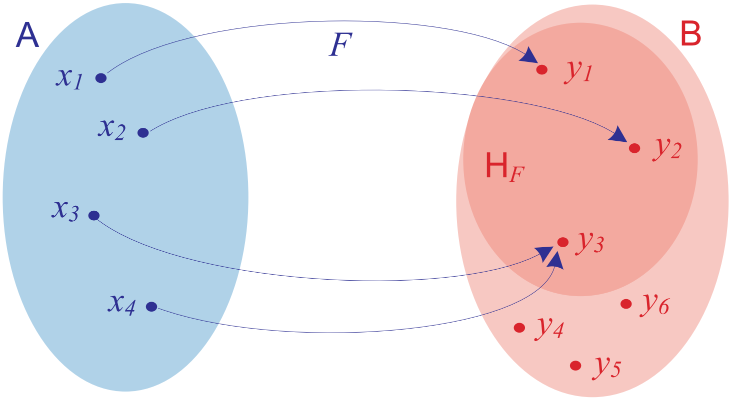
PŘEDNÁŠKA 3

FUNKCE

A JEJICH VLASTNOSTI

Pojem zobrazení a funkce

Uvažujme libovolné neprázdné množiny **A**, **B**. Přiřadíme-li každému prvku $x \in$ **A** **právě jeden** prvek $y \in$ **B**, dostáváme množinu F uspořádaných dvojic $(x, y) \in$ **A** $\times$ **B**, která se nazývá **zobrazení množiny A do množiny B**.



Prvku x se říká **vzor** prvku y, prvku y se říká **obraz** prvku x v zobrazení F; rovněž se používá vyjádření, že y je **hodnota zobrazení** F v bodě x a píše se $y = F(x)$ nebo $x \mapsto F(x)$. Množina **A** se nazývá **definiční obor zobrazení** F a označuje také symbolem $\mathbf{D}(F)$ či $\mathbf{D}_F$. Množina všech obrazů v zobrazení F se nazývá **obor hodnot zobrazení** F a označuje se $\mathbf{H}(F)$ či $\mathbf{H}_F$; platí: $\mathbf{H}(F) \subset \mathbf{B}$. Symbolicky se zobrazení F množiny **A** do množiny **B** zapisuje takto:

$$F: \ \mathbf{A} \to \mathbf{B}, \quad \mathbf{D}(F) = \mathbf{A}$$

Speciální případy zobrazení F množiny A do množiny B

- **Zobrazení v množině A** nebo **zobrazení množiny A do sebe** je zobrazení F, kde $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

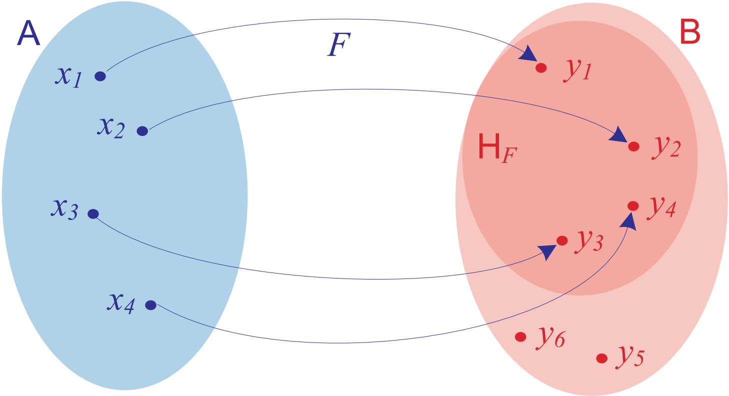
  Sem patří:

  - **Reálná funkce jedné reálné proměnné** je zobrazení v množině všech reálných čísel **R**, tj.

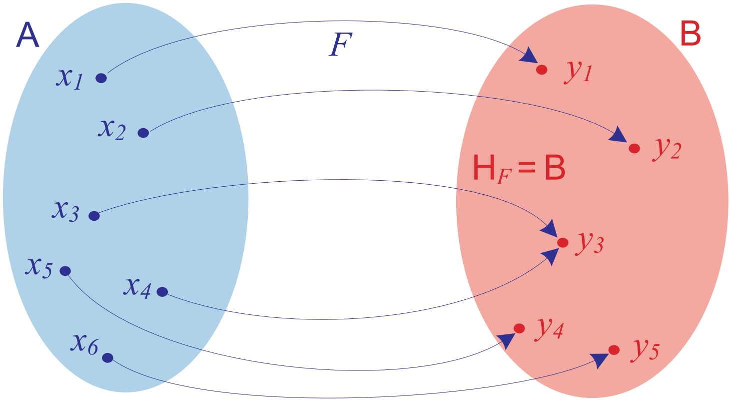
    $$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbb{R}.$$

  - **Geometrická zobrazení v rovině a v prostoru**, kde **A**, **B** jsou množiny bodů v téže rovině, popř. v prostoru.

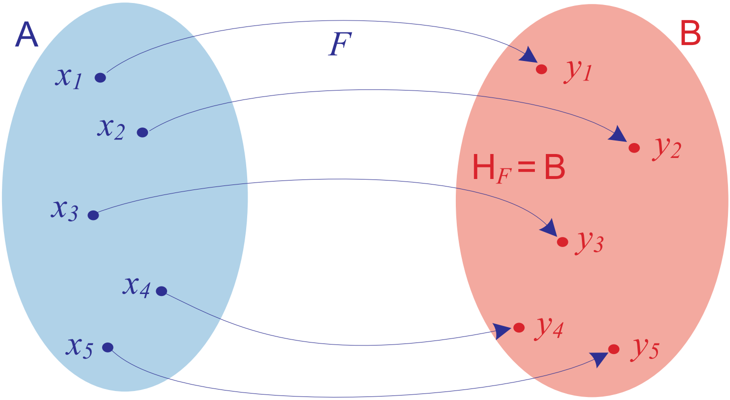
➥ **Prosté zobrazení** je takové zobrazení F, ve kterém je každý prvek $y \in \mathbf{H}(F)$ obrazem **právě jednoho** prvku $x \in \mathbf{A} = \mathbf{D}(F)$, neboli **každé dva různé vzory** x_1, x_2 **mají také různé obrazy** $F(x_1)$, $F(x_2)$.



➥ **Zobrazení množiny A na množinu B** je takové zobrazení F, ve kterém je každý prvek množiny **B** obrazem aspoň jednoho prvku množiny **A**, tj. $\mathbf{B} = \mathbf{H}(F)$.

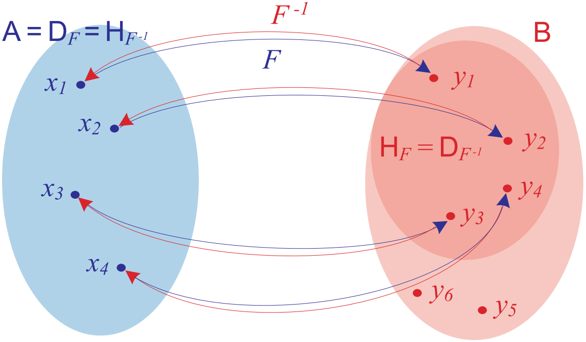


➥ **Vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami A**, **B** je **prosté zobrazení množiny A na množinu B**.

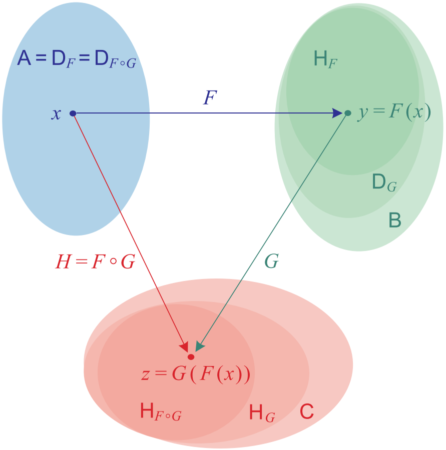


Je-li dané zobrazení F **prosté**, pak k němu existuje právě jedno prosté zobrazení, které ke každému prvku $y \in \mathbf{H}(F)$ přiřazuje jeho vzor $x \in \mathbf{D}(F)$; toto zobrazení se nazývá **inverzní zobrazení k zobrazení** F a značí se symbolem F^{-1}. Platí: $\mathbf{D}(F^{-1}) = \mathbf{H}(F)$, $\mathbf{H}(F^{-1}) = \mathbf{D}(F)$,

$$x = F^{-1}(y) \text{ právě když } y = F(x)$$



Nechť G a F jsou dvě zobrazení, pro která je $\mathbf{H}_F \subset \mathbf{D}_G$. Zobrazení H se nazývá **kompozicí zobrazení F a G**, je-li $H(x) = G(F(x))$ pro všechna $x \in \mathbf{D}_F$. Kompozice zobrazení F a G (v tomto pořadí) se symbolicky zapisuje $H = F \circ G$.



Reálná funkce jedné reálné proměnné

Jak je uvedeno v předchozí části, **reálnou funkcí jedné reálné proměnné** se rozumí zobrazení v množině všech reálných čísel **R**; reálnou funkci budeme zpravidla značit f, vzor x se nazývá **proměnná** nebo **argument funkce** f, obraz y se nazývá **funkční hodnota** nebo **hodnota funkce** f v bodě x a značí se $f(x)$.

Názornou představu o vlastnostech funkce poskytuje její **grafické vyjádření** neboli **graf funkce**, který sestrojíme takto:

V rovině zvolíme pravoúhlou soustavu souřadnic s počátkem O a osami x, y. Pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ přiřadíme v této rovině každé uspořádané dvojici reálných čísel $[x, f(x)]$ bod, který má (v uvedeném pořadí) souřadnice $(x, f(x))$. Množina všech takových bodů roviny se nazývá **graf funkce** f :

$$\text{graf } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbf{D}(f),\ y = f(x)\}$$

Obsahuje-li definiční obor $\mathbf{D}(f)$ konečný počet hodnot argumentu x, můžeme sestrojit celý graf přesně, bod po bodu. Obsahuje-li však definiční obor dané funkce nekonečně mnoho hodnot, je nutné graf přibližně dokreslit. Ke správnému nakreslení grafu jsou nezbytné znalosti různých vlastností funkce. Proto se v následujícím podíváme na základní elementární funkce a u každé z nich si připomeneme její **analytické zadání**, tj. **vzorec** či rovnici tvaru $y = f(x)$, kde $f(x)$ je výraz s proměnnou x, a příslušné **grafické zobrazení**.

Vlastnosti a druhy funkcí

Některé funkce mají určité společné vlastnosti, podle kterých je nazýváme. Nejdůležitější z nich jsou následující:

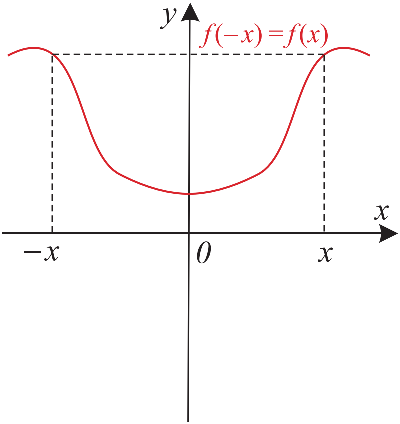
- **Funkce sudé a liché**

  Nechť má funkce f takovou vlastnost, že pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je také $-x \in \mathbf{D}(f)$

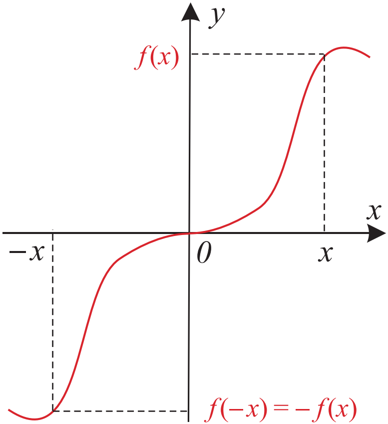
  - Funkce f se nazývá **sudá funkce**, právě když pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je $f(-x) = f(x)$.
  - Funkce f se nazývá **lichá funkce**, právě když pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je $f(-x) = -f(x)$.

  (Funkce samozřejmě nemusí splňovat ani jednu z podmínek, tedy nemusí být ani sudá, ani lichá.)

Funkce sudá:

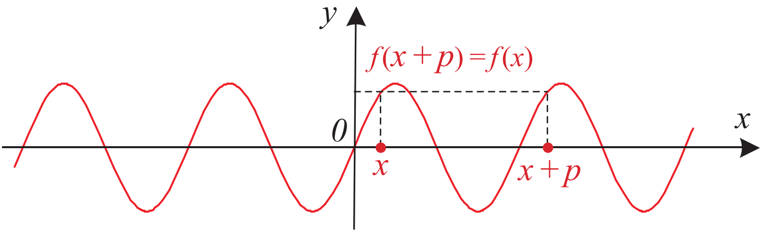


Funkce lichá:



➥ Funkce periodické

Funkce f se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové reálné číslo $p \neq 0$, že pro každé $x \in$ **D**(f) je také $x \pm p \in$ **D**(f) a platí: $f(x \pm p) = f(x)$.



➥ Funkce prosté a funkce k nim inverzní

Protože funkce je speciálním případem zobrazení, použije se pro ni stejná definice jako pro prosté zobrazení a zobrazení k němu inverzní – viz výše.

- **Funkce omezené, zdola omezené, shora omezené**
  Uvažujme funkci f a podmnožinu **M** jejího definičního oboru **D**(f).

  - Funkce f se nazývá **zdola omezená na množině M**, právě když existuje takové číslo $d \in$ **R**, že pro všechna $x \in$ **M** je $f(x) \geq d$.
  - Funkce f se nazývá **shora omezená na množině M**, právě když existuje takové číslo $h \in$ **R**, že pro všechna $x \in$ **M** je $f(x) \leq h$.
  - Funkce f se nazývá **omezená na množině M**, právě když je zdola i shora omezená na **M**.
    Je-li funkce f omezená na celém definičním oboru, budeme říkat, že **funkce je omezená**, totéž platí pro pojmy zdola a shora omezená.

➥ Funkce monotónní

Uvažujme funkci f a podmnožinu $\mathbf{M} \subset \mathbf{D}(f)$.

- ➥ Funkce f se nazývá **rostoucí na množině M**, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.
- ➥ Funkce f se nazývá **klesající na množině M**, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.
- ➥ Funkce f se nazývá **neklesající na množině M**, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- ➥ Funkce f se nazývá **nerostoucí na množině M**, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Rostoucí a klesající funkce se souhrnně nazývají **ryze monotónní** (na dané množině); neklesající a nerostoucí se souhrnně nazývají **monotónní** (na dané množině).

Definice. Řekneme, že funkce f má bodě $x_0 \in \mathbf{D}(f)$

- **maximum**, jestliže pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ platí:

$$f(x_0) \geq f(x)\,,$$

- **minimum** , jestliže pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ platí:

$$f(x_0) \leq f(x)\,.$$

Maxima a minima funkce nazýváme **extrémy (globální)**.

Definice. Nechť je $I \subset \mathbb{R}$ interval, $f : I \to \mathbb{R}$. Jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, kde $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $A = [x_2, y]$ přímky procházející body $\left[x_1; f(x_1)\right]$ a $\left[x_3; f(x_3)\right]$

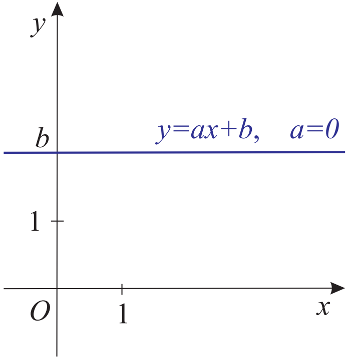
- ➥ nad bodem grafu funkce $[x_2, f(x)]$, nazývá se funkce f **konvexní na intervalu** I,
- ➥ pod bodem grafu funkce $[x_2, f(x)]$, nazývá se funkce f **konkávní na intervalu** I.

Základní elementární funkce

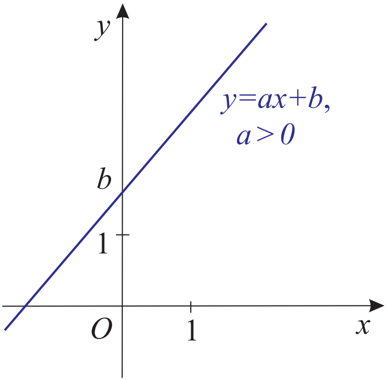
Lineární funkce

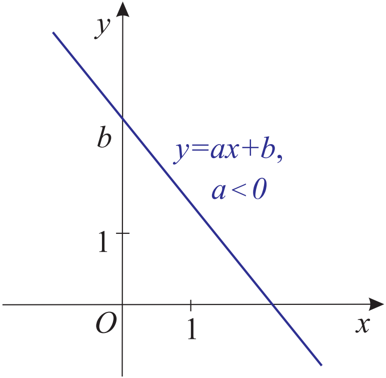
Lineární funkcí nazýváme každou funkci

$$f:\ y = ax + b, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}.$$



$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathbf{H}(f) = \{b\}$, nerostoucí a neklesající, není prostá





$$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R},\ \mathbf{H}(f) = \mathbb{R}$$

není ani shora, ani zdola omezená

rostoucí	klesající
prostá	prostá

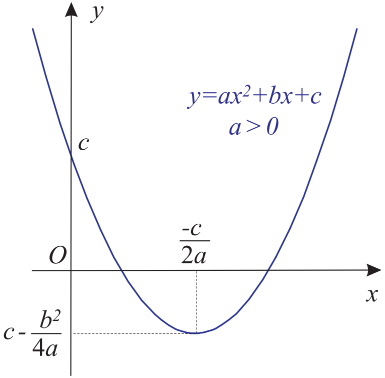
Kvadratická funkce

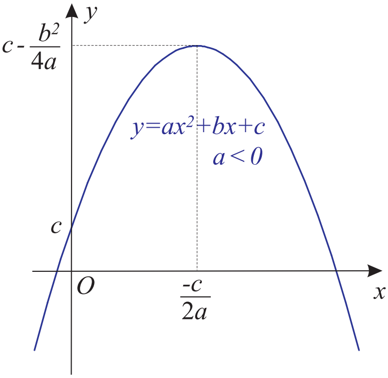
Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci

$$f: \ y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}.$$

Grafem každé kvadratické funkce je **parabola**, která je souměrná podle osy o rovnoběžné s osou y.

Průsečíku osy paraboly s parabolou se říká **vrchol paraboly** a přímce kolmé k ose paraboly, procházející jejím vrcholem, se říká **vrcholová tečna paraboly**.





$\mathbf{D}(f)=\mathbb{R}$, $\mathbf{H}(f)=\left\langle c-\dfrac{b^2}{4a},+\infty\right)$

zdola omezená, není shora omezená

klesající v $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right\rangle$

rostoucí v $\left\langle-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$

$\mathbf{D}(f)=\mathbb{R}$, $\mathbf{H}(f)=\left(-\infty,c-\dfrac{b^2}{4a}\right\rangle$

shora omezená, není zdola omezená

rostoucí v $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right\rangle$

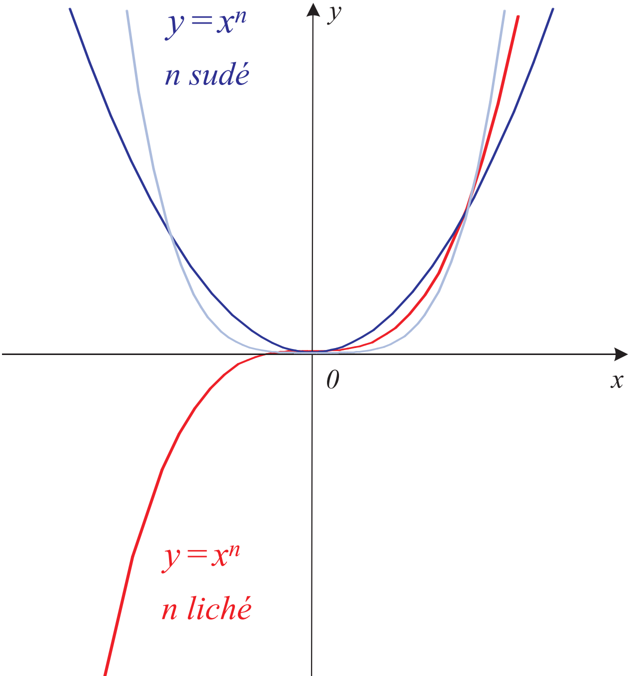
klesající v $\left\langle-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$

Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem

Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem je funkce

$$f: \ y = x^n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}.$$

Je-li speciálně $n = 1$, jedná se o lineární funkci; je-li $n = 2$ je to funkce kvadratická. Pro $n > 1$ je grafem této mocninné funkce **parabola n-tého stupně**:



$y = x^n$
n sudé
y
0
x
$y = x^n$
n liché

Pomocí algebraických operací násobení číslem a sčítaní funkcí $f(x) = x^n$ získáme *polynomy*.

Polynomem nazýváme funkci $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{R}.$$

Není-li polynom identicky roven nule, existuje největší n takové, že $a_n \neq 0$. Toto n nazýváme **stupeň** polynomu. V dalším budeme předpokládat, že je polynom $P(x)$ nenulový a že má stupeň n.

Nulovým bodem neboli **kořenem** polynomu P se rozumí bod $x_0 \in \mathbb{R}$, pro který

$$P\big(x_0\big) = 0.$$

Je-li x_1 nulový bod polynomu $P(x)$ stupně n, ze psát

$$P(x) = (x - x_1) P_1(x),$$

kde $P_1(x)$ je polynom stupně $(n-1)$. Má-li polynom $P_1(x)$ kořen x_2, je $P_1(x) = (x - x_2)P_2(x)$, a tedy

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)P_2(x),$$

kde $P_2(x)$ je polynom stupně $(n-2)$. Jestliže pokračujeme uvedeným postupem dostaneme nulové body x_1, x_2, ..., x_N, z nichž se některé mohou vyskytovat vícekrát. Polynom $P(x)$ lze pak zapsat ve tvaru

$$P(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r} P_N(x),$$

kde x_1, ..., x_r jsou navzájem různé kořeny polynomu $P(x)$, přirozená čísla k_i se nazývají *násobnost kořene* x_i a platí pro ně $N = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$, a $P_N(x)$ je polynom stupně $(n - N)$, který nemá reálné kořeny.

Obecně lze libovolný polynom stupně n zapsat ve tvaru

$$P(x) = a_n\big(x - x_1\big)^{k_1}\big(x - x_2\big)^{k_2} \dots \big(x - x_r\big)^{k_r}\big(x^2 + p_1 x + q_1\big)^{m_1} \\ \big(x^2 + p_2 x + q_2\big)^{m_2} \dots \big(x^2 + p_s x + q_s\big)^{m_s},$$

kde polynomy $x^2 + p_i x + q_i$ nemají reálný kořen a

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r + 2m_1 + \cdots + 2m_s = n.$$

Lineární lomené funkce jsou funkce tvaru

$$f: \; f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{kde} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Je-li $c = 0$, jedná se o lineární funkci. Proto budeme dále předpokládat, že $c \neq 0$. Protože rovnost $cx + d = 0$ platí pouze pro $x = -\dfrac{d}{c}$, je definiční obor lineární lomené funkce

$\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Lineární lomenou funkci lze upravit na tvar

$$f(x) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} \, \frac{1}{x + d/c} \, .$$

Tedy pro $ad - bc = 0$ je tato funkce rovna konstantní funkci. Proto budeme navíc předpokládat, že $ad - bc \neq 0$. Obecnou lineární lomenou funkci lze získat také složením tří jednodušších funkcí $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, kde f_1 je lineární funkce $f_1(x) = x + \frac{d}{c}$, funkce $f_2 = \frac{1}{x}$ a funkce f_3 je opět lineární funkce $f_3(x) = -\frac{ad - bc}{c^2}\, x + \frac{a}{c}$. Z těchto funkcí jsme podrobněji nepopsali pouze funkci $f_2(x) = \frac{1}{x}$. Tato funkce vyjadřuje vztah nepřímé úměry mezi x a y. Je definována na intervalech $(-\infty, 0)$, kde je klesající a na intervalu $(0, +\infty)$ kde je také klesající. Ale je třeba upozornit, že tato funkce není klesající na celém svém definičním oboru. Funkce je lichá a její graf je rovnoosá *hyperbola* se středem v počátku, jejíž asymptoty jsou souřadnicové osy.

Je-li $ad - bc > 0$ je obecná lineární lomená funkce $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ klesající na intervalech $(-\infty, -d/c)$ a $(d/c, +\infty)$. Je-li $ad - bc < 0$ je funkce na těchto intervalech rostoucí. Grafem je hyperbola se středem v bodě $\left[-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right]$, jejíž asymptoty jsou přímky $x = -\dfrac{d}{c}$ a $y = \dfrac{a}{c}$. Graf funkce protíná osu Ox v bodě $x = -\dfrac{b}{a}$ a osu Ox v bodě $y = \dfrac{b}{d}$.

Lineární lomená funkce $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ je prostá a její inverzní funkce je opět lineární lomená funkce $y = \dfrac{dx - b}{-cx + a}$.

Racionální funkce jsou funkce tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \ ,$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy.
Označíme-li X_0 množinu všech reálných nulových bodů polynomu $Q(x)$, je definiční obor $D_f = \mathbb{R} \setminus X_0$.
Je-li stupeň polynomu $P(x)$, n, větší nebo roven stupni m polynomu $Q(x)$, lze dělením zjistit, že tuto funkci je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $P_1(x)$ je polynom stupně $(n-m)$ a stupeň polynomu $Q(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$.
Funkci $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde je stupeň polynomu$P(x)$ menší

než stupeň polynomu $Q(x)$, lze zapsat jako součet jednodušších racionálních funkcí. Předpokládejme, že

$$q(x) = \big(x - x_1\big)^{k_1} \big(x - x_2\big)^{k_2} \cdots$$
$$\cdots \big(x - x_r\big)^{k_r} \big(x^2 + p_1 x + q_1\big)^{m_1} \ldots \big(x^2 + p_s x + q_s\big)^{m_s},$$

kde dvojčleny $x^2 + p_i x + q_i$ nemají reálné kořeny, tj. platí $p_i^2 - 4q_i < 0$. Pak lze racionální funkci $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ psát ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{\left(x-x_1\right)^2} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{\left(x-x_1\right)^{k_1}} + \\
& + \frac{A_{21}}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_{2k_2}}{\left(x-x_2\right)^{k_2}} + \cdots + \frac{A_{r1}}{x-x_r} + \cdots + \frac{A_{rk_r}}{\left(x-x_r\right)^{k_r}} \\
& + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2} + \cdots + \frac{B_{1m_1}x + C_{1m_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}} \\
& + \cdots + \\
& + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2+p_sx+q_s} + \frac{B_{s2}x + C_{s2}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^2} + \cdots + \frac{B_{sm_s}x + C_{sm_s}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{m_s}}
\end{aligned}
$$

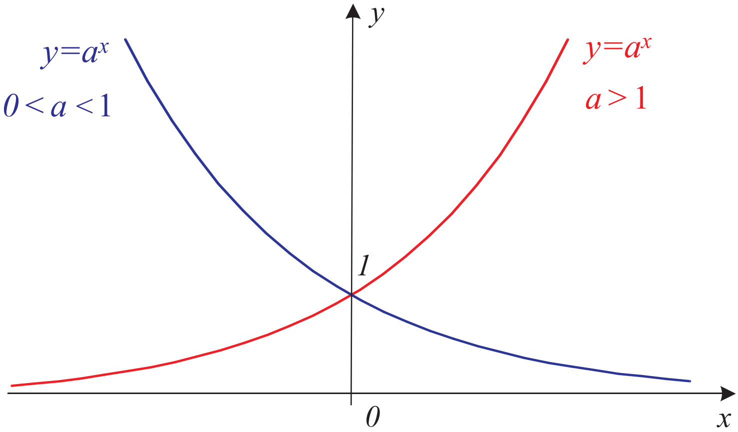
Tomuto zápisu se říká **rozklad na parciální zlomky**.

Exponenciální funkce o základu *a*

Exponenciální funkce o základu *a* je funkce

$$f:\ y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad D(f) = \mathbb{R}.$$

Je-li základ $a > 1$, je funkce a^x rostoucí v $\mathbb{R}$, je-li $0 < a < 1$, je klesající v $\mathbb{R}$; v obou případech je prostá v celém definičním oboru.



y
y=a^x
0 < a < 1
y=a^x
a > 1
1
0
x

Logaritmická funkce o základu *a*

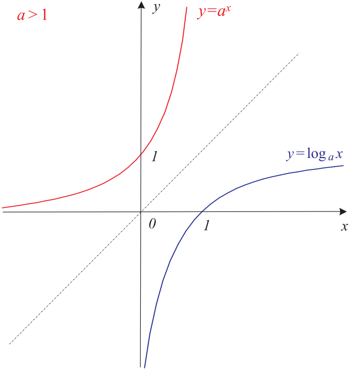
Logaritmická funkce o základu *a* je zavedena jako funkce **inverzní k exponenciální funkci o témže základu** a. Symbolicky se zapisuje takto:

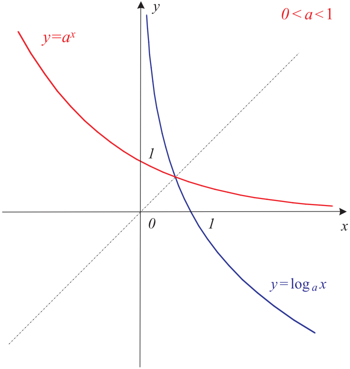
$$f:\ y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad D(f) = (0, +\infty),$$

přičemž podle definice pro každé $x \in (0, +\infty),\ y \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$ platí:

$$y = \log_a x \ \Leftrightarrow\ x = a^y$$

Je-li základ $a > 1$, je funkce $\log_a x$ rostoucí v $\mathbb{R}$, je-li $0 < a < 1$, je klesající v $\mathbb{R}$; v obou případech je prostá v celém definičním oboru.


a > 1
y
y=a^x
1
y=log_a x
0
1
x


y
0 < a < 1
y=a^x
1
0
1
y=log_a x
x

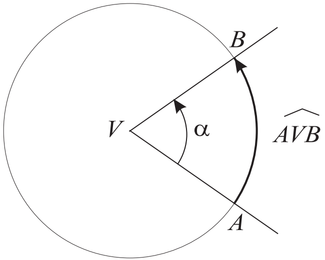
Goniometrické funkce

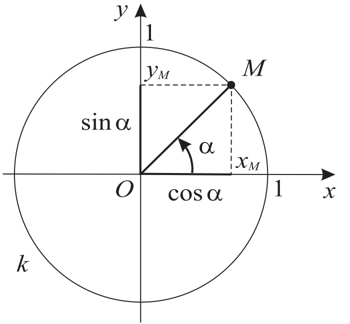
Připomeňme si nejprve pojem **orientovaného úhlu** a jeho **velikosti**. Orientovaným úhlem se rozumí uspořádaná dvojice polopřímek VA, VB se společným počátkem. První z této dvojice se nazývá **počátečním ramenem orientovaného úhlu**, druhá **koncovým ramenem orientovaného úhlu**; společný počátek obou polopřímek se nazývá **vrchol orientovaného úhlu**. Pro orientovaný úhel se používá označení $\widehat{AVB}$. **Velikostí orientovaného úhlu** $\widehat{AVB}$ se nazývá každé z reálných čísel $\alpha + 2k\pi$ (v obloukové míře), resp. $\alpha + k \cdot 360°$ (v míře stupňové), kde $k \in \mathbb{Z}$ a α se určí takto:

a) Je-li $VA = VB$, je $\alpha = 0$,

b) Je-li $VA \neq VB$, je α velikost neorientovaného úhlu, který vznikne otočením počátečního ramene VA do polohy koncového ramene VB v **kladném smyslu**, tj. proti směru hodinových ručiček.

Je tedy $0 \leq \alpha < 2\pi$, resp. $0° \leq \alpha < 360°$; této velikosti se říká **základní velikost orientovaného úhlu.**





Zvolme kartézskou soustavu souřadnic Oxy. Ke každému reálnému číslu α lze přiřadit právě jeden orientovaný úhel velikosti α (v obloukové míře), jehož počáteční rameno je polopřímka OI, kde I je obraz čísla 1 na ose x (místo I budeme v grafu psát přímo číslo 1); říká se mu **orientovaný úhel v základní poloze**. Sestrojíme jednotkovou kružnici k (tj. kružnici o poloměru 1) se středem O, její průsečík s koncovým ramenem orientovaného úhlu α v základní poloze označíme M.

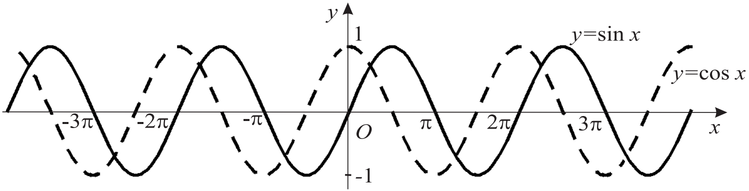
Definujeme

Druhou souřadnici bodu M jednotkové kružnice na koncovém rameni orientovaného úhlu α v základní poloze nazýváme **sinus úhlu** α a jeho první souřadnici nazýváme **kosinus úhlu** α; značíme je $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

$$\sin\alpha = y_M, \qquad \cos\alpha = x_M \qquad \text{pro každé } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Těmito vztahy je každému reálnému číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřazeno právě jedno reálné číslo $\sin x$ a právě jedno reálné číslo $\cos x$, tj. tyto vztahy udávají funkční předpisy **funkce sinus** a **funkce kosinus**:

$$f:\ y = \sin x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}, \qquad\qquad f:\ y = \cos x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}.$$



Důležité je zejména to, že funkce sinus je lichá, funkce kosinus sudá a obě funkce jsou **periodické s periodou** 2π. Obě jsou rovněž omezené:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \qquad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

Ihned z definice také plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\sin x = 0 \quad \text{právě když je} \quad x = k\pi = 2k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \quad \text{právě když je} \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}$$

Pro libovolné reálné číslo x platí:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Funkce $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ jsou zavedeny vztahy:

$$f:\ y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$f:\ y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}.$$

Nejdůležitější hodnoty goniometrických funkcí můžeme shrnout do tabulky:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.	0
$\operatorname{cotg}\alpha$	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	není def.	0	není def.

Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou zavedeny jako inverzní funkce k funkcím goniometrickým. Protože funkce inverzní existuje jen pro prostou funkci a jak víme, goniometrické funkce nejsou prosté, je vždy nejprve třeba omezit definiční obor na interval, na němž je daná goniometrická funkce prostá.

Funkce arkussinus,

$$f:\ y = \arcsin x, \quad \mathbf{D}(f) = \langle -1, 1\rangle,$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\sin x$ na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Je tedy určena vztahem

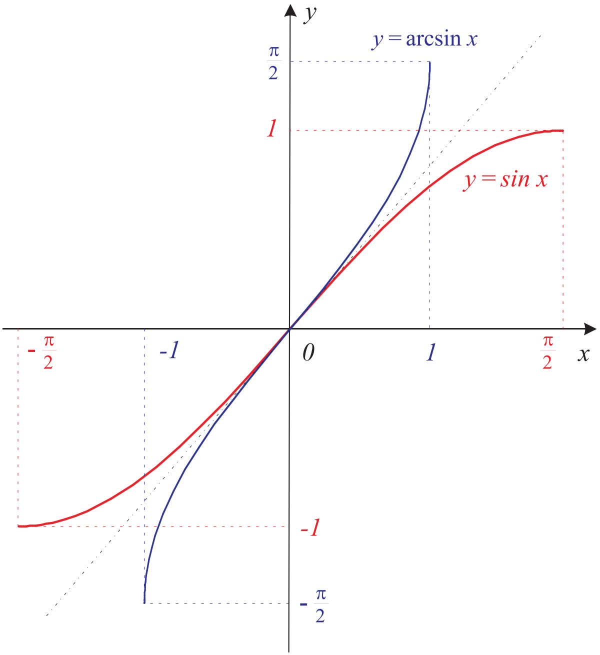
$$y = \arcsin x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sin y, \quad y \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle.$$

Funkce arkuscosinus,

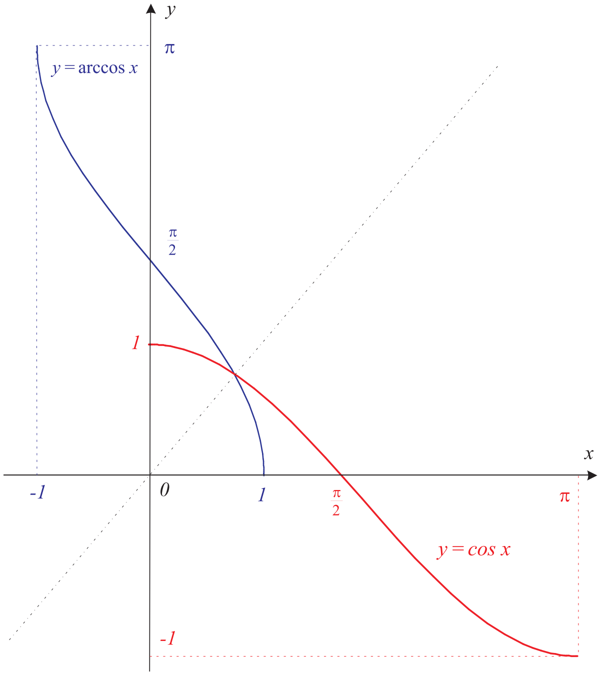
$$f:\ y = \arccos x, \quad \mathbf{D}(f) = \langle -1, 1\rangle,$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\cos x$ na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Je tedy určena vztahem

$$y = \arccos x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \cos y, \quad y \in \langle 0, \pi\rangle.$$



y
y = arcsin x
π/2
1
y = sin x
-π/2
-1
0
1
π/2
x
-1
-π/2



y
π
y = arccos x
π/2
1
x
-1
0
1
π/2
π
y = cos x
-1

Funkce arkustangens,

$$f:\ y = \operatorname{arctg} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}\,,$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\operatorname{tg} x$ na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Je tedy určena vztahem

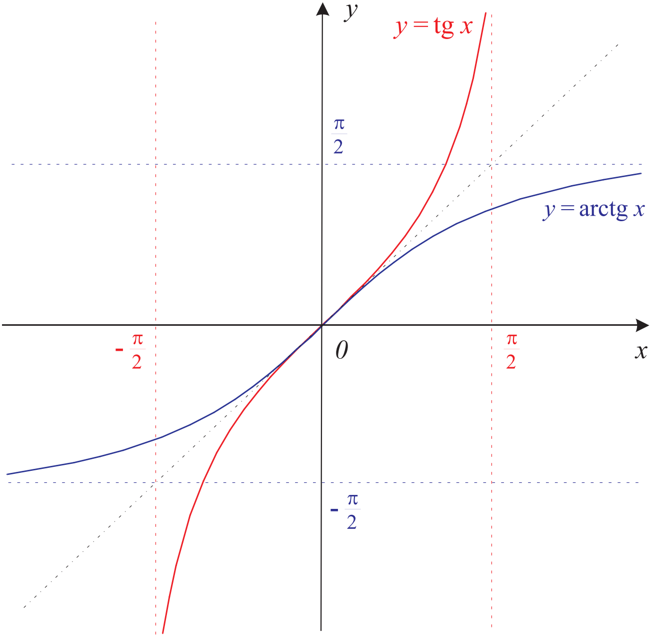
$$y = \operatorname{arctg} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{tg} y, \quad y \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle.$$

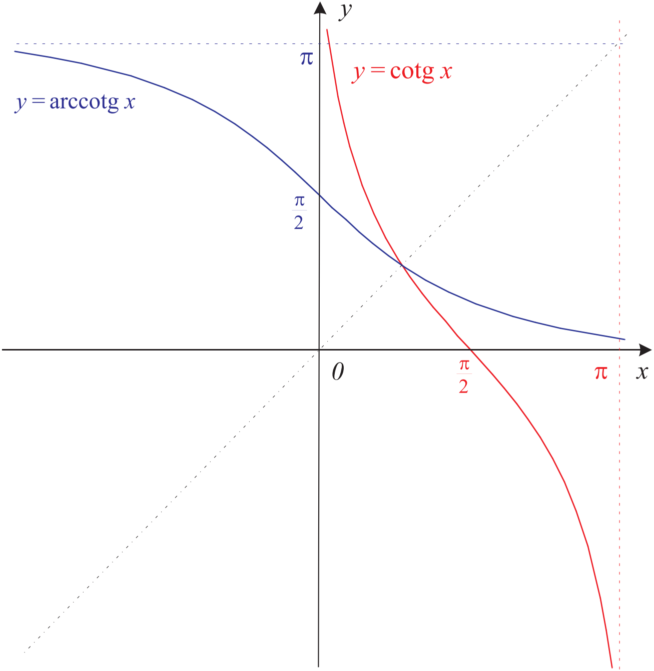
Funkce arkuskotangens,

$$f:\ y = \operatorname{arccotg} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}\,,$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\operatorname{cotg} x$ na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Je tedy určena vztahem

$$y = \operatorname{arccotg} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{cotg} y, \quad y \in \langle 0, \pi\rangle.$$


y
y = tg x
π/2
y = arctg x
- π/2
0
π/2
x
- π/2



y
π
y = cotg x
y = arccotg x
π/2
0
π/2
π
x

Hyperbolické funkce

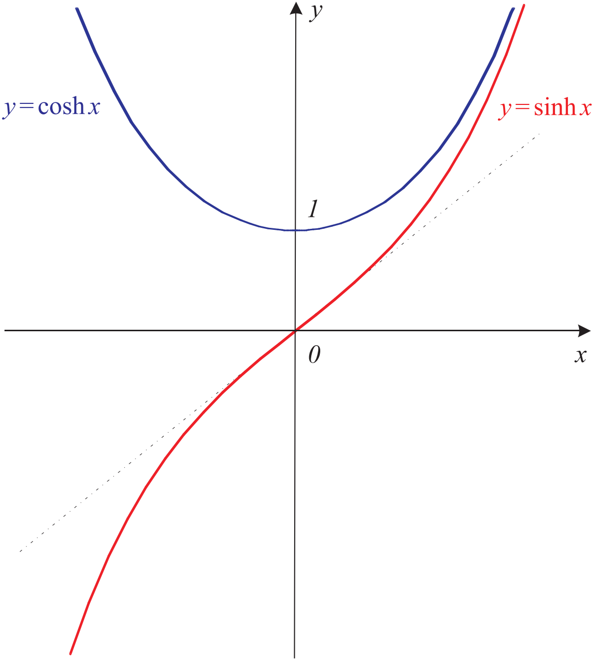
Funkce **sinus hyperbolický a kosinus hyperbolický**,

$$f:\ y = \sinh x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

$$f:\ y = \cosh x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

jsou definované vztahy

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$


y
y = cosh x
y = sinh x
1
0
x

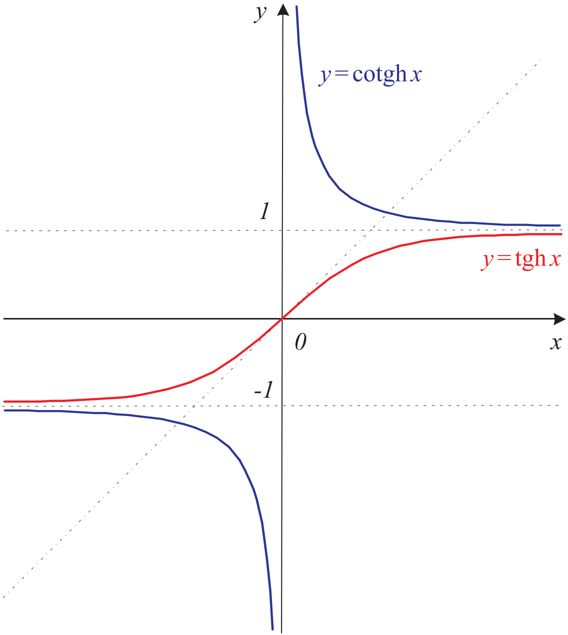
Funkce **tangens hyperbolický a kotangens hyperbolický**,

$$f:\ y = \operatorname{tgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

$$f:\ y = \operatorname{cotgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

jsou definované vztahy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}, \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$$


y
y = cotgh x
1
y = tgh x
0
x
-1

Z definičních vztahů plyne, že pro $\sinh x$ a $\cosh x$ platí:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y\,.$$

Hyperbolometrické funkce

Funkce **argument sinus hyperbolický**,

$$f:\ y = \operatorname{argsinh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci sinus hyperbolický:

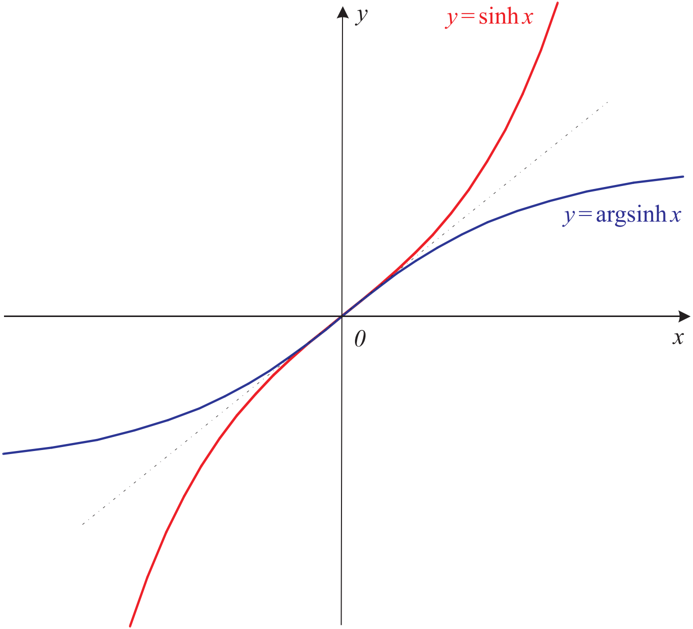
$$y = \operatorname{argsinh} x \iff x = \sinh y, \quad y \in \mathbb{R},$$

Funkce **argument kosinus hyperbolický**,

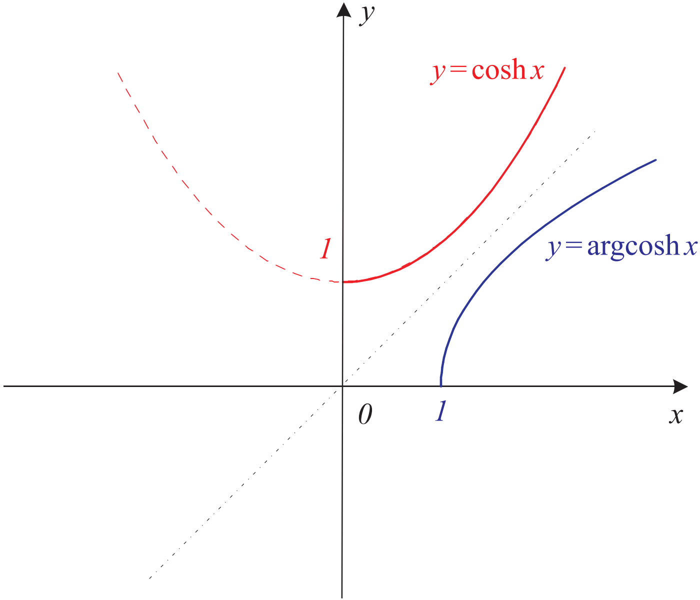
$$f:\ y = \operatorname{argcosh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \langle 1, \infty),$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci kosinus hyperbolický:

$$y = \operatorname{argcosh} x \iff x = \cosh y, \quad y \in \langle 0, \infty)$$



y
y = sinh x
y = argsinh x
0
x



y
y = cosh x
1
y = argcosh x
0
1
x

Funkce **argument tangens hyperbolický**,

$$f:\ y = \operatorname{tgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = (-1, 1),$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci tangens hyperbolický:

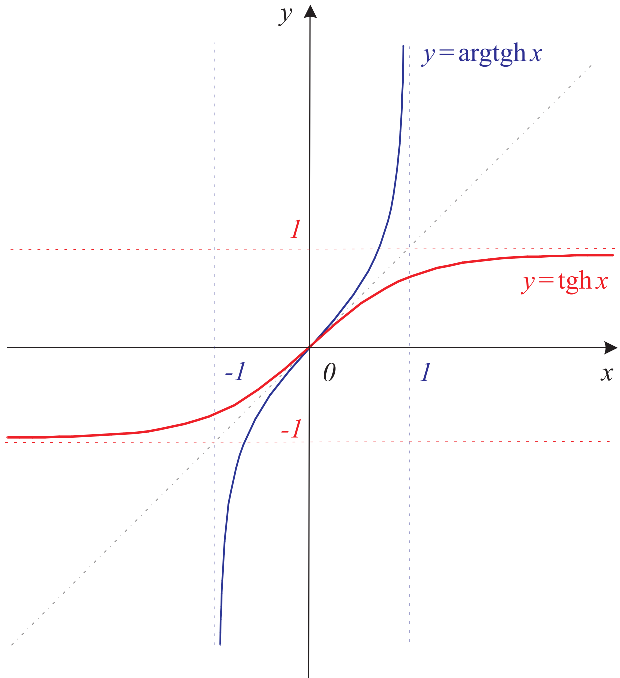
$$y = \operatorname{argtgh} x \iff x = \operatorname{tgh} y, \quad y \in \mathbb{R}$$

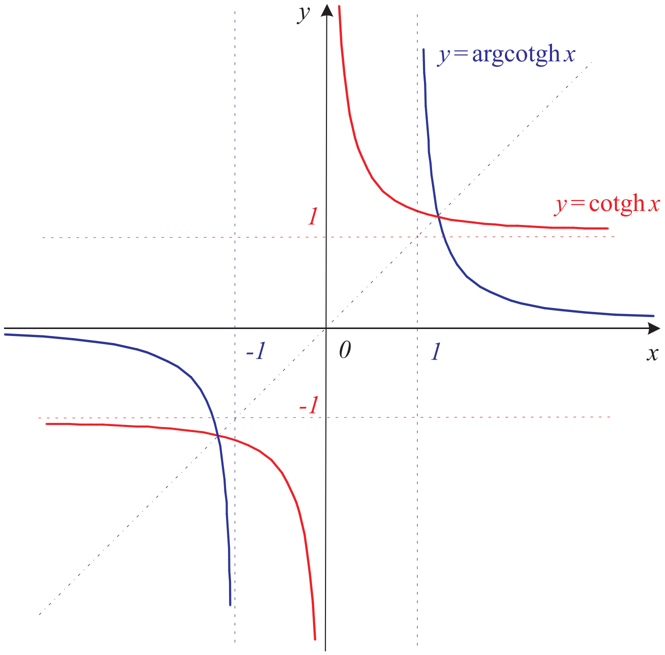
Funkce **argument kotangens hyperbolický**,

$$f:\ y = \operatorname{cotgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$$

je definovaná vztahem

$$y = \operatorname{argcotgh} x \iff x = \operatorname{cotgh} y, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$


y
y = argtgh x
1
y = tgh x
-1
0
1
x
-1



y
y = argcotgh x
y = cotgh x
1
-1
0
1
x
-1