **součtem řady**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**.

Je-li (s_n) divergentní, nazýváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **divergentní**.

Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm\infty$, říkáme, že řada **diverguje k $\pm\infty$** .

➔ **Příklad.**

(a) Řada $1 + 1 + 1 + \dots$ diverguje k $+\infty$, neboť

$$s_n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-krát}} = n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty.$$

(b) Řada $(-1) + (-1) + (-1) + \dots$ diverguje k $-\infty$, neboť

$$s_n = \underbrace{(-1) + \dots + (-1)}_{n\text{-krát}} = -n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty.$$

(c) Řada $1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$ diverguje (v tomto případě se též říká, že osciluje), neboť částečné součty tvoří posloupnost $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$, která nemá limitu.

☞ **Příklad.** Uvažujme geometrickou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} + \cdots, \quad a_1 \neq 0, \quad q \neq 1.$$

Pro $q \neq 1$ je posloupnost částečných součtů dána vztahem:

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

(a) Je-li $q > 1$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$, řada diverguje k $\pm\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} +\infty & \text{pro } a_1 > 0, \\ -\infty & \text{pro } a_1 < 0. \end{cases}$$

(b) Je-li $|q| < 1$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a_1 \frac{1}{1 - q}$, řada konverguje.

(c) Je-li $q \leq -1$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ neexistuje a řada diverguje.

➡ **Příklad.** Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Protože platí:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

je

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

tedy $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$, řada konverguje.

➔ **Příklad.** Řada

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots$$

konverguje, její součet je roven 0 ($a_n = (1 + (-1)) = 0$).

Vynecháme-li však závorky, získáme řadu divergentní:

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$$

Neboli naopak, přidáním vhodných závorek jsme z divergentní řady získali řadu konvergentní.

Následující věta říká, že součet řady se přidáním závorek nezmění, je-li řada konvergentní či diverguje-li k $\pm\infty$.

Věta. Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, kde s může být $+\infty$ nebo $-\infty$, a $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom je

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}) + \dots \\ \dots + (a_{k_2+1} + a_{k_2+2} + \dots + a_{k_3}) = s.$$

Věta. Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ jsou konvergentní řady, $c, A, B \in \mathbb{R}$. Potom je

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cs, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (Aa_n + Bb_n) = As + Bt.$$

Nutná podmínka konvergence řady:

Věta. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Důkaz. Označme $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Protože řada konverguje, existuje vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. Protože $a_n = s_n - s_{n-1}$, je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Pozor, věta říká, že z konvergence řady plyne nulová limita posloupnosti jejích členů, avšak z nulové limity obecně neplyne konvergence řady!

☞ **Příklad.** Uvažujme tzv. harmonickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Uvažujme takto:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots$$

$$s_2 \geq \frac{1}{2}, \quad s_{2^2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}, \quad s_{2^3} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$s_{2^4} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}, \quad \dots, \quad s_{2^n} \geq \frac{n}{2}, \quad \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = +\infty.$$

Vybraná posloupnost (s_{2^n}) z posloupnosti částečných součtů (s_n) diverguje k $+\infty$.

Protože posloupnost (s_n) je rostoucí, $s_n = s_{n-1} + \frac{1}{n} > s_{n-1}$, její limita existuje, a to konečná nebo $+\infty$, a je rovna limitě jakékoli vybrané posloupnosti. Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty .$$

Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tedy diverguje k $+\infty$, i když je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Řady s nezápornými členy

Věta. Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí nerovnost $0 \leq a_n \leq b_n$, pak

- z konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
- z divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne divergence $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta. Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy.

Pak platí:

1. Jestliže existuje konečná limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in \mathbb{R}$, pak

z konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Jestliže existuje (konečná nebo nekonečná) nenulová

limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$, pak z divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

plyne divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3. Jestliže existuje konečná nenulová limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$, pak

řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ současně konvergují nebo divergují.

Věta (odmocninové kritérium).

Jestliže existuje n_0 takové, že pro všechna $n > n_0$ je

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Jestliže pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $n > n_0$ takové, že

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta (limitní odmocninové kritérium).

Nechť $a_n \geq 0$ a $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = q$. Je-li $q < 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

konverguje; je-li $q > 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta (podílové kritérium).

Nechť je $a_n > 0$. Jestliže existuje n_0 takové, že pro všechna $n > n_0$ je

$$0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Jestliže existuje n_0 takové, že pro všechna $n > n_0$ je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta (limitní podílové kritérium).

Nechť $a_n > 0$ a existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Je-li $q < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je-li $q > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta (Raabeho kritérium).

Nechť $a_n > 0$ a existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = s$. Je-li $s > 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, a je-li $s < 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Alternující řady

Věta (Leibnizovo kritérium pro alternující řady).

Nechť $a_n \geq 0$ je monotonní posloupnost, pro kterou platí

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Pak je řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergentní.

☞ **Příklad**

Podle Leibnizova kritéria konverguje například řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Věta Jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice. Jestliže je konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, nazývá

se řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolutně konvergentní**.

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergentní,

nazývá se řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **neabsolutně konvergentní**.