PŘEDNÁŠKA 7

NEURČITÝ INTEGRÁL

Primitivní funkce

Definice. Nechť je dána funkce f definovaná v otevřeném (omezeném nebo neomezeném) intervalu (a,b). Každou funkci F, pro kterou platí:

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro každé } x \in (a,b)\,,$$

nazveme **primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a,b)**.

☛ ***Příklad.***

(a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = x^3$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

(b) $F(x) = -x^{-1}$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = x^{-2}$ v intervalu $(-\infty, 0)$ a v intervalu $(0, +\infty)$, nikoli však např. v intervalu $(-1, 5)$, kde leží bod $0 \notin D_f$.

Poznámka. Je-li F primitivní funkce k funkci f v intervalu (a,b), pak je zřejmě i každá funkce tvaru

$$G(x) = F(x) + c\,,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a,b). Následující věta říká, že tímto jsou již všechny primitivní funkce vyčerpány:

Věta. *Jsou-li F, G dvě primitivní funkce k funkci f v intervalu (a,b), pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$, že pro všechna $x \in (a,b)$ platí:*

$$G(x) = F(x) + c\ .$$

Definice. Má-li funkce f nějakou primitivní funkci na intervalu (a, b), pak množinu všech jejích primitivních funkcí v (a, b) nazýváme **neurčitým integrálem funkce f v intervalu (a, b)**. Pro neurčitý integrál funkce f používáme symbol $\int f$ nebo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Symbol $\int$ se nazývá **integrační znak**, funkce f se nazývá **integrand**. Proměnná x se nazývá **integrační proměnná** (nezáleží na tom, jaký symbol použijeme k označení integrační proměnné).

Poznámka. Je-li funkce F primitivní k funkci f v intervalu (a, b), pak píšeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c\,.$$

Konstanta c se nazývá **integrační konstanta**. Chceme-li z integrálu získat jednu primitivní funkci, musíme pevně zvolit hodnotu integrační konstanty.

Věta (Aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru).

1. *Má-li funkce f integrál v intervalu (a,b) a je-li I otevřený podinterval intervalu (a,b), pak funkce f má integrál také v intervalu I.*

2. *Má-li funkce f integrál v intervalech $I_1, I_2, \cdots, I_m$ a je-li jejich sjednocení $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_m$ interval, pak má funkce f integrál také v intervalu I.*

Poznámka. Tvrzení 2 se používá i v případech, kdy sjednocení I integračních oborů I_n není interval. Tuto skutečnost ilustruje následující příklad.

☛ ***Příklad.***

$$x \in (0, \infty)\ :\qquad (\ln x)' = 1/x\,;$$
$$x \in (-\infty, 0)\ :\quad (\ln(-x))' = 1/x\,.$$

Je tedy

$$\int 1/x\,\mathrm{d}x = \ln x + c \qquad \text{v intervalu}\ \ (0, \infty)\,;$$
$$\int 1/x\,\mathrm{d}x = \ln(-x) + c \quad \text{v intervalu}\ \ (-\infty, 0)\,.$$

Funkce $\ln|x|$ je tedy primitivní funkcí k funkci $1/x$ jak v intervalu $(-\infty, 0)$, tak i v intervalu $(0, \infty)$. Proto obvykle píšeme:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c \quad \text{v}\ M = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Je třeba si uvědomit, že tento zápis není zcela korektní: množina M je sjednocením dvou disjunktních intervalů, integrační konstantu c proto může být zvolena libovolně na každém z obou intervalů.

Věta (Linearita integrálu).

1. *Nechť funkce F, resp. G je primitivní funkce k funkci f, resp. g v intervalu (a, b) a nechť r je číslo. Pak funkce $F + G$ je primitivní funkce k funkci $f + g$ a funkce rF je primitivní funkce k funkci rf v intervalu (a, b).*

2. *Nechť funkce f, g mají neurčité integrály v intervalu (a, b) a nechť r je číslo. Pak také funkce $f + g$ a funkce rf má neurčitý integrál v intervalu (a, b) a platí:*

$$
\begin{aligned}
\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\,, \\
\int r f(x)\,\mathrm{d}x &= r \int f(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
$$

3. *Nechť funkce $f_1, f_2, \cdots, f_m$ mají neurčité integrály v (a, b) a nechť $r_1, r_2, \cdots, r_m$ jsou konstanty. Pak také funkce $r_1 f_1 + r_2 f_2 + \cdots + r_m f_m$ má integrál v intervalu (a, b) a platí:*

$$\int (r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x) + \cdots + r_n f_n(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= r_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + r_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + r_n \int f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka. Stručně řečeno, integrál lineární kombinace funkcí je roven lineární kombinaci integrálů těchto funkcí, pokud příslušné integrály existují.

Základní integrační vzorce

Známé vzorce z diferenciálního počtu nám dávají následující výsledky (c je integrační konstanta):

$$1)\quad \int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{Z},\ n > 0; \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ pro } n \in \mathbb{Z},\ n < -1, \\ x > 0 \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{R},\ n \notin \mathbb{Z}. \end{array}$$

$$2)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

$$3)\quad \int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + c; \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$4)\quad \int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c, \qquad x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1.$$

5) $$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

6) $$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

7) $$\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c,$$
$$x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}.$$

8) $$\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c,$$
$$x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

9) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \arcsin x + c, \\ -\arccos x + c, \end{cases} \qquad x \in (-1,1).$$

10) $$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c, \\ -\operatorname{arccotg}\ x + c, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

11) $$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + c; \qquad x \in \mathbb{R}.$$

12) $$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + c; \qquad x \in \mathbb{R}.$$

☛ ***Příklad.*** Vypočítejte následující integrály:

(a) $I = \int (5x^4 - 2x^3 - 3x + 7)\,\mathrm{d}x$

Řešení. Podle věty o linearitě integrálu lze psát:

$$I = \int (5x^4 - 2x^3 - 3x + 7)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 5\int x^4\,\mathrm{d}x - 2\int x^3\,\mathrm{d}x - 3\int x\,\mathrm{d}x + 7\int 1\,\mathrm{d}x =$$

$$= 5\left(\frac{x^5}{5} + c_1\right) - 2\left(\frac{x^4}{4} + c_2\right) - 3\left(\frac{x^2}{2} + c_4\right) + 7(x + c_5) =$$

$$= x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) $$I = \int \frac{2x^3 - 3\sqrt{x} + 5}{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení. Po vydělení čitatele integrandu jmenovatelem stačí opět využít základní vzorce:

$$I = \int \frac{2x^3 - 3\sqrt{x} + 5}{x}\,\mathrm{d}x = \int (2x^2 - 3x^{-\frac{1}{2}} + 5x^{-1})\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int x^2\,\mathrm{d}x - 3\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + 5\int x^{-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) - 3\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c_2\right) + 5\left(\ln|x| + c_3\right) =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - 6\sqrt{x} + \ln|x| + c\,, \qquad x \in (0, +\infty)\,.$$

(c) $I = \int \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x$

Řešení. Uvědomme si, že $(\mathrm{e}^{4x})' = 4\mathrm{e}^{4x}$, proto abychom při zpětné derivaci primitivní funkce získali funkci zadanou, musí být:

$$I = \int \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{4x}}{4} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(d) $I = \int \cos{(3x-2)}\,\mathrm{d}x$

Řešení. Protože $(\cos{(3x-2)})' = 3\sin{(3x-2)}$, bude:

$$I = \int \cos{(3x-2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin{(3x-2)}}{3} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Metoda integrace per partes

Věta (Itegrace per partes). *Nechť funkce u, v jsou spojitě diferencovatelné v intervalu (a, b). Pak platí:*

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad (1)$$

Důkaz. Z věty o derivování součinu plyne:

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{v intervalu} \quad (a, b),$$

proto v intervalu (a, b) platí:

$$\begin{aligned} \int (uv)' &= \int (u'v + uv') \\ uv + c &= \int u'v + \int uv' \\ \int u'v &= uv - \int uv' + c \end{aligned}$$

Poslední rovnost je ekvivalentní s dokazovaným vztahem.

Využití metody per partes ke zjednodušení integrované funkce

☛ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Abychom integrovanou funkci skutečně zjednodušili, je dobré zvolit pro derivování funkci x (v opačném případě by v se integrandu objevilo x^2, což by bylo ještě komplikovanější):

$$\int x \cos x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x \,, & u = \sin x \\ v = x \,, & v' = 1 \end{array} \right| =$$

$$= x \sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + c \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,.$$

☛ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Postupným derivováním funkce x^2 zjednodušíme integrand na jedinou goniometrickou funkci:

$$\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin x \,, & u = -\cos x \\ v = x^2 \,, & v' = 2x \end{array} \right| =$$

$$= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) \, \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x \,, & u = \sin x \\ v = x \,, & v' = 1 \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x \right) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,.$$

☛ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $\int x^3 \mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrand postupně zjednodušíme:

$$\int x^3 \mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{5x}, & u = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} \\ v = x^3, & v' = 3x^2 \end{array} \right| =$$

$$= \tfrac{1}{5}x^3\mathrm{e}^{5x} - \tfrac{3}{5}\int x^2\mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{5x}, & u = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} \\ v = x^2, & v' = 2x \end{array} \right| =$$

$$= \tfrac{1}{5}x^3\mathrm{e}^{5x} - \tfrac{3}{5}\left(\tfrac{1}{5}x^2\mathrm{e}^{5x} - \tfrac{2}{5}\int x\mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x\right) = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{5x}, & u = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} \\ v = x, & v' = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \tfrac{1}{5}x^3\mathrm{e}^{5x} - \tfrac{3}{25}x^2\mathrm{e}^{5x} + \tfrac{6}{25}\left(\tfrac{1}{5}x\mathrm{e}^{5x} - \tfrac{1}{5}\int \mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \tfrac{1}{5}x^3\mathrm{e}^{5x} - \tfrac{3}{25}x^2\mathrm{e}^{5x} + \tfrac{6}{125}x\mathrm{e}^{5x} - \tfrac{6}{125}\mathrm{e}^{5x} + c, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

☛ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $\int x^5 \ln x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Tentokrát si uvědomíme, že ke zjednodušení dojde, budeme-li derivovat funkci $\ln x$:

$$\int x^5 \ln x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = x^5 \,, & u = \dfrac{x^6}{6} \\[2ex] v = \ln x \,, & v' = \dfrac{1}{x} \end{array} \right| = \tfrac{1}{6} x^6 \ln x - \tfrac{1}{6} \int \frac{x^6}{x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \tfrac{1}{6} x^6 \ln x - \tfrac{1}{6} \int x^5 \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{6} x^6 \ln x - \tfrac{1}{36} x^6 + c \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,.$$

☛ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $\int \ln x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Na první pohled integrand není součinem dvou funkcí, přesto lze metodu per partes s úspěchem použít. Při integraci by nám velmi pomohlo, kdybychom mohli funkci $\ln x$ nahradit její derivací $1/x$. K tomu si stačí zadaný integrand představit jako součin $1 \ln x$:

$$\int 1 \ln x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = 1\,, & u = x \\ v = \ln x\,, & v' = \dfrac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= x \ln x - \int \frac{x}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Nepřímé nalezení neurčitého integrálu: per partes vedoucí na řešení rovnice

V některých situacích se přímé integraci vyhneme tím, že opakováním metody per partes dospějeme k rovnici obsahující na obou stranách hledaný neurčitý integrál. Rovnici pak stačí vyřešit, aniž bychom prováděli integraci celého integrandu (typickým příkladem je součin funkcí $\mathrm{e}^x, \sin x, \cos x$, které se při derivování či integrování buď nemění, nebo se po určité době opakují):

$$I = h(x) + kI\,.$$

V následujícím příkladu aplikujeme metodu per partes dvakrát, čímž obdržíme na pravé straně opět původní integrál.

☛ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x$.

Řešení.

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^x\,, & u = \mathrm{e}^x \\ v = \cos x\,, & v' = -\sin x \end{array} \right| =$$

$$= \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^x\,, & u = \mathrm{e}^x \\ v = \sin x\,, & v' = \cos x \end{array} \right| =$$

$$= \mathrm{e}^x \cos x + \left(\mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x\right)$$

Tím jsme získali rovnici, kterou snadno vyřešíme:

$$\begin{aligned} \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x \\ 2\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x \\ \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x\right) \end{aligned}$$

Substituční metoda

Věta (První věta o substituci v neurčitém integrálu) *Nechť v intervalu J existuje integrál na levé straně rovnosti*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

a rovná se $F(x)$. Nechť funkce $x = \varphi(t)$ je diferencovatelná v intervalu I takovém, že $\varphi(I) \subset J$. Pak v intervalu I existuje integrál na pravé straně rovnosti (2) a rovná se $F\big(\varphi(t)\big)$.

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k funkci f v intervalu J. Protože funkce φ zobrazuje interval I do intervalu J, jsou složené funkce $F(\varphi(t))$ a $f(\varphi(t))$ definované v intervalu I a podle věty o derivaci složené funkce platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,, \quad t \in I.$$

Odtud plyne dokazované tvrzení.

Poznámka. První věta o substituci je užitečná v případech, kdy je integrál „připravený“ ve tvaru

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Pak stačí ověřit, že jsou splněny předpoklady věty.

☛ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $\int \mathrm{e}^{5t+3}\,\mathrm{d}t\,.$

Řešení. Integrand je spojitý v $\mathbb{R}$, integrál proto existuje. Označme:

$$x = \varphi(t) = 5t + 3, \qquad \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 5\,\mathrm{d}t\,.$$

Všechny předpoklady věty jsou splněny a lze psát:

$$\int \mathrm{e}^{5t+3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\int \mathrm{e}^{5t+3}5\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{x} + c =$$

$$= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5t+3} + c\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

☛ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+2)^3}\,\mathrm{d}t\,.$

Řešení. Integrand je spojitý v $\mathbb{R}$, integrál proto existuje v $\mathbb{R}$,. Postupujme podobně jako v předchozím příkladu:

$$\int \frac{\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+2)^3}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{array}{c} x = \mathrm{e}^t + 2 \\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{-3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c = -\frac{1}{4(\mathrm{e}^t+2)^4} + c\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Poznámka. Samozřejmě nezáleží na tom, jakými písmeny jsou jednotlivé proměnné označeny.

☛ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{(\ln x)\sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}{x}\,\mathrm{d}x$ v intervalu $I=(0,+\infty)$.

Řešení.

$$\int \frac{(\ln x)\sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}\,(\ln x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}\,(2\ln x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} t = 5+\ln^2 x \\ \mathrm{d}t = (2\ln x)\,\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -2\sqrt{t} + c =$$

$$= -2\sqrt{5+\ln^2 x} + c\,, \quad x \in (0,+\infty)\,.$$

Věta (Druhá věta o substituci v neurčitém integrálu) *Nechť v intervalu I existuje integrál na levé straně rovnosti*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

a rovná se $F(t)$, nechť funkce $x = \varphi(t)$ má nenulovou derivaci v každém bodě intervalu I a nechť zobrazuje interval I na interval $J = \varphi(I)$. Pak v intervalu J existuje integrál na pravé straně rovnosti (3) a rovná se $F\big(\psi(x)\big)$, kde $\psi(x)$ je inverzní funkce k funkci $x = \varphi(t)$.

Důkaz. Funkce φ je podle předpokladu prostá v intervalu I. Označme $t = \psi(x)$ funkci inverzní k funkci φ. Tato funkce zobrazuje interval J na interval I.
Podle předpokladu existuje funkce G, diferencovatelná v I taková, že

$$G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,, \qquad t \in I\,.$$

Označme

$$F(x) = G(\psi(x))\,.$$

Podle věty o derivaci složené funkce existuje v intervalu J derivace F' a platí $F'(x) = G'(\psi(x))\psi'(x) = G'(t)\psi'(x) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \cdot 1/\varphi'(t) = f(x)$, $x \in J$.

Poznámka. Místo předpokladu $\varphi'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in I$ stačí požadovat, aby funkce φ byla ryze monotónní a aby bylo $\varphi'(t) = 0$ pro nejvýše konečný počet bodů $t \in I$.

☛ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,, x \in (-1,1)$.

Řešení. Integrand je spojitý v intervalu $J = (-1,1)$, takže integrál v tomto intervalu existuje. Abychom odstranili odmocninu v integrandu, využijeme identitu $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ a substituci:

$$
\begin{aligned}
&x = \varphi(t) = \sin t\,; \quad \varphi(t) \text{ zobrazuje } (-\pi/2, \pi/2) \text{ na } (-1,1)\,;\\
&\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t\,; \qquad \varphi'(t) = (\sin t)' = \cos t \neq 0\,;\\
&\sqrt{1-x^2} = |\cos t| = \cos t > 0\,;\\
&t = \arcsin x
\end{aligned}
$$

$$
\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{5}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t = 5\int 1\,\mathrm{d}t = 5t + c =
$$

$$
= 5\arcsin x + t, \quad x \in (-1,1)\,.
$$

Integrace racionálních funkcí

Věta (Rozkladu na součet parciálních zlomků)
Nechť $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální lomená funkce a nechť jmenovatel $Q(x)$ lze psát ve tvaru

$$Q(x) = a(x-x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_r)^{k_r} \cdot (x^2+2p_1x+q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+2p_sx+q_s)^{l_s}$$

kde polynomy $x^2 + 2p_ix + q_i$, $i = 1, \ldots, s$, jsou v reálném oboru nerozložitelné. Potom lze $R(x)$ vyjádřit – až na pořadí sčítanců – právě jedním způsobem ve tvaru

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_k} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+2p_ix+q_i)^j},$$

kde $p(x)$ je polynom, A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} jsou reálné konstanty; rovnost platí pro všechna $x \in \mathsf{D}_R$, tj. pro všechna reálná x různá od kořenů polynomu $Q(x)$ ve jmenovateli.

☛ ***Příklad.*** Rozložte funkci na součet parciálních zlomků:

$$R(x) = \frac{3x+5}{x^2-3x+2}$$

Řešení. Polynom ve jmenovateli má kořeny 1 a 2, proto:

$$R(x) = \frac{3x+5}{x^2-3x+2} = \frac{3x+5}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}\,.$$

Při hledání koeficientů A, B převeďme oba zlomky vpravo na společného jmenovatele. Aby byl výsledek identický s původní zadanou funkcí, musí být v čitateli identické funkce, tj. koeficienty u všech mocnin proměnné x musí být shodné.

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\color{blue}{3x} + \color{red}{5} = \color{blue}{(A+B)}x + \color{red}{(-2A-B)}$$

$$
\begin{array}{rcrcl}
x^1 & \dots & 3 & = & A+B \\
x^0 & \dots & 5 & = & -2A-B \\
\hline
\multicolumn{5}{c}{A=-8, \quad B=11}
\end{array}
$$

Celkem je tedy

$$R(x) = \frac{3x+5}{x^2-3x+2} = -\frac{8}{x-1} + \frac{11}{x-2} \; .$$

☛ ***Příklad.*** Rozložte funkci na součet parciálních zlomků:

$$R(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)}$$

Řešení.

$$R(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)} &= \frac{A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} \\
3x+5 &= A(x^2-3x+2) + B(x-2) + C(x^2-2x+ \\
{\color{blue}3x} + {\color{red}5} &= (A+C)x^2 + {\color{blue}(-3A+B-2C)x} + {\color{red}(2A-2}
\end{aligned}$$

Aby byly funkce na obou stranách rovnice identické, musí platit:

$$\begin{array}{rcll} x^2 \; \dots \; 0 & = & A + C & \qquad (\rightarrow \; A = -C) \\ x^1 \; \dots \; 3 & = & -3A + B - 2C & \\ x^0 \; \dots \; 5 & = & 2A - 2B + C & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3 & = & -A + B \\ 5 & = & A - 2B \\ \hline \end{array}$$

$$B = -8, \quad A = -11, \quad C = 11$$

Celkem je tedy

$$R(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{11}{x-1} - \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{11}{x-2}\,.$$

Poznámka. Uvědomme si, že pokud bychom hledali rozklad pouze ve tvaru

$$R(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-2}\,,$$

získali bychom podmínku

$$\begin{aligned} 3x+5 &= A(x-2)+B(x-1)^2 \\ 3x+5 &= A(x-2)+B(x^2-2x+1) \\ 3x+5 &= Bx^2+(A-2B)x+(-2A+B) \end{aligned}$$

a příslušnou soustavu rovnic, která nemá řešení (máme jen dvě proměnné a tři rovnice, z nichž žádná není lineární kombinací ostatních)

$$\begin{array}{llcl} x^2 \ \ldots & 0 & = & B \\ x^1 \ \ldots & 3 & = & A-2B \\ x^0 \ \ldots & 5 & = & -2A+B \\ \hline \end{array}$$

$$B=0, \quad A=3 \ \wedge \ A=-\frac{5}{2}$$

Výpočet integrálu racionální funkce

Danou racionální funkci nejprve rozložíme na součet parciálních zlomků. Není-li stupeň polynomu v čitateli menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, provedeme nejprve částečné dělené polynomů.

Poté stačí zintegrovat jednotlivé zlomky.

☛ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x}$.

Řešení.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x} = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{2-3x}(-3)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + c.$$

☛ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+5)^3}$.

Řešení.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+5)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+5)^3}\,2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x+5)^{-3}\,2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+5)^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{4(2x+5)^2} + c\,.$$

☛ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $I = \displaystyle\int \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)}\,\mathrm{d}x\,.$

Řešení. Po rozkladu na parciální zlomky obdržíme:

$$I = \int \left(-\frac{11}{x-1} - \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{11}{x-2} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= -11 \ln|x-1| - 8 \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + 11 \ln|x-2| + c =$$

$$= 11 \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + \frac{8}{x-1} + c\,.$$

☛ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{2 + x^2}$.

Řešení. Polynom ve jmenovateli je v reálném oboru nerozložitelný. Integrace povede na arctg:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c\,.$$

☞ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+2}\,.$

Řešení.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\left(\frac{3x^2}{2}+1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+1} \sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + c\,.$$

☞ ***Příklad.*** Vypočítejte integrál $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-3x+6}\,.$

Řešení.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 - 3x + 6} = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - \frac{3}{2}x + 3} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{16}} =$$

$$\frac{16}{2 \cdot 39} \frac{\sqrt{39}}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{39}}(x - \frac{3}{4})\right)^2 + 1} \frac{4}{\sqrt{39}} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{4}{\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{4}{\sqrt{39}} \left(x - \frac{3}{4}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{4x - 3}{\sqrt{39}} + c.$$

Převedení integrandu na racionální funkci

Pomocí druhé věty o substituci lze řadu integrálů převést na integrály racionální funkce. Přehled substitucí užitečných v jednotlivých případech je uveden ve skriptech na str. 103–110.