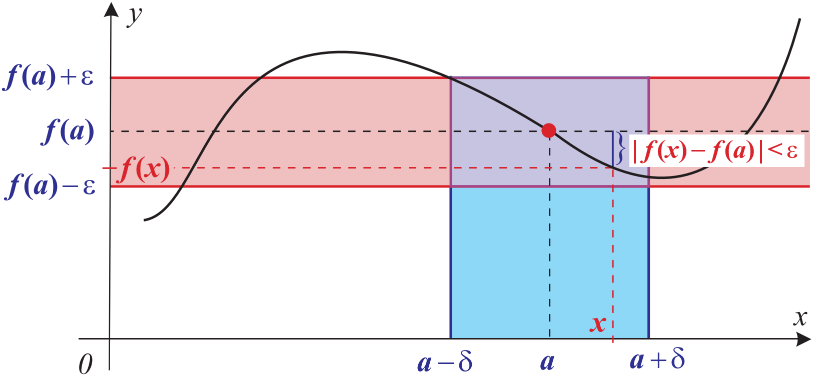
PŘEDNÁŠKA 4

LIMITA A SPOJITOST FUNKCE

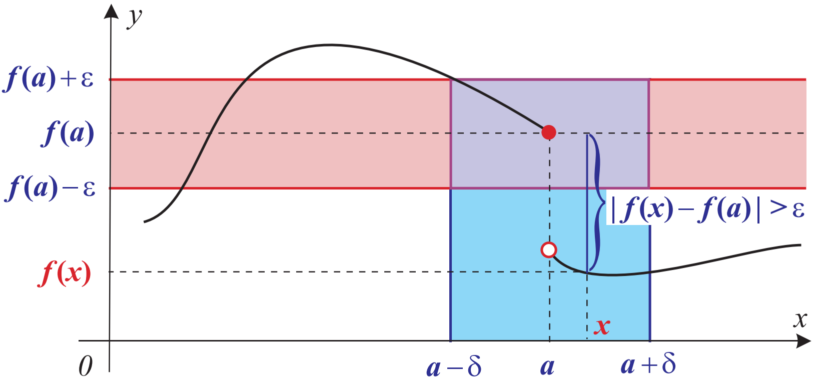
Definice. **Spojitost funkce.**
Řekneme, že funkce $f(x)$ je **spojitá** v bodě $a \in D_f$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D_f$ platí nerovnost:

$$\left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon.$$



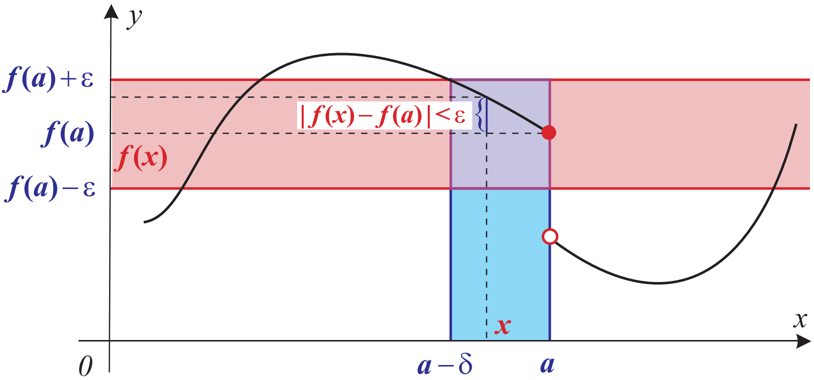
Následující funkce není spojitá, neboť pro uvedenou hodnotu ε existuje v každém okolí bodu a takový bod x, pro který je

$$\left|f(x) - f(a)\right| > \varepsilon.$$



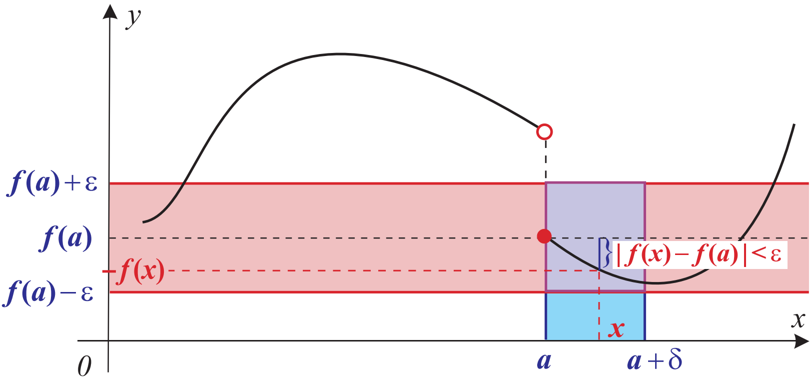
Definice. Řekneme, že funkce $f(x)$ je **spojitá zleva** v bodě $a \in D_f$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (a-\delta, a\rangle \cap D_f$ platí nerovnost:

$$\left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon.$$



Definice. Řekneme, že funkce $f(x)$ je **spojitá zprava** v bodě $a \in D_f$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in \langle a, a+\delta) \cap D_f$ platí nerovnost:

$$\left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon.$$



Věta. *Funkce $f(x)$ spojitá v bodě a právě tehdy, když je v bodě a spojitá zleva i zprava.*

Důkaz. Přímo z definice.

Věta. *Nechť jsou funkce f, g spojité (resp. spojité zleva, resp. spojité zprava) v bodě a, nechť $k \in \mathbb{R}$ je konstanta. Pak jsou v bodě a spojité (resp. spojité zleva, resp. spojité zprava) také funkce kf, $f + g$, $f \cdot g$ a je-li $g(a) \neq 0$, také funkce $\frac{f}{g}$.*

Věta. *Nechť je funkce $f(x)$ spojitá v bodě a a funkce $g(y)$ je spojitá v bodě $f(a)$. Pak je složená funkce $f(g(x))$ spojitá v bodě a.*

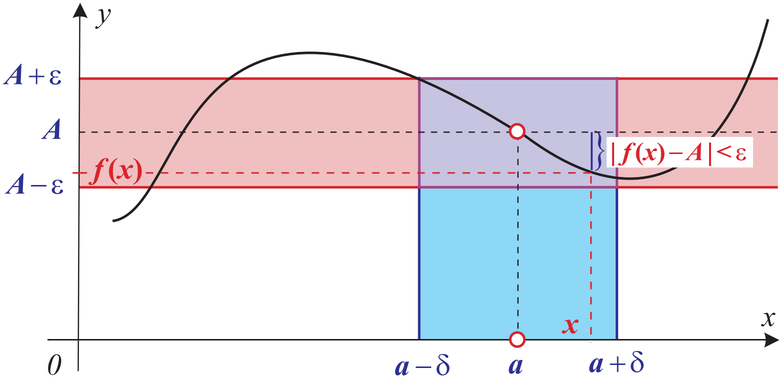
Poznámka. Důkazy předchozích vět jsou analogické důkazům obdobných vět pro limity, které jsou uvedeny dále.

Definice. Funkce spojitá na množině $X = D_f$ se nazývá *spojitá*.

Věta. *Nechť je $f : X \to \mathbb{R}$ spojitá funkce a X je uzavřená a omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Pak v množině X existují body x_M a x_m takové, že pro každé $x \in X$ je $f\big(x_m\big) \le f(x) \le f\big(x_M\big)$, tj. body, ve kterých funkce $f(x)$ nabývá svého maxima a minima.*

Definice. **Vlastní limita ve vlastním bodě.**

Nechť je dána funkce $f(x)$, nechť $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod jejího definičního oboru. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a **limitu** $A \in \mathbb{R}$, píšeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in D_f$, pro které je $0 < |x - a| < \delta$, platí: $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.



Jiné vyjádření výroku $\lim_{x\to a} f(x) = A$ plyne z následující věty.

Věta. *Nechť je dána funkce $f(x)$ a bod $a \in \mathbb{R}$, který je hromadným bodem jejího definičního oboru. Pak je*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

právě tehdy, když ke každému okolí $U_\varepsilon(A)$ bodu A existuje prstencové okolí $P_\delta(a)$ takové, že pro každé $x \in P_\delta(a) \cap D_f$ je $f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Důkaz. Věta je pouhým přepsáním definice limity, neboť $P_\delta(a) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, $U_\varepsilon(A) = (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. $\square$

Tato věta umožňuje jediným způsobem definovat limitu i v případě, že bod a nebo bod A je nevlastní.

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$ a bod $a \in \mathbb{R}^*$, který je hromadným bodem jejího definičního oboru. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ **limitu** $A \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když ke každému okolí $U(A)$ existuje prstencové okolí $P(a)$ takové, že pro každé $x \in P(a) \cap D_f$ je $f(x) \in U(A)$.

Terminologie:

Vlastní limita ve vlastním bodě: $a \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$;

Nevlastní limita ve vlastním bodě: $a \in \mathbb{R}, A = \pm\infty$;

Vlastní limita v nevlastním bodě: $a = \pm\infty, A \in \mathbb{R}$;

Nevlastní limita v nevlastním bodě: $a = \pm\infty, A \pm \infty.$

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$ a bod $a \in \mathbb{R}$, který je hromadným bodem množiny $\{x \in D_f\,;\; x < a\}$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a **limitu zleva** A, píšeme

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A,$$

jestliže ke každému okolí $U(A)$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (a - \delta, a) \cap D_f$ je $f(x) \in U(a)$.

Nechť je dána funkce $f(x)$ a bod $a \in \mathbb{R}$, který je hromadným bodem množiny $\{x \in D_f\,;\; x > a\}$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a **limitu zprava** A, píšeme

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A,$$

jestliže ke každému okolí $U(A)$ bodu A existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (a, a+\delta) \cap D_f$ je $f(x) \in U(a)$.

Věta. *Rovnice* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *platí právě tehdy, když*

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = A.$$

Důkaz. Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Protože je $(a-\delta, a) \subset P_\delta(a)$, $(a, a+\delta) \subset P_\delta(a)$, platí $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = A$.
Naopak, je-li $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = A$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existují δ_- a δ_+ taková, že pro každé $x \in D_f$, pro které je $0 < a - x < \delta_-$ nebo $0 < x - a < \delta_+$, je $f(x) \in U_\varepsilon(A)$.
K danému okolí $U_\varepsilon(A)$ stačí zvolit $\delta = \min\bigl(\delta_-, \delta_+\bigr)$. Je-li totiž $x \in D_f \cap P_\delta(a)$, je buď $0 < a - x < \delta \le \delta_-$ nebo $0 < x - a < \delta \le \delta_+$, a tedy $f(x) \in U_\varepsilon(A)$. $\square$

Věta. *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem definičního oboru D_f funkce $f(x)$, nechť $A \in \mathbb{R}^*$. Pak platí: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ pro každou posloupnost (x_n) konvergující k bodu a, kde $x_n \in D_f \setminus \{a\}$.*

Důkaz. Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a (x_n) je libovolná posloupnost s uvedenými vlastnostmi. Nechť je dáno $U_\varepsilon(A)$. Pak existuje $P_\delta(a)$, že pro každé $x \in D_f \cap P_\delta(a)$ je $f(x) \in U_\varepsilon(A)$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, existuje n_0, že pro všechna $n > n_0$ je $x_n \in P_\delta(a)$ a tedy $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.
Naopak, nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq A$. Pak existuje $U_\varepsilon(A)$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $x \in D_f \cap P_\delta(a)$, pro které je $f(x) \notin U_\varepsilon(A)$. Vezměme toto $\varepsilon > 0$, označme $\delta = 1/n > 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $X_n = \left\{x \in D_f \cap P_{1/n}(a) ;\ f(x) \notin U_\varepsilon(A)\right\}$ neprázdná. Z každé množiny X_n vybereme jeden prvek x_n a tak získáme posloupnost (x_n), kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \in D_f$, $x_n \neq a$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $|a - x_n| < 1/n$, je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Na druhou stranu ale pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$. $\square$

Věta. *Funkce $f(x)$ má v bodě a nejvýše jednu limitu, rovněž nejvýše jednu limitu zprava, resp. zleva.*

Důkaz. Nechť je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a zároveň $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, kde $A < B$. Pak existují disjunktní okolí $U_{\varepsilon_A}(A)$ a $U_{\varepsilon_B}(B)$, tj. taková okolí, jejichž průnik je prázdná množina. Ale protože $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, existují prstencová okolí $P_{\delta_A}(a)$ a $P_{\delta_B}(a)$ taková, že pro každé $x \in D_f \cap P_{\delta_A}(a)$ je $f(x) \in U_{\varepsilon_A}(A)$ a $x \in D_f \cap P_{\delta_B}(a)$ je $f(x) \in U_{\varepsilon_B}(B)$. Protože a je hromadný bod D_f, je pro $\delta = \min\big(\delta_A, \delta_B\big)$ množina $D_f \cap U_\delta(a)$ neprázdná. Tedy pro $x \in D_f \cap P_\delta(a)$ je $f(x) \in U_{\varepsilon_A}(A) \cap U_{\varepsilon_B}(B) = \emptyset$. Ale to je spor, a tedy $A = B$. $\square$

Věta. *Funkce $f(x)$ je* **spojitá** *v bodě a právě tehdy, když je a izolovaný bod jejího definičního oboru nebo když existuje vlastní limita*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Důkaz. Nechť je funkce $f(x)$ spojitá v bodě a, který je hromadným bodem D_f. Podle definice spojitosti existuje ke každému okolí $U_\varepsilon\big(f(a)\big)$ takové okolí $U_\delta(a)$, že pro každé $x \in D_f \cap U_\delta(a)$ je $f(x) \in U_\varepsilon\big(f(a)\big)$. Protože $P_\delta(a) \subset U_\delta(a)$, platí pro každé $x \in D_f \cap P_\delta(a) : f(x) \in U_\varepsilon\big(f(a)\big)$, tj. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Naopak, je-li a izolovaným bodem množiny D_f, existuje okolí $P_\delta(a)$ takové, že $P_\delta(a) \cap D_f = \emptyset$. Protože $D_f \cap U_\delta(a) = \{a\}$, pro každé okolí $U_\varepsilon\big(f(a)\big)$ platí, že pro všechna $x \in D_f \cap U_\delta(a) = \{a\}$ je $f(x) = f(a) \in U_\varepsilon\big(f(a)\big)$.
Je-li bod a hromadným bodem D_f a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, pak ke každému okolí $U_\varepsilon\big(f(a)\big)$ existuje $P_\delta(a)$ takové, že pro každé $x \in D_f \cap P_\delta(a)$ je $f(x) \in U_\varepsilon\big(f(a)\big)$. Ale protože $U_\delta(a) = P_\delta(a) \cup \{a\}$ a $f(a) \in U_\varepsilon\big(f(a)\big)$, je $f(x)$ spojitá v bodě a. $\square$

☛ ***Příklad.*** Funkce $f(x) = 2x$ je spojitá v každém bodě. Budeme-li hledat limitu například v bodě 3, pak podle předchozí věty je $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 6$.

☛ ***Příklad.*** Funkce $g(x)$ definovaná vztahem $g(3) = 2$, $g(x) = 2x$ pro $x \neq 3$, se pro $x \neq 3$ shoduje s funkcí $f(x)$, tedy

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = 6.$$

Protože $g(3) = 2 \neq 6$, není funkce $g(x)$ v bodě 3 spojitá.

Věta. *Funkce $f(x)$ je* **spojitá zleva***, resp.* **spojitá zprava** *v bodě a právě tehdy, když*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)\,, \qquad \textit{resp.} \quad \lim_{x\to a-} f(x) = f(a)\,.$$

Věta. *Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, pak existuje okolí $P_\delta(a)$ takové, že je funkce $f(x)$ v tomto okolí omezená.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon = 1$. Pak existuje prstencové okolí $P_\delta(a)$ takové, že pro každé $x \in P_\delta(a)$ je $A - 1 < f(x) < A + 1$. $\square$

Věta. *Nechť je dána funkce $f(x)$ a bod $a,$ který je hromadným bodem jejího definičního oboru. Pak existuje konečná limita funkce $f(x)$ v bodě a tehdy a jen tehdy, když je splněna Cauchy–Bolzanova podmínka: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dva body $x_1, x_2 \in D_f$, pro které $0 < \left|x_1 - a\right| < \delta$ a $\left|x_2 - a\right| < \delta$, platí: $\left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \varepsilon$.*

Věta. *Nechť existují vlastní limity* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$.
Potom platí: $\lim\limits_{x\to a}\big(f+g\big)(x) = A+B$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f\cdot g\big)(x) = AB$.
Je-li navíc $B\neq 0$, *pak* $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{A}{B}$.

Důkaz. 1) Protože $\big|f(x)+g(x)-A-B\big| \le \big|f(x)-A\big| + \big|g(x)-B\big|$, stačí k danému $\varepsilon>0$ uvažovat takové $P_\delta(a)$, aby pro každé $x\in P_\delta(a)$ bylo $f(x)\in U_{\varepsilon/2}(A)$, $g(x)\in U_{\varepsilon/2}(B)$.
2) Protože má $f(x)$ konečnou limitu, existuje okolí $P_\Delta(a)$, na němž je $f(x)$ omezená, tedy existuje takové $K>0$, že pro každé $x\in P_\Delta(a)$ je $\big|f(x)\big|<K$. Protože $\big|f(x)g(x)-AB\big| = \big|f(x)\big(g(x)-B\big)+B\big(f(x)-A\big)\big| \le \big|f(x)\big|\cdot\big|g(x)-B\big|+|B|\cdot\big|f(x)-A\big| < K\cdot\big|g(x)-B\big|+|B|\cdot\big|f(x)-A\big|$, stačí zvolit $P_\delta(a)\subset P_\Delta(a)$, kde vhodně odhadneme $\big|f(x)-A\big|$ a $\big|g(x)-B\big|$.
3) Existuje okolí $P_\Delta(a)$ takové, že pro každé $x\in P_\Delta(a)$ je $g(x)>|B|/2$ a funkce $1/g(x)$ má smysl. Pro každé $x\in P_\Delta(a)$ pak platí: $\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right| = \frac{\left|B-g(x)\right|}{\left|Bg(x)\right|} < \frac{2\left|B-g(x)\right|}{B^2}$. K danému $\varepsilon>0$ stačí zvolit $P_\delta(a)\subset P_\Delta(a)$ takové, aby pro každé $x\in P_\delta(a)$ bylo $\big|B-g(x)\big| < \frac{B^2}{2}\,\varepsilon$. $\square$

Poznámka: Předchozí věta platí i v případě, kdy $A,\ B \in \mathbb{R}^*$, a příslušné operace jsou v $\mathbb{R}^*$ definovány.

Věta. *Předpokládejme, že* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$. *Nechť existuje okolí* $P_\Delta(a)$ *takové, že pro každé* $x \in D_f \cap P_\Delta(a)$ *je* $f(x) \neq A$. *Pak je* $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$.

Důkaz. Nechť je dáno okolí $U_\varepsilon(B)$. Pak existuje prstencové okolí $P_\eta(A)$ bodu A takové, že pro každé $y \in D_g \cap P_\eta(A)$ je $g(y) \in U_\varepsilon(B)$. Ale protože je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, existuje prstencové okolí $P_{\delta_1}(a)$ takové, že pro každé $x \in D_f \cap P_{\delta_1}(a)$ je $f(x) \in U_\eta(A)$. Nechť je $P_\delta(a)$ prstencové okolí bodu a takové, že $P_\delta(a) \subset P_\Delta(a) \cap P_{\delta_1}(a)$. Pak pro každé $x \in D_f \cap P_\delta(a)$ platí $f(x) \in U_\eta(A) \setminus \{A\} = P_\eta(A)$. Tedy pro taková x je $h(x) = g\big(f(x)\big) \in U_\epsilon(B)$. $\square$

☛ ***Příklad.*** Nechť $f(x) = 0$ a $g(x) = 0$ pro $x \neq 0$, $g(0) = 1$. Pak je $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, ale $\lim_{x \to 0} g\big(f(x)\big) = 1$, protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $g\big(f(x)\big) = 1$. Tento příklad ukazuje, že je předpoklad existence $P_\Delta(a)$ v předcházející větě podstatný.

Věta. *Nechť jsou dány funkce $f(x), g(x),$ nechť existuje takové okolí $P_\Delta(a)$ že pro všechna $x \in D_f \cap P_\Delta(a)$ je*

$$f(x) \leq g(x)\,.$$

Existují-li limity $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, pak platí:

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

Důkaz. Předpokládejme, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Pak existují okolí $U_{\varepsilon_A}(A)\,,\ U_{\varepsilon_B}(B)$, pro která je $U_{\varepsilon_A}(A) \cap U_{\varepsilon_B}(B) = \emptyset$. Proto pro každé $y_A \in U_\varepsilon(A)$, $y_B \in U_{\varepsilon_B}(B)$ je $y_A > y_B$. Zároveň však existuje okolí $P_\delta(a) \subset P_\Delta(a)$ takové, že pro každé $x \in U_\delta(a)$ je $f(x) \in U_{\varepsilon_A}(A)\,,\ g(x) \in U_{\varepsilon_B}(B)$. Z toho plyne $f(x) > g(x)$, což je spor. $\square$

Poznámka. I když je $f(x) < g(x)$, může platit:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

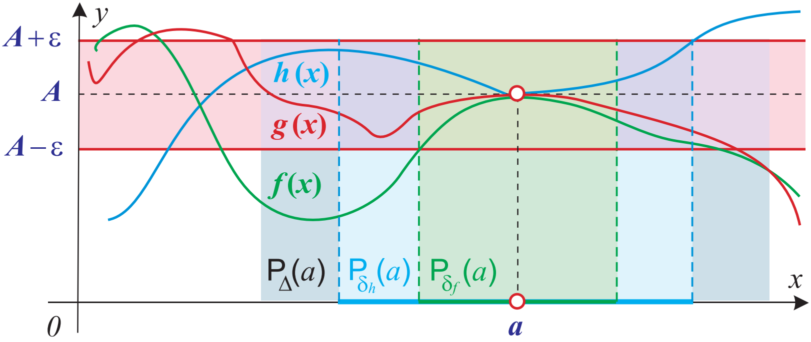
☛ ***Příklad.*** Uvažujme funkce $f(x) = -2x,\ g(x) = 2x\,.$ V každém $P_\Delta(0)$ platí:

$$f(x) < g(x),$$

přitom je

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)\,.$$

Věta. *Nechť* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, *nechť existuje* $P_\Delta(a)$ *takové, že pro všechna* $x \in P_\Delta(a)$ *platí:* $f(x) \le g(x) \le h(x)$. *Potom je také* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.



Důkaz. Nechť je dáno $U_\varepsilon(A)$. Pak existují $P_{\delta_f}(a)$ a $P_{\delta_h}(a)$ taková, že pro každé $x \in P_{\delta_f}(a)$ je $f(x) \in U_\varepsilon(a)$ a pro každé $x \in P_{\delta_h}(a)$ je $h(x) \in U_\varepsilon(A)$. Označme $P_\delta(a) = P_{\delta_f}(a) \cap P_{\delta_h}(a)$. Pro každé $x \in P_\delta(a)$ zřejmě platí: $A - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < A + \varepsilon$. $\square$

Důsledek. *Nechť existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in P_\delta(a)$ platí*

(i) $|g(x)| \leq h(x)$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$. *Pak je* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

(ii) $f(x) \leq g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. *Pak je* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

(iii) $g(x) \leq h(x)$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = -\infty$. *Pak je* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$.

Věta. *Existuje-li* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *pak platí:* $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to a} f(x)|$.

Důkaz. Plyne přímo z definice limity. $\square$

Věta. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *právě tehdy, když* $\lim\limits_{x\to a} \big|f(x)\big| = 0$.

Důkaz. Přepsání definice obou limit. $\square$

Věta. *Nechť* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *a existuje okolí* $P_\Delta(a)$ *takové, že funkce* $g(x)$ *je omezená na* $P_\Delta(a)$. *Pak je* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$.

Důkaz. Protože je funkce $g(x)$ omezená na $P_\Delta(a)$, existuje $K > 0$ takové, že pro všechna $x \in P_\Delta(a)$ je $\big|g(x)\big| < K$. Na tomto okolí tedy platí: $\big|f(x)\cdot g(x)\big| < K\big|f(x)\big|$.
Protože je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takové okolí $P_\delta(a) \subset P_\Delta(a)$, že pro každé $x \in P_\delta(a)$ je $\big|f(x)\big| < \varepsilon/K$.
Pro všechna $x \in P_\delta(a)$ tedy platí: $\big|f(x)\cdot g(x)\big| < K\,\dfrac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$.

☛ ***Příklad.*** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\sin x = 0$, neboť $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $|\sin x| \le 1$.

Věta. *Nechť* $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *a nechť existuje okolí* $P_\Delta(a)$ *tak, že pro každé pro* $x \in P_\Delta(a)$ *platí:*

(i) $f(x) > 0\,.$ *Pak* $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty\,.$

(ii) $f(x) < 0\,.$ *Pak* $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty\,.$

Důkaz. K danému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in P_\delta(a)$ je $|f(x)| < \varepsilon$. Pak platí $1/|f(x)| > \varepsilon$ a odtud plynou obě dokazovaná tvrzení.

Věta. *Jestliže* $\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty$, *pak* $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0\,.$

Důkaz. Analogicky s důkazem předchozí věty.

Věta. *Nechť existuje* $\lim_{x\to a} f(x) = A \neq 0$*. Pak existuje takové okolí* $P_\delta(a)$, *že platí:*

(i) *je-li* $A > 0$, *pak je* $f(x) > 0$ *pro všechna* $x \in P_\delta(a)$,

(ii) *je-li* $A < 0$, *pak je* $f(x) < 0$ *pro všechna* $x \in P_\delta(a)$.

Důkaz. (i) Uvažujme $\varepsilon = A/2 > 0$. Pak existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in P_\delta(a)$ je

$$0 < \frac{A}{2} = A - \frac{A}{2} = A - \varepsilon < f(x)\,.$$

(ii) Analogicky: uvažujme $\varepsilon = -A/2 > 0$. Pak existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in P_\delta(a)$ je

$$f(x) < A + \varepsilon = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} < 0\,.$$

Poznámka: Uvedené věty platí i pro limity zleva a zprava.

☛ ***Příklad.*** Vypočítejme limitu funkce

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} \qquad \text{v bodě} \quad a = 1\,.$$

Řešení. $1 \in D_f$, funkce $f(x)$ je v tomto bodě spojitá, limita je rovna funkční hodnotě:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} = \frac{-2}{-9} = \frac{1}{4}\,.$$

☛ ***Příklad.*** Vypočítejme limitu funkce

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} \qquad \text{v bodě} \quad a = 3\,.$$

Řešení. 3 nepatří do D_f, je však jeho hromadným bodem. Při hledání limity pracujeme vždy s prstencovým okolím daného bodu, kde můžeme psát:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} = \frac{(x-3)(x^2 - 2x + 2)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(x^2 - 2x + 2)}{(x+3)}\,.$$

Vzniklá funkce je v bodě 3 spojitá a její limita, která je rovna limitě původní funkce, je rovna $5/6$.

V takovýchto případech můžeme psát přímo:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2 - 2x + 2)}{(x-3)(x+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x^2 - 2x + 2)}{(x+3)} = \frac{5}{6}$$

☛ ***Příklad.*** Vypočítejme limitu funkce

$$f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{2x^3 + 4x^2 - 9x + 3} \qquad \text{v bodě} \quad a = +\infty\,.$$

Řešení. $+\infty$ je hromadným bodem D_f ; postup je stejný jako při hledání limit posloupností:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \to +\infty} \frac{{\color{blue}x^3} \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{6}{x}\right)}{{\color{blue}x^3} \left(2 + \frac{4}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{3}{x}\right)} = \frac{3}{2}$$

☛ ***Příklad.*** Vypočítejme limitu funkce

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{3x} \qquad \text{v bodě} \quad a = 0\,.$$

Řešení. Bod $a = 0$ nepatří do D_f, ale je jeho hromadným bodem.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{3x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{3x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+4-4}{3x(\sqrt{x+4}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{3x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \frac{1}{6}\,.$$

☛ ***Příklad.*** Vypočítejme limitu funkce

$$f(x) = x\left(\sqrt{x^2+4} - x\right) \qquad \text{v bodě} \quad a = +\infty\,.$$

Řešení. Bod $a = +\infty$ je hromadným bodem D_f.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} x\left(\sqrt{x^2+4} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{x^2+4} - x\right)\left(\sqrt{x^2+4} + x\right)}{\sqrt{x^2+4} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(x^2+4-x^2\right)}{\sqrt{x^2+4} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} + 1} = \frac{4}{2}\,.$$