PŘEDNÁŠKA 6

PRŮBĚH FUNKCE

Monotonie funkce

Nechť má funkce f derivaci v intervalu $I = (a, b)$.

Věta. *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce f rostoucí v intervalu I.*

Důkaz. Uvažujme $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Máme dokázat, že $f(x_1) < f(x_2)$. Z Lagrangeovy věty plyne existence bodu $\xi \in (x_1, x_2)$, pro který

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1). \tag{1}$$

Z předpokladů $x_2 > x_1$ a $f'(\xi) > 0$ plyne, že na pravé straně rovnosti (1) je kladné číslo. Platí tedy $f(x_2) > f(x_1)$.

Důsledek. *Je-li funkce f klesající nebo nerostoucí v intervalu I a má tam derivaci, pak $f'(x) \le 0$.*

Analogicky lze dokázat:

Věta. *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce f neklesající v intervalu I.*

Věta. *Jestliže $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce f klesající v intervalu I.*

Důkaz. Nechť $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Máme dokázat, že pak je $f(x_1) > f(x_2)$. Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi \in (x_1, x_2)$, pro které platí (1). Protože $x_2 > x_1$ a $f'(\xi) < 0$, je na pravé straně rovnosti (1) záporné číslo, tj. $f(x_2) < f(x_1)$.

Důsledek. *Je-li funkce f rostoucí nebo neklesající v intervalu I a má tam derivaci, pak $f'(x) \geq 0$.*

Věta. *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce f nerostoucí v intervalu I.*

☛ ***Příklad.*** Určete intervaly monotonie funkce

$$f(x) = 12x - 2x^2\,.$$

Řešení.

$$f'(x) = 12 - 4x = 4(3 - x) = 0 \qquad \text{pro} \quad x = 3\,;$$

$$f(x) > 0 \ \text{ pro } \ x < 3; \qquad f(x) < 0 \ \text{ pro } \ x > 3.$$

Funkce je rostoucí v intervalu $(-\infty, 3)$, klesající v $(3, \infty)$.

Definice. Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D_f$ **lokální maximum**, resp. **lokální minimum**, právě tehdy, když existuje prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$, resp. $f(x) \geq f(x_0)$.

Nahradíme-li neostré nerovnosti nerovnostmi ostrými, mluvíme o **ostrém lokálním maximu**, resp. **ostrém lokálním minimu**.

Lokální maxima a minima nazýváme **lokální extrémy** a ostrá maxima a minima **ostrými lokálními extrémy** funkce f.

Věta. *Nechť $x_0 \in D_f$ není hraničním bodem definičního oboru D_f funkce f. Je-li $f'(a) \neq 0$, nemá funkce f v bodě x_0 lokální extrém.*

Důkaz. Nechť $f'(x_0) = A \neq 0$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ je

$$A - \varepsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < A + \varepsilon\,.$$

Předpokládejme například, že $A > 0$ a zvolme $\varepsilon = \dfrac{A}{2}$. Pak pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ platí:

$$0 < \frac{A}{2} < \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

Pro $x > a$ je $f(x) > f(a)$ a pro $x < a$ je $f(x) < f(a)$, funkce f tedy nemá v bodě x_0 lokální extrém.
Případ $A < 0$ vyřešíme obdobně. $\square$

Poznámka. Z toho, že $f'(x_0) > 0$ nebo $f'(x_0) < 0$, neplyne, že existuje okolí bodu x_0 takové, že je na něm funkce $f(x)$ rostoucí, resp. klesající.

☛ ***Příklad.***

Uvažujme funkci $f(x) = x + \pi x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ pro $x \neq 0\,;\ f(0) = 0$.

Platí $f'(0) = 1$, ale funkce není na žádném okolí bodu $x = 0$ rostoucí, protože pro dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$ je $f\left(\dfrac{1}{(2n+1/2)\pi}\right) > f\left(\dfrac{1}{(2n-1/2)\pi}\right)$.

Věta. *Nechť f je diferencovatelná funkce, nechť $f'(x_0) = 0$. Existuje-li prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$, $x < a$, je $f'(x) > 0$ a pro $x > x_0$ je $f'(x) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum. Existuje-li prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$, $x < x_0$, je $f'(x) < 0$ a pro $x > x_0$ je $f'(x) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum. Existuje-li prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ je $f'(x) < 0$ nebo $f'(x) > 0$, nemá funkce f v bodě x_0 lokální extrém.*

Důkaz. Je-li $f'(x) > 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, je funkce f na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ rostoucí, a tedy $f(x) < f(x_0)$, a na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ klesající, tedy $f(x) < f(x_0)$. To znamená, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 ostré lokální maximum. Případ, kdy $f'(x) < 0$ pro $x < x_0$ a $f'(x_0) > 0$ pro $x > x_0$, se dokáže podobně.

Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in P_\delta(x_0)$, je funkce f rostoucí v $P_\delta(x_0)$ a nemá v bodě x_0 lokální extrém. Podobně v případě, že $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$. $\square$

☛ ***Příklad.*** Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x) = 12x - 2x^2\,.$$

Řešení.

$$f'(x) = 12 - 4x = 4(3 - x) = 0 \qquad \text{pro} \quad x = 3\,;$$

$$f(x) > 0 \;\text{ pro }\; x < 3; \qquad f(x) < 0 \;\text{ pro }\; x > 3.$$

Funkce je rostoucí v intervalu $(-\infty, 3)$, klesající v $(3, \infty)$, v bodě 3 proto má ostré lokální maximum, a to 18.

Globální extrémy

Někdy je třeba nalézt **globální extrémy na kompaktní, tj. omezené a uzavřené množině** M. Jak již víme, je-li funkce $f(x)$ spojitá, existují v množině M body, ve kterých nabývá funkce $f(x)$ své největší a nejmenší hodnoty. Je zřejmé, že pokud není bod x hraničním bodem množiny M a existuje v tomto bodě nenulová derivace, nemá funkce $f(x)$ v tomto bodě globální extrém. Zbývá nám tedy vyšetřit ostatní body množiny M :

- hraniční body množiny M
- body, v nichž je derivace rovna nule
- body, ve kterých derivace neexistuje

Je-li těchto bodů pouze konečný počet, stačí pro nalezení extrémů vybrat body, ve kterých je největší a nejmenší hodnota funkce $f(x)$.

☛ ***Příklad.*** Nalezněte globální extrémy funkce

$$f(x) = |x^3 - 3x|\,, x \in \langle -2\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle\,.$$

Řešení. Funkce f je spojitá na kompaktním intervalu $\langle -2\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle$, má proto na tomto intervalu globální maximum i minimum.

Podezřelé body:

- Krajní body intervalu, tj. $-2\sqrt{3}$ a $\sqrt{3}$
- $f'(x)$ neexistuje pro $-\sqrt{3}$, 0 a $\sqrt{3}$
- $f'(x) = 0$ pro $-1, 1$

Nyní stačí nalézt funkční hodnoty v podezřelých bodech:

$$f(-2\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}\,, \quad f(\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}) = f(0) = 0\,,$$

$$f(-1) = f(1) = 2\,.$$

Funkce f nabývá globálního maxima $18\sqrt{3}$ v bodě $-2\sqrt{3}$ a globálního minima 0 v bodech $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ a 0.

Konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body

Definice. Nechť funkce f má derivaci v bodě x_0. Říkáme, že f je **konvexní**, resp. **konkávní v bodě** x_0 právě tehdy, když existuje takové okolí $\mathrm{U}(x_0;\delta)$ bodu x_0, že graf funkce f pro $x \in \mathrm{U}(x_0;\delta)$ leží nad, resp. pod tečnou grafu v bodě x_0.

Říkáme, že funkce f je **konvexní**, resp. **konkávní v intervalu** (a, b) právě tehdy, když je konvexní, resp. konkávní v každém bodě intervalu (a, b).

Říkáme, že bod $x_0 \in \mathrm{D}_f$ je **inflexním bodem** funkce f právě tehdy, když v bodě $\big(x_0, f(x_0)\big)$ existuje tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ a funkce se v tomto bodě mění z konvexní na konkávní nebo obráceně.

Věta. Podmínky pro konvexnost a konkávnost funkce.
Nechť funkce $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *má derivaci v intervalu* (a,b)*. Pak platí:*

(i) *Je-li* f' *rostoucí v intervalu* (a,b)*, je funkce* f *konvexní v intervalu* (a,b)*.*

(ii) *Je-li* f' *klesající v intervalu* (a,b)*, je funkce* f *konkávní v intervalu* (a,b)*.*

(iii) *Má-li funkce* f' *v bodě* $x_0 \in (a,b)$ *lokální extrém, je* x_0 *inflexním bodem funkce* f*.*

Odtud pak plyne:

Věta. *Nechť funkce* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *má druhou derivaci v intervalu* (a,b)*. Pak platí:*

(i) *Je-li* $f''(x) > 0$ *pro všechna* $x \in (a,b)$*, je funkce* f *konvexní v intervalu* (a,b)*.*

(ii) *Je-li* $f''(x) < 0$ *pro všechna* $x \in (a,b)$*, je funkce* f *konkávní v intervalu* (a,b)*.*

(iii) *Je-li* $f''(x_0) = 0$ *a derivace* f'' *mění v bodě* $x_0 \in (a,b)$ *znaménko, má funkce* f *v bodě* x_0 *inflexní bod.*

☛ ***Příklad.*** Nalezněte inflexní body funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2x + 2\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

a určete intervaly konvexnosti a konkávnosti.

Řešení. $f''(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 1$. Dále platí, že $f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ a $f''(x) < 0$ pro $x \in (-1, 1)$:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\smile$	inf. bod	$\frown$	inf. bod	$\smile$

Daná funkce je tedy konvexní v intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, konkávní v intervalu $(-1, 1)$. Druhá derivace mění znaménko v bodech $x = -1$ a $x = 1$, takže funkce má dva inflexní body, a to $x = -1$ a $x = 1$.

Asymptoty grafu funkce

Definice. Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **svislou** (**vertikální**) **asymptotu** $x = x_0$ právě tehdy, když alespoň jedna jednostranná limita je v tomto bodě nevlastní.

Říkáme, že funkce f má v bodě ∞, resp. $-\infty$ **vodorovnou** (**horizontální**) **asymptotu** $y = b$ právě tehdy, když

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b\,, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b\,.$$

Říkáme, že funkce f má v bodě ∞, resp. $-\infty$ **šikmou asymptotu** $y = kx + q\,,\ k, q \in \mathbb{R}\,,\ k \neq 0\,$, právě tehdy, když

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-q) = 0\,, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx-q) = 0.$$

Věta. *Má-li funkce f v bodě ∞ šikmou asymptotu $y = kx+q$, pak platí*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = q\,.$$

Důkaz. Rovnost pro výpočet k plyne ze vztahu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k - \lim_{x\to\infty} \frac{q}{x} = 0.$$

Rovnost pro výpočet q plyne přímo z definice šikmé asymptoty.

☞ ***Příklad.*** Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Funkce f není definovaná v okolí bodu $x = 0$; Protože

$$\lim_{x\to 0-} \frac{2x^2+x+1}{x} = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{2x^2+x+1}{x} = \infty\,,$$

je přímka $x = 0$ svislou asymptotou grafu funkce f.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+1}{x^2} = 2 = k$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx] &= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2+x+1}{x} - 2x\right] = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+1-2x^2}{x} = 1 = q\,.\end{aligned}$$

Jelikož obě limity jsou vlastní, má graf dané funkce v bodě ∞ šikmou asymptotu $y = 2x+1$. Stejná přímka je šikmou asymptotou grafu funkce f také v bodě $-\infty$.

☛ ***Příklad.*** Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}\,, \quad x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty).$$

Řešení. Nejdříve vyšetříme chování funkce v okolí bodů $x=-1$ a $x=1$, v nichž funkce není definovaná:

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = -\infty\,.$$

Přímky o rovnicích $x = -1$ a $x = 1$ jsou tedy svislými asymptotami grafu dané funkce.
Dále je

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0,$$

takže funkce f má v bodech $\pm\infty$ vodorovnou asymptotu

$$y = 0\,.$$

☛ ***Příklad.*** Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce

$$f(x) = \ln x - 5x\,, \quad x \in (0, \infty).$$

Řešení. Nejdříve vyšetříme chování funkce v pravém okolí bodů $x = 0$, který leží na hranici definičního oboru. Platí $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, takže přímka o rovnici $x = 0$ je svislou asymptotou grafu dané funkce. Dále je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, takže by funkce mohla mít v bodě ∞ šikmou asymptotu. Budeme tedy hledat limity:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x - 5x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} - 5 = -5.$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (\ln x - 5x + 5x) = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$$

Druhá limita je nevlastní, funkce proto šikmou asymptotu nemá.

Vyšetřování průběhu funkce

Při vyšetřování průběhu funkce získáváme postupně následující informace:

- Definiční obor funkce, body nespojitosti, nulové body funkce, intervaly, kde je funkce kladná a kde je záporná
- Zvláštní vlastnosti funkce, např. sudost, lichost, periodičnost, prostota, omezenost.
- Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti funkce a v krajních bodech definičního oboru.
- Intervaly monotonie
- Stacionární body, lokální extrémy funkce.
- Intervaly konvexnosti a konkávnosti, inflexní body.

- Asymptoty grafu funkce.
- Graf funkce sestrojujeme na základě takto získaných informací a pomocí dalších údajů jako jsou např.
  - hodnoty funkce v některých význačných bodech (nulové body první a druhé derivace dané funkce);
  - průsečíky grafu funkce s osami souřadnic;
  - tečny v inflexních bodech funkce.

☛ ***Příklad.*** Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

Řešení.

$$\mathrm{D}_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Funkce není ani sudá, ani lichá, neboť neplatí žádná z rovností $f(-x) = f(x)$ nebo $f(-x) = -f(x)$ pro všechna $x \in \mathrm{D}_f$. Dále pro žádné $c \neq 0$ neplatí rovnost $f(x+c) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathrm{D}_\mathrm{f}$, funkce proto není ani periodická. Žádnou z takových speciálních vlastností tedy nebudeme moci při konstrukci grafu využít.

Bod $x = -1$ je bodem nespojitosti a pro jednostranné limity funkce v tomto bodě platí

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1-} f(x) = -\infty.$$

Pro limity ve zbývajících dvou bodech hranice definičního oboru platí:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$ je funkce spojitá. Pro x záporná nabývá záporné hodnoty, pro x kladná kladné hodnoty. Graf protíná obě souřadnicové osy v počátku.

Derivace $f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$ má dva nulové body $x = -3$ a $x = 0$, takže funkce má dva stacionární body $x = -3$ a $x = 0$. Je $f(0) = 0$ a $f(-3) = -27/8$. Derivace $f'(x)$ je kladná pro $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$ a záporná pro $x \in (-3, -1)$, takže funkce je v intervalech $(-\infty, -3)$ a $(-1, \infty)$ rostoucí, v intervalu$(-3, -1)$ klesající. Tedy v bodě $x = -3$ je lokální maximum $f(-3) = -27/8$.

Druhá derivace $f''(x) = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$ má jeden nulový bod $x = 0$. Pro x záporná nabývá záporné hodnoty, pro x kladná kladné hodnoty. Funkce f je tedy v intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$ konkávní a v intervalu $(0, \infty)$ konvexní. Bod $x = 0$ je inflexním bodem. Z hodnot limit v bodě -1 plyne, že přímka $x = -1$ je svislou asymptotou grafu funkce f. Jelikož funkce má v nevlastních bodech limity $\pm\infty$, má smysl pokoušet se najít rovnici šikmé asymptoty. Vypočteme nejdříve limitu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2} = k$$

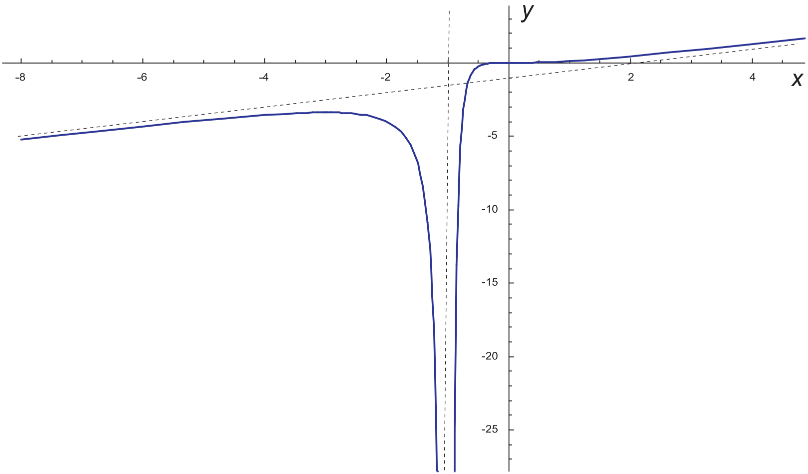
a limitu

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x(x+1)^2}{2(x+1)^2}\right] = -1 = q\,.$$

Jelikož obě limity jsou vlastní, má graf dané funkce v bodě ∞ šikmou asymptotu o rovnici $y = x/2 - 1$. Stejná přímka

je šikmou asymptotou grafu funkce f také v bodě $-\infty$.
Údaje o funkci, získané během výpočtu, můžeme zanést do tabulky, která může mít např. takovýto tvar.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f(x)$	$-\infty \leftarrow$	$-\frac{27}{8}$	$\rightarrow -\infty$	N	$-\infty \leftarrow$	0	$\rightarrow \infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$
$f''(x)$	$-$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$\frown$		$\frown$		$\frown$	inf. bod	$\smile$
asym.	$y = \frac{x}{2} - 1$			$x = -1$			$y = \frac{x}{2} - 1$



y
x
-8
-6
-4
-2
2
4
-5
-10
-15
-20
-25