DERIVACE A DIFERENCIÁLY VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

Definice. Má-li funkce f' derivaci v každém bodě intervalu I, pak její derivaci

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = (f')'(x)$$

nazýváme **druhou derivací funkce f na intervalu I.**

Je-li $n \in \mathbb{N}\,, n = 2, 3, \cdots$, pak **n-tou derivaci funkce f na intervalu I** definujeme rekurentně vztahem

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\,(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,f^{(n-1)}(x)\,, \quad x \in I\,,$$

pokud tyto derivace na I existují. Hovoříme též o **derivaci n-tého řádu na intervalu I**.

Je-li $I = D_f$, hovoříme o **derivaci n-tého řádu funkce f**.

Pro sjednocení symboliky zavádíme označení $f^{(0)} \equiv f$.

☛ ***Příklad.*** Nalezněte třetí derivaci funkce

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 1\,.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10x^4 - 12x^3 + 15x^2 + 6x + 5 \\ f''(x) &= 40x^3 - 36x^2 + 30x + 6 \\ f'''(x) &= 120x^3 - 72x + 30 \end{aligned}$$

Definice. Má-li funkce f v bodě x_0 n-tou derivaci $f^{(n)}(x_0)$, pak mocninnou funkci proměnné $h \in \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$\mathrm{d}^n f(a;h) = f^{(n)}(a)h^n$$

nazýváme **diferenciál n-tého řádu funkce f v bodě x_0**.

Věta (Leibnizovo pravidlo)

Nechť mají funkce f, g v bodě x_0 derivaci až do řádu n včetně. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(f \cdot g\right)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0)\,,$$

kde $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Poznámka. Například:

$$\begin{aligned} (uv)' &= uv' + u'v \\ (uv)'' &= uv'' + 2u'v' + u''v \\ (uv)''' &= uv''' + 3u'v'' + 3u''v' + u'''v \end{aligned}$$

Důkaz. Indukcí: pro $n = 1$ se jedná o derivaci součinu.

Nechť vztah platí pro n. Jeho derivací dostaneme

$$\big(f(x)g(x)\big)^{(n+1)} = \Big(\big(f(x)g(x)\big)^{(n)}\Big)' =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) =$$

$$= f^{(n+1)}(x)g(x) + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) +$$

$$+ f(x)g^{(n+1)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)\,.$$

Poznámka: Množinu všech funkcí $f : X \to \mathbb{R}$, které mají na množině X spojité derivace řádu n (a tedy i všechny derivace nižšího řádu) budeme značit $C_n(X)$.
Pro funkce spojité na množině X se používá označení $C_0(X)$.
Množina všech funkcí $f : X \to \mathbb{R}$, které mají na množině X spojité derivace všech řádů se značí $C_\infty(X)$.
Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí inkluze:

$$C_\infty(X) \subset \cdots \subset C_n(X) \subset C_{n-1}(X) \subset \cdots \subset C_1(X) \subset C_0(X)$$

Taylorův polynom

Definice. Nechť má funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivace až do řádu n včetně. **Taylorovým polynomem n-tého stupně funkce f v bodě x_0** nazýváme polynom:

$$\mathsf{T}^n f(x_0; h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}\, h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, h^n$$

Díky následující větě lze Taylorův polynom použít k aproximaci funkce.

Věta (Taylor)

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$ a v intervalu (a, b) má spojité derivace všech řádů. Pak pro každé dva body $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$ existuje bod ξ mezi body x a x_0 takový, že platí tzv. Taylorův vzorec:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}\, f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

kde

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

Číslo $R_{n+1}(x)$ se nazývá *zbytek v Lagrangeově tvaru.*

☛ ***Příklad.*** Nalezněte Taylorův vzorec pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$ v bodě $x = 0$.

Řešení.

Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$: $f^{(k)}(x) = (\mathrm{e}^x)^{(k)} = \mathrm{e}^x$, $f^{(k)}(0) = 1\,.$

Proto

$$\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x), \qquad R_{n+1}(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\,,$$

kde bod ξ leží mezi body 0 a x.

Podobně lze odvodit vzorce:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \\ + (-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} +$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!} x^{2n+2}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} +$$

$$(-1)^n \frac{1}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}} x^{n+1}\,, \quad x > -1$$