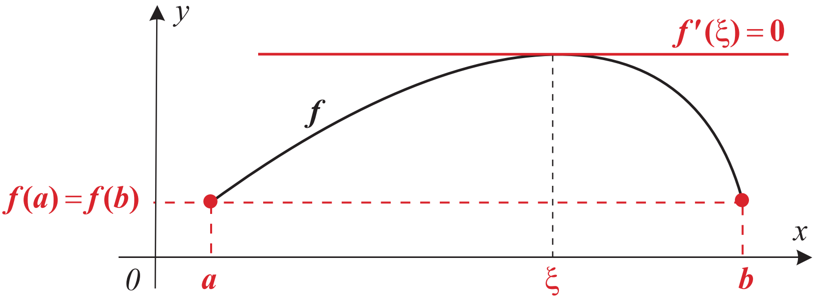
PŘEDNÁŠKA 5

VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ

Věty o střední hodnotě

Věta (Rolle). *Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b), nechť platí $f(a) = f(b)$. Pak existuje alespoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f'(\xi) = 0$.*



Důkaz. Je-li funkce f konstantní, je tvrzení zřejmé.
Není-li konstantní, pak podle Weierstrassovy věty existuje bod $\xi \in (a, b)$ tak, že číslo $f(\xi)$ je maximem nebo minimem funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Předpokládejme nejprve, že toto číslo je maximem. Pokud by bylo

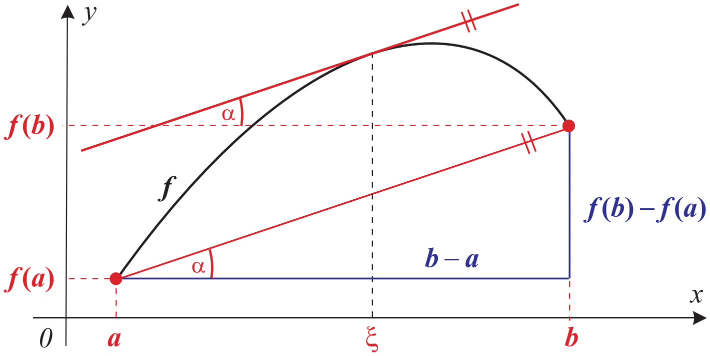
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0\,,$$

existovalo by takové okolí $\mathsf{P}(x_0, \delta)$, že

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \text{pro všechna} \quad x \in \mathsf{P}(x_0, \delta)\,.$$

Pak by bylo $f(x) > f(x_0)$ pro všechna $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, což je spor s předpokladem, že f nabývá v bodě x_0 maxima. Analogicky v ostatních případech.

Věta (Lagrange). *Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b). Pak existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$.*



Důkaz. Stačí aplikovat Rolleovu větu na funkci

$$h(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a).$$

☛ ***Příklad.*** Dokažte, že pro každé $x \geq 0$ platí nerovnost $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$, kde α je libovolné číslo z intervalu $(0,1)$.

Řešení. Označme

$$f(x) = 1 + \alpha x - (1+x)^\alpha\,;$$

funkce f je na intervalu $\langle 0, +\infty)$ spojitá a má zde derivaci

$$f'(x) = \alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1} > 0\,.$$

Navíc platí $f(0) = 0$. Nechť je $x \in (0, +\infty)$. Podle Lagrangeovy věty existuje takový bod $\xi \in (0, x)$, že

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi) \cdot (x - 0) > 0\,.$$

Tedy pro každé $x \in (0, +\infty)$ je $f(x) > 0$.

Důsledek. *Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť v každém vnitřním bodě x intervalu $\langle a, b\rangle$ má derivaci $f'(x) = 0$. Pak tato funkce je v intervalu $\langle a, b\rangle$ konstantní.*

Důkaz. Zvolme bod $c \in \langle a, b\rangle$. Pak pro každý bod $x \in \langle a, b\rangle$ podle Lagrangeovy věty existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c) = 0$. Tedy $f(x) = f(c)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$.

☛ ***Příklad.*** Ukažte, že na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ platí rovnost

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2 \, .$$

Řešení.

$$(\arcsin x + \arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0,$$

podle důsledku 1 je funkce $\arcsin x + \arccos x$ konstantní. Nyní stačí najít její hodnotu v libovolném bodě, např. v bodě $x = 0 : \arcsin 0 + \arccos 0 = \pi/2$.

Věta (Cauchy). *Nechť jsou funkce f, g spojité na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$, diferencovatelné na otevřeném intervalu (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ je $g'(x) \neq 0$. Pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Důkaz. Z podmínky $g'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$ a z Rolleovy věty plyne, že $g(b) \neq g(a)$. Označme

$$F(x) = \big(f(x) - f(a)\big)\cdot\big(g(b) - g(a)\big) - \big(f(b) - f(a)\big)\cdot\big(g(x) - g(a)\big)\,.$$

$F(a) = F(b) = 0$, F je spojitá na $\langle a, b\rangle$, diferencovatelná na (a, b). Podle Rolleovy věty existuje $\xi \in (a, b)$, pro které

$$F'(\xi) = f'(\xi)\cdot\big(g(b) - g(a)\big) - \big(f(b) - f(a)\big)\cdot g'(\xi) = 0\,.$$

Zbytek plyne z $g(b) - g(a) \neq 0$ a $g'(\xi) \neq 0$.

Věta (L'Hospitalovo pravidlo). *Nechť* $a \in \mathbb{R}^*$ *a nechť*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0\,, \text{ resp. } \lim_{x \to a} |f(x)| = \lim_{x \to a} |g(x)| = \infty.$$

Existuje-li $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$*, pak existuje také* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Analogické tvrzení platí pro jednostranné limity.

☛ ***Příklad.***

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Důkaz. Pro limity zprava.

Z existence limity
$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
plyne existence takového pravého okolí (a, x_1) bodu a, že na intervalu $\langle a, x_1\rangle$ jsou splněny předpoklady Cauchyovy věty.

Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, můžeme předpokládat, že $f(a) = g(a) = 0$. Kdyby funkce v bodě a nebyly definovány, spojitě je dodefinujeme těmito nulovými hodnotami. Podle Cauchyovy věty pak pro každé $x \in (a, x_1)$ existuje $\xi \in (a, x)$ tak, že
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$
Odtud již poměrně snadno plyne dokazovaná existence limity a rovnost limit.

Nechť je nyní $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \lim\limits_{x \to a} |g(x)| = \infty$; nemůžeme pracovat s hodnotami funkcí v bodě a, pro každé $x \in (a, x_1)$ však můžeme aplikovat Cauchyovu větu na interval $\langle x, x_1 \rangle$. Podle ní existuje bod $\xi \in (x, x_1)$ tak, že

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Odtud

$$f(x) - f(x_1) = (g(x) - g(x_1)) \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

a po vydělení obou stran hodnotou $g(x)$ dostaneme rovnost

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_1)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Pomocí této rovnosti lze již dokázat jak existenci limity, tak i potřebnou rovnost.

☛ ***Příklad.***

(a) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left(\frac{"0"}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = 1$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \left(\frac{"0"}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

(c) $$\lim_{x\to 0+} x\ln x = ("0\cdot(-\infty)") = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{"+\infty"}{+\infty}\right) =$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x} = -\lim_{x\to 0+}\frac{x}{1} = 0$$

(d) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \left(\frac{"+\infty"}{+\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

(e) Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^k} = \left(\frac{\text{"} + \infty\text{"}}{+\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{kx^{k-1}} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{k!} = \infty$$

(f) $$\lim_{x\to 0+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \left((-\infty)^0\right) = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{x^2 \ln \frac{1}{x}} = \left(\mathrm{e}^{0\cdot(-\infty)}\right)$$

Protože

$$\lim_{x\to 0+} x^2 \ln \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{\text{"} - \infty\text{"}}{+\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{2} = 0\,,$$

je $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \mathrm{e}^0 = 1$