

DERIVACE FUNKCE A JEJÍ VLASTNOSTI

Definice. Derivace funkce v bodě.

Nechť je dána funkce $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a bod x_0 , který je vnitřním bodem definičního oboru D_f . Existuje-li limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazveme ji **derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0** .

Poznámka. Pro derivaci funkce $f(x)$ v bodě x_0 se rovněž používá označení $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Označíme-li $h = x - x_0$, pak můžeme definiční vztah přepsat ve tvaru:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Směrnice sečny s : $\xrightarrow{x \rightarrow x_0}$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

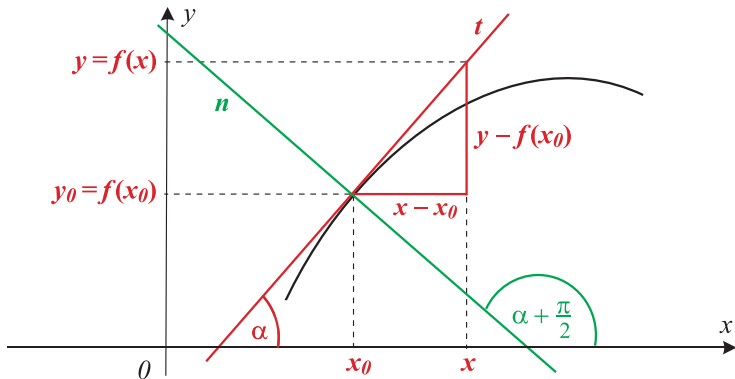
Směrnice tečny t :

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tečna a normála ke grafu funkce

Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 udává směrnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ procházející bodem $(x_0, f(x_0))$. Pro souřadnice libovolného bodu této tečny proto platí:

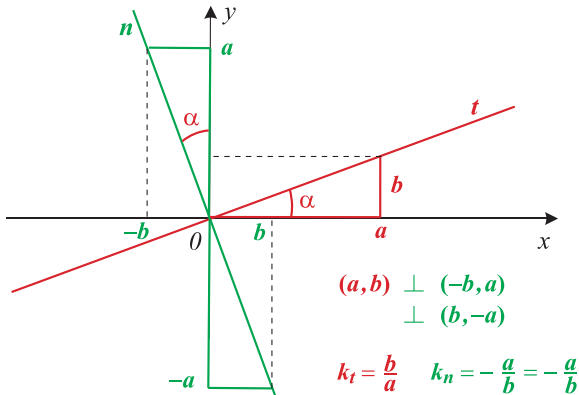
$$k_t = f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{neboli} \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$



Normála ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$ je kolmá na tečnu, její směrnice je proto

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

a pro libovolný bod normály platí: $k_n = -\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$.



Získali jsme tedy rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$:

$$\text{tečna } t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\text{normála } n : y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Definice. Nechť je dána funkce $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a bod x_0 , který je vnitřním bodem definičního oboru D_f . Jestliže existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + h\tau(h), \quad \text{kde} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0,$$

nazývá se lineární funkce

$$df(x_0, h) = Ah$$

diferenciál funkce $f(x)$ bodě x_0 .

Má-li funkce $f(x)$ diferenciál v bodě x_0 , říkáme, že je **diferencovatelná v bodě x_0 .**

Jinými slovy, funkce $f(x)$ je diferencovatelná v bodě $x_0 \in D_f$ právě tehdy, když ji lze v okolí bodu x_0 aproximovat lineární funkcí ve výše zmíněném smyslu: $f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + Ah$.

Věta. Funkce f je diferencovatelná v bodě x_0 právě tehdy, když existuje konečná derivace $f'(x_0)$. V takovém případě je $df(x_0; h) = f'(x_0)h$.

Důkaz. Nechť je funkce $f(x)$ diferencovatelná v bodě x_0 . Pak existuje konstanta $A \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0,$$

tj.
$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - A \right) = f'(x_0) - A = 0.$$

Proto $df(x_0, h) = f'(x_0)h$.

Naopak, nechť existuje $f'(x_0)$. Označme

$$\tau(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h}. \quad \text{Pak je}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Fyzikální aplikace derivace

Značí-li $s(t)$ dráhu, kterou urazil po přímce se pohybující hmotný bod v čase t od okamžiku, kdy jsme začali čas měřit, pak podíl

$$v_p = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

představuje **průměrnou rychlost** tohoto pohybu mezi časovými okamžiky t_0 a t . Výraz

$$v(t_0) = \lim_{x \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

potom udává **okamžitou rychlost** pohybu v čase t_0 .

Podobně

$$a(t_0) = \lim_{x \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

udává **okamžité zrychlení** pohybu v čase t_0 .

Ekonomické aplikace derivace

- Označme symbolem TC **celkové náklady (total cost)**, které jsou funkcí určitého vstupu, resp. výrobního faktoru F . Průměrné rychlosti budou odpovídat **průměrné náklady AC (average cost)** a okamžité rychlosti budou odpovídat **mezní náklady MC (marginal cost)**:

$$MC = \frac{dTC}{dF}.$$

- Označme symbolem TP **celkový produkt (total product)**, který je funkcí určitého vstupu F . Průměrné rychlosti bude odpovídat **průměrný produkt AP (average product)** a okamžité rychlosti bude odpovídat **mezní produkt MP (marginal cost)**:

$$MP = \frac{dTP}{dF} .$$

- Označme symbolem TU **celkový užitek (total utility)**, který je funkcí množství spotřebovávaného statku Q . Okamžité rychlosti bude odpovídat **mezní užitek MU (marginal utility)**:

$$MU = \frac{dTU}{dQ} .$$

Definice. **Jednostranné derivace.**

Nechť je dána funkce $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a takový bod x_0 , že pro nějaké $\delta > 0$ je $\langle x_0, x_0 + \delta \rangle \subset D_f$. Existuje-li limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazveme ji **derivace zprava funkce $f(x)$ v bodě x_0** .

Je-li pro nějaké $\delta > 0$: $\langle x_0 - \delta, x_0 \rangle \subset D_f$ a existuje-li limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazveme ji **derivace zleva funkce $f(x)$ v bodě x_0** .

Definice. Derivace na intervalu.

Má-li funkce f derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) , pak funkci f' , která každému bodu $x \in (a, b)$ přiřazuje hodnotu derivace $f'(x)$, nazýváme **derivací funkce f na otevřeném intervalu (a, b)** .

Má-li funkce f derivaci na otevřeném intervalu (a, b) a má-li obě jednostranné derivace $f'(a+)$, $f'(b-)$, pak funkci f' , definovanou předpisem

$$f'(x) = \begin{cases} f'(a+) & \text{pro } x = a, \\ f'(x) & \text{pro } x \in (a, b), \\ f'(b-) & \text{pro } x = b \end{cases}$$

nazýváme **derivací funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$** .

Vlastnosti derivace

Věta (Vztah mezi spojitostí a derivací).

Má-li funkce f derivaci v bodě x_0 , pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz. Existuje-li v bodě x_0 derivace funkce $f(x)$, pak

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right] = \\ &= f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0) .\end{aligned}$$

Funkce $f(x)$ je tedy v bodě x_0 spojitá.

Poznámka. Obrácené tvrzení neplatí, neboť například funkce $f(x) = |x|$ je spojitá v bodě 0, ale nemá v něm derivaci.

Věta (Algebraické operace s derivacemi).

Mají-li funkce f a g derivace v bodě x_0 , pak v tomto bodě existují i derivace funkcí kf , kde $k \in \mathbb{R}$, $f \pm g$ a fg a platí:

$$(kf)'(x_0) = kf'(x_0),$$

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0),$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, má také funkce $\frac{f}{g}$ derivaci v bodě x_0 a platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Stejně vztahy platí pro derivace funkcí na intervalu.

Důkaz.

$$\begin{aligned}(kf)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kf(x_0 + h) - kf(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} k \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = kf'(x_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + h) \pm g(x_0 + h)) - (f(x_0) \pm g(x_0))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0)) \pm (g(x_0 + h) - g(x_0))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \pm \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \\ &= f'(x_0) \pm g'(x_0)\end{aligned}$$

$$(fg)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0 + h) + f(x_0)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} g(x_0 + h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \frac{(g(x_0 + h) - g(x_0))}{h} =$$

$$= f'(x_0)g(x_0) \pm f(x_0)g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + h)}{g(x_0 + h)g(x_0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + h)}{g(x_0 + h)g(x_0)h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x_0 + h)g(x_0)} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right) =$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Věta (Derivace složené funkce).

Existuje-li derivace funkce g v bodě x_0 a derivace funkce f v bodě $g(x_0)$, pak existuje také derivace složené funkce $h = f \circ g$ v bodě x_0 a platí:

$$h'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Věta (Derivace inverzní funkce).

Nechť funkce $x = f(y)$ je ryze monotónní v intervalu J a nechť má derivaci $f'(y_0) \neq 0$ v bodě $y_0 \in J$. Pak také inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$ má derivaci v bodě $x_0 = f(y_0) \in I = f(J)$ a platí:

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} \equiv \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Důkaz. Dokazované tvrzení plyne limitním přechodem v rovnosti

$$\frac{f^{-1}(x - x_0) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\frac{x - x_0}{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}} = \frac{1}{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}}.$$

Derivace elementárních funkcí

- (i) Derivace konstantní funkce $f(x) = c$ je v každém bodě rovna nule, $(c)' = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$$(c)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

- (ii) $(x)' = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$$(x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

- (iii) $(x^2)' = 2x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$$(x^2)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x+h)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 1$$

(iv) $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro každé $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + h^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \dots + h^{n-1} \right) h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \dots + h^{n-1} \right) = nx^{n-1}\end{aligned}$$

(v) $(\sin x)' = \cos x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)}{h} = \\ &= \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\end{aligned}$$

Tímto způsobem je možné odvodit derivace všech základních elementárních funkcí – uveďme zde jejich přehled.

$$(c)' = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = c;$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R};$$
$$n \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$
$$n \in \mathbb{R}, \quad x > 0;$$

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a; \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in (0; \infty);$$

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}; \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}; \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad a \in (0, 1) \cup (1, \infty);$$

$$(\sin x)' = \cos x; \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\sinh x)' = \cosh x; \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\cosh x)' = \sinh x; \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}; \quad x \neq k\pi; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}; \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{cotgh} x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}; \quad x \in \mathbb{R} - \{0\};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad x \in (-1, 1);$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad x \in (-1, 1);$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}; \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}; \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}; \quad x \in (1, \infty);$$

$$(\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}; \quad x \in (-1, 1);$$

$$(\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}; \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

➔ **Příklad.**

$$(a) \quad f(x) = 5x^6 + 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 3x + 12$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot 6x^5 + 2 \cdot 4x^3 + 7 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 3 + 0 = \\ &= 30x^5 + 8x^3 + 21x^2 - 8x + 3 \end{aligned}$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{x^4 - 2}{3x^2 - 12}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3(3x^2 - 12) - (x^4 - 2)6x}{(3x^2 - 12)^2} = \frac{6x^5 - 48x^3 + 12x}{9x^4 - 72x^2 + 144}$$

(c) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt[5]{x^4}$$

(d) $f(x) = \sin(x^5 + 3x)$

$$f'(x) = \cos(x^5 + 3x) \cdot (5x^4 + 3) = (5x^4 + 3) \cos(x^5 + 3x)$$

(e) $f(x) = (\sin(x^5 + 3x))^4$

$$f'(x) = 4(\sin(x^5 + 3x))^3 \cdot \cos(x^5 + 3x) \cdot (5x^4 + 3)$$

$$(f) \quad f(x) = (\sin x)^{\cos x}$$

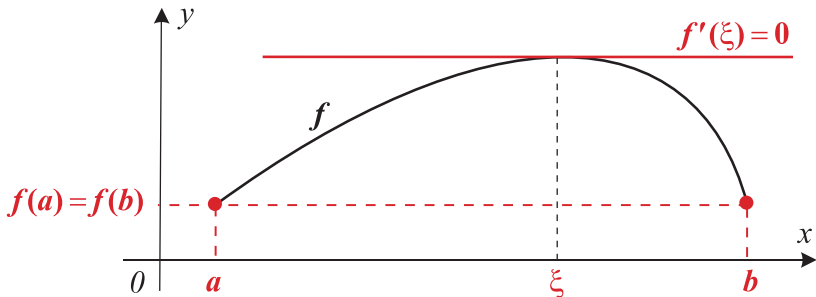
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\ln(\sin x)^{\cos x}} \right)' = \left(e^{\cos x \ln \sin x} \right)' = \\ &= e^{\cos x \ln \sin x} \cdot \left(-\sin x \ln \sin x + \cos x \frac{1}{\sin x} \cos x \right) = \\ &= (\sin x)^{\cos x} \left(-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) \end{aligned}$$

$$(g) \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^2} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' = \frac{-2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$$

Věty o střední hodnotě

Věta (Rolle). *Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) , nechť platí $f(a) = f(b)$. Pak existuje alespoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f'(\xi) = 0$.*



Důkaz. Je-li funkce f konstantní, je tvrzení zřejmé. Není-li konstantní, pak podle Weierstrassovy věty existuje bod $\xi \in (a, b)$ tak, že číslo $f(\xi)$ je maximem nebo minimem funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Předpokládejme nejprve, že toto číslo je maximem. Pokud by bylo

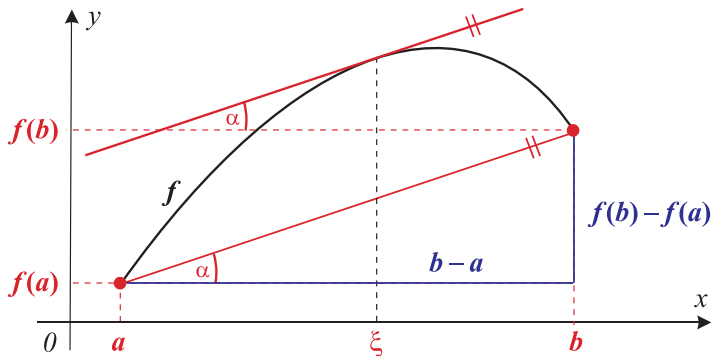
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

existovalo by takové okolí $P(x_0, \delta)$, že

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \text{pro všechna } x \in P(x_0, \delta).$$

Pak by bylo $f(x) > f(x_0)$ pro všechna $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, což je spor s předpokladem, že f nabývá v bodě x_0 maxima. Analogicky v ostatních případech.

Věta (Lagrange). *Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) . Pak existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$.*



Důkaz. Stačí aplikovat Rolleovu větu na funkci

$$h(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a).$$

☞ **Příklad.** Dokažte, že pro každé $x \geq 0$ platí nerovnost $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$, kde α je libovolné číslo z intervalu $(0, 1)$.

Řešení. Označme

$$f(x) = 1 + \alpha x - (1+x)^\alpha;$$

funkce f je na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ spojitá a má zde derivaci

$$f'(x) = \alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1} > 0.$$

Navíc platí $f(0) = 0$. Nechť je $x \in (0, +\infty)$. Podle Lagrangeovy věty existuje takový bod $\xi \in (0, x)$, že

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi) \cdot (x - 0) > 0.$$

Tedy pro každé $x \in (0, +\infty)$ je $f(x) > 0$.

Důsledek. *Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť v každém vnitřním bodě x intervalu $\langle a, b \rangle$ má derivaci $f'(x) = 0$. Pak tato funkce je v intervalu $\langle a, b \rangle$ konstantní.*

Důkaz. Zvolme bod $c \in \langle a, b \rangle$. Pak pro každý bod $x \in \langle a, b \rangle$ podle Lagrangeovy věty existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c) = 0$. Tedy $f(x) = f(c)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$.

☞ **Příklad.** Ukažte, že na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ platí rovnost

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2.$$

Řešení.

$$(\arcsin x + \arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

podle důsledku 1 je funkce $\arcsin x + \arccos x$ konstantní. Nyní stačí najít její hodnotu v libovolném bodě, např. v bodě $x = 0$: $\arcsin 0 + \arccos 0 = \pi/2$.

Věta (Cauchy). *Nechť jsou funkce f, g spojité na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b \rangle$, diferencovatelné na otevřeném intervalu (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ je $g'(x) \neq 0$. Pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Důkaz. Z podmínky $g'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$ a z Rolleovy věty plyne, že $g(b) \neq g(a)$. Označme

$$F(x) = (f(x) - f(a)) \cdot (g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a)) \cdot (g(x) - g(a)).$$

$F(a) = F(b) = 0$, F je spojitá na $\langle a, b \rangle$, diferencovatelná na (a, b) . Podle Rolleovy věty existuje $\xi \in (a, b)$, pro které

$$F'(\xi) = f'(\xi) \cdot (g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = 0.$$

Zbytek plyne z $g(b) - g(a) \neq 0$ a $g'(\xi) \neq 0$.

Věta (L'Hospitalovo pravidlo). *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, \text{ resp. } \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty.$$

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje také $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analogické tvrzení platí pro jednostranné limity.

☞ **Příklad.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Důkaz. Pro limity zprava.

Z existence limity

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

plyne existence takového pravého okolí (a, x_1) bodu a , že na intervalu $\langle a, x_1 \rangle$ jsou splněny předpoklady Cauchyovy věty.

Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, můžeme předpokládat, že $f(a) = g(a) = 0$. Kdyby funkce v bodě a nebyly definovány, spojitě je dodefinujeme těmito nulovými hodnotami. Podle Cauchyovy věty pak pro každé $x \in (a, x_1)$ existuje $\xi \in (a, x)$ tak, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Odtud již poměrně snadno plyne dokazovaná existence limity a rovnost limit.

Nechť je nyní $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$; nemůžeme pracovat s hodnotami funkcí v bodě a , pro každé $x \in (a, x_1)$ však můžeme aplikovat Cauchyovu větu na interval $\langle x, x_1 \rangle$. Podle ní existuje bod $\xi \in (x, x_1)$ tak, že

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Odtud

$$f(x) - f(x_1) = (g(x) - g(x_1)) \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

a po vydělení obou stran hodnotou $g(x)$ dostaneme rovnost

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_1)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Pomocí této rovnosti lze již dokázat jak existenci limity, tak i potřebnou rovnost.

☞ **Příklad.**

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left(\frac{\text{"0"}}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left(\frac{\text{"0"}}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = (\text{"0} \cdot (-\infty)\text{"}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\text{"} + \infty \text{"}}{+\infty} \right) =$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1} = 0$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\text{"} + \infty \text{"}}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

(e) Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^k} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{kx^{k-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{k!} = \infty$$

$$(f) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{x^2} = ((-\infty)^0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x^2 \ln \frac{1}{x}} = (e^{0 \cdot (-\infty)})$$

Protože

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{je } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{x^2} = e^0 = 1$$