Derivace a diferenciál funkce

Dokažte pomocí definice, že derivace funkce $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, je $f'(x) = nx^{n-1}$.

Dokažte pomocí definice, že derivace funkce $f(x) = \ln x$ je $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Podle definice derivace vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \sin 3x$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Podle definice derivace vypočtěte derivaci funkce:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & f(x) = 2x^2 + 3x - 4 & \text{v bodě } x = 2\,; \\ \text{b)} & f(x) = |x+1| & \text{v bodě } x = -1\,; \\ \text{c)} & f(x) = \sqrt[3]{x^2} & \text{v bodě } x = 0\,. \end{array}$$

Vypočtěte první derivaci funkce v obecném bodě $x \in D_f$:

a) $f(x) = 1 + 3x - 2x^2 + x^3$ $\quad \left[f'(x) = 3 - 4x + 3x^2\,,\ x \in \mathbb{R}\right]$

b) $f(x) = (2-x)(x+3)$ $\quad \left[f'(x) = -2x - 1\,,\ x \in \mathbb{R}\right]$

c) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\,,\ |x| \neq 1\right]$

d) $f(x) = \left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)^3$ $\quad \left[f'(x) = 3\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)^2 \cdot \dfrac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}\,,\ x \neq -1\right]$

Vypočtěte první derivaci funkce v obecném bodě $x \in D_f$:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{2}{3}\,x^{-1/3} + x^{-3/2}\,,\ x > 0\right]$

b) $f(x) = x^5\,\sqrt[3]{x^6-8}$ $\quad \left[f'(x) = 5x^4(x^6-8)^{1/3} + 2x^{10}(x^6-8)^{-2/3}\,,\ |x| \neq \sqrt[6]{8}\right]$

c) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

$$\left[f'(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^{-1/2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-1/2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\,x^{-1/2}\right),\ x > 0\right]$$

Vypočtěte první derivaci funkce v obecném bodě $x \in D_f$:

a) $f(x) = \cos(4x+7)$ $\quad \left[f'(x) = -4\sin(4x+7)\,,\ x \in \mathbb{R}\right]$

b) $f(x) = \cos^3(4x+7)$ $\quad \left[f'(x) = -12\cos^2(4x+7)\cdot\sin(4x+7)\,,\ x \in \mathbb{R}\right]$

c) $f(x) = \cos(4x+7)^3$ $\quad \left[f'(x) = -12(4x+7)^2\cdot\sin(4x+7)^3\,,\ x \in \mathbb{R}\right]$

Vypočtěte první derivaci funkce v obecném bodě $x \in D_f$:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{-1}{x\cdot\ln^2 x}\,,\ x > 0\right]$

b) $f(x) = \ln(\operatorname{tg} x)$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{2}{\sin 2x}\,,\ x \neq k\cdot\dfrac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\right]$

c) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ $\quad \left[f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}\,,\ x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\right]$

Vypočtěte první derivaci funkce v obecném bodě $x \in D_f$:

a) $f(x) = x^{2x}$ $\quad \left[f'(x) = 2x^{2x}(1+\ln x)\,,\ x > 0\right]$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

b) $f(x) = \sqrt[x]{(x-1)^3}$ $\left[f'(x) = \sqrt[x]{(x-1)^3} \left(\frac{3}{x^2-x} - \frac{3\ln(x-1)}{x^2} \right) \ , \ x > 1 \right]$

c) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$

$$\left[f'(x) = (\cos x)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) \ , \ x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right]$$

Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le x_0 \\ ax + b & x > x_0 \end{cases}$$

Jak je nutné volit x_0, a a b, aby funkce $f(x)$ byla spojitá v bodě x_0 a měla v tomto bodě derivaci?

$$\left[x_0 = \frac{a}{2} \ , \ b = -\frac{a^2}{4} \ , \ a \text{ libovolné} \right]$$

Funkce

$$f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

je definována jako součin dvou funkcí, z nichž druhá nemá derivaci v bodě $x = 0$. Existuje derivace $f'(0)$? [ano , $f'(0) = 0$]

Ukažte, že derivace sudé funkce je funkce lichá.

Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ v bodě $[-2; ?]$ grafu.

[tečna: $y = 5$; normála: $x = -2$]

Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ v bodě grafu, jehož x–ová souřadnice je $x = \frac{\pi}{8}$.

$$\left[\text{tečna: } y - 1 = 4 \left(x - \frac{\pi}{8} \right) \ ; \ \text{normála: } y - 1 = -\frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{8} \right) \right]$$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = x \ln x$ rovnoběžné s přímkou $p \equiv 2x - 2y + 3$.

$[x - y - 3\mathrm{e}^{-2} = 0]$

Určete tečny k parabolu $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ vedené z bodu $B = [2; 1]$.

$$[\tau_1 \equiv y - 7 - 2\sqrt{6} = (2 + \sqrt{6})(x - 2 - \sqrt{6}) \ ; \ \tau_2 \equiv y - 7 + 2\sqrt{6} = (2 - \sqrt{6})(x - 2 + \sqrt{6})]$$

Určete diferenciál funkce $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ v bodě $x = 1$ a zjistěte, jak se liší od přírůstku funkce pro $\triangle x = h = 0.01$. $[\mathrm{d}f(1; h) = 9h \ ; \ \triangle f - \mathrm{d}f = 0.000601]$

Určete přibližně hodnotu $\sin 59°57'$. $[\sin 59°57' \doteq 0.86559]$

Odvoďte přibližný vzorec $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}$ pro $a > 0$, $a \gg x$.

Ukažte, že diferenciální rovnici $y'' + 4y = 0$ vyhovují funkce $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ kde c_1 a c_2 jsou libovolné reálné konstanty.

Určete n–tou derivaci funkce:

a) $f(x) = \ln x$ $\left[f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \right]$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ $\left[f^{(n)}(x) = \frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{2n+1}} \ , \ \text{kde } (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot (2n-1) \right]$

c) $f(x) = \cos^2 x$ $\left[f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right) \right]$

Je dána funkce $f(x) = x^2 \cdot \sin x$. Vypočtěte $f^{(20)}(x)$. $\quad \left[f^{(20)}(x) = (x^2 - 380)\sin x - 40x\cos x\right]$

Dokažte pomocí definice, že derivace funkcí:

$$\text{a)}\ \ f(x) = \mathrm{e}^x\,; \qquad \text{b)}\ \ f(x) = \sin x\,; \qquad \text{c)}\ \ f(x) = \cos x$$

jsou: a) $f'(x) = \mathrm{e}^x$; b) $f'(x) = \cos x$; c) $f'(x) = -\sin x$.

Podle definice derivace vypočtěte derivaci funkce

$$\text{a)}\ \ f(x) = \sin 2x\,; \qquad \text{b)}\ \ f(x) = \sqrt{x}\,; \qquad \text{c)}\ \ f(x) = \sqrt[3]{x}\,;$$
$$\text{d)}\ \ f(x) = \cos 3x\,; \qquad \text{e)}\ \ f(x) = 2x^3\,.$$

$$\left[\text{a)}\ \ 2\cos 2x\,;\ \text{b)}\ \ \frac{1}{2\sqrt{x}}\,,\ x > 0\,;\ \text{c)}\ \ \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,;\ \text{d)}\ \ -3\sin 3x\,;\ \text{e)}\ \ 6x^2\right]$$

Podle definice derivace vypočtěte derivaci funkce

a) $\quad f(x) = 2x^3 - 2x + 3 \quad$ v bodě $x = 0$ $\quad [-2]$

b) $\quad f(x) = |x^3| \quad$ v bodě $x = 0$ $\quad [0]$

c) $\quad f(x) = x^2\sin(x-2) \quad$ v bodě $x = 2$ $\quad [4]$

Určete první derivace a jejich definiční obor pro funkce:

a) $\quad y = \begin{cases} 1 - x & x \in (-\infty, 1) \\ (1-x)(2-x) & x \in \langle 1, 2\rangle \\ -(2-x) & x \in (2, +\infty) \end{cases} \qquad \left[y' = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, 1) \\ 2x - 3 & x \in \langle 1, 2\rangle \\ 1 & x \in (2, +\infty) \end{cases}\right]$

b) $\quad y = \begin{cases} x & x < 0 \\ \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases} \qquad \left[y' = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & x \geq 0 \end{cases}\right]$

c) $\quad y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & |x| \leq 1 \\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \dfrac{x-1}{2} & |x| > 1 \end{cases} \qquad \left[y' = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{2} & x > 1 \end{cases}\right]$

d) $\quad y = \begin{cases} x^2\mathrm{e}^{-x^2} & |x| \leq 1 \\ \mathrm{e}^{-1} & |x| > 1 \end{cases} \qquad \left[y' = \begin{cases} 2x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2} & |x| \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}\right]$

Zjistěte, zda má funkce

$$f(x) = \begin{cases} x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

derivaci v bodě $x = 0$. $\quad$ [ne]

Zjistěte, zda má funkce

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ x\cos\dfrac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

derivaci v bodě $x = 0$. $\quad$ [ne]

Vypočtěte první derivaci funkce v obecném bodě $x \in D_f$:

a) $\quad f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ $\quad [6x - 5]$

b) $\quad f(x) = a^5 - 5a^3x^2 + x^5\,, \quad a = \text{konst.}$ $\quad [-10a^2x + 5x^4]$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x^5}$ $\left[-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{6}{x^4}-\dfrac{15}{x^6}\right]$

d) $f(x)=(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$ $\left[4x^3-3x^2-8x+9\right]$

e) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ $\left[\dfrac{-2}{(x-1)^2}\right]$

f) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ $\left[\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right]$

Vypočtěte první derivaci funkce v obecném bodě $x\in D_f$:

a) $f(x)=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$ $\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,,\ x>0\right]$

b) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left[\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,,\ |x|<1\right]$

c) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$ $\left[\dfrac{2x^2}{1-x^6}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}\,,\ |x|\neq 1\right]$

d) $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ $\left[\dfrac{7}{8\cdot\sqrt[8]{x}}\,,\ x>0\right]$

e) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$ $\left[\dfrac{-4}{3\cdot\sqrt[3]{4x^2}\cdot\left(1+\sqrt[3]{2x}\right)^2}\right]$

f) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$ $\left[\dfrac{-2x}{3\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}\right]$

Vypočtěte první derivaci funkce v obecném bodě $x\in D_f$

a) $f(x)=(x^2+1)^4$ $\left[8x(x^2+1)^3\right]$

b) $f(x)=\left(5x^3+x^2-4\right)^5$ $\left[5(15x^2+2x)\left(5x^3+x^2-4\right)^4\right]$

c) $f(x)=\left(7x^2-\dfrac{4}{x}+6\right)^6$ $\left[6\left(14x+\dfrac{4}{x^2}\right)\left(7x^2-\dfrac{4}{x}+6\right)^5\right]$

d) $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$ $\left[-\dfrac{4(x+1)}{(x-1)^3}\right]$

Vypočtěte první derivaci funkce v obecném bodě $x\in D_f$

a) $f(x)=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$ $\left[x^2\sin x\right]$

b) $f(x)=\sin^3 x\cdot\cos 3x$ $\left[3\sin^2 x\cdot\cos 4x\right]$

c) $f(x)=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$ $\left[-\dfrac{1+\cos^2 x}{2\cdot\sin^3 x}\,,\ x\neq k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\right]$

d) $f(x)=\dfrac{x^2}{\operatorname{tg} x}\,,\quad x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$ $\left[\dfrac{-x^2+x\sin 2x}{\sin^2 x}\,,\ x\neq\dfrac{k\pi}{2}\,,\ k\in\mathbb{Z}\right]$

e) $f(x)=\left(1+\sin^2 x\right)^4$ $\left[4\left(1+\sin^2 x\right)^3\sin 2x\right]$

f) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$ $\left[\dfrac{1}{4\sqrt{\operatorname{tg}(x/2)}\cdot\cos^2(x/2)}\right]$

g) $f(x)=\cos^2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ $\left[\dfrac{\sin\left(2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\right]$

h) $f(x)=\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}$ $\left[\dfrac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}\cdot\cos^2 x}\right]$

Vypočtěte první derivaci funkce v obecném bodě $x \in D_f$

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ $\left[-2x\mathrm{e}^{-x^2}\right]$

b) $f(x) = x\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x)$ $[\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x + 2x\cos x)]$

c) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sin x}$ $\left[\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sin^2 x}(\sin x - \cos x)\right]$

d) $f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}, \quad a > 0$ $\left[a^a x^{a^a-1} + ax^{a-1}a^{x^a}\ln a + a^x a^{a^x}\ln^2 a\right]$

e) $f(x) = \ln^3 x^2$ $\left[\dfrac{6}{x}\ln^2 x^2, \ x \neq 0\right]$

f) $f(x) = \ln\big(\ln(\ln x)\big), \quad x > \mathrm{e}$ $\left[\dfrac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}\right]$

g) $f(x) = \log_x a, \quad a > 0$ $\left[-\dfrac{(\log_x a)^2}{x\ln a}\right]$

h) $f(x) = \log_2\big(\log_3(\log_5 x)\big)$ $\left[\dfrac{1}{x \cdot \log_5 x \cdot \log_3(\log_5 x) \cdot \ln 2 \cdot \ln 3 \cdot \ln 5}\right]$

Vypočtěte první derivaci funkce v obecném bodě $x \in D_f$

a) $f(x) = 2^x$ $[2^x \ln 2]$

b) $f(x) = x \cdot 10^x$ $[10^x(1 + x\ln 10)]$

c) $f(x) = \dfrac{x}{4^x}$ $\left[\dfrac{1 - x\ln 4}{4^x}\right]$

d) $f(x) = 10^{2x-3}$ $[2 \cdot 10^{2x-3}\ln 10]$

e) $f(x) = 2^{\frac{x}{\ln x}}$ $\left[\dfrac{(\ln x - 1)\ln 2}{\ln^2 x}\, 2^{\frac{x}{\ln x}}\right]$

f) $f(x) = a^{\sin^3 x}, \quad a > 0$ $\left[3\sin^2 x\cos x a^{\sin^3 x}\ln a\right]$

Vypočtěte první derivaci funkce v obecném bodě $x \in D_f$

a) $f(x) = \dfrac{\arccos x}{x}$ $\left[-\dfrac{x + \arccos x \cdot \sqrt{1 - x^2}}{x^2\sqrt{1 - x^2}}\right]$

b) $f(x) = (\arcsin x)^2$ $\left[\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\right]$

c) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$ $\left[\dfrac{2x}{1 + x^4}\right]$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2} - \operatorname{arctg} x$ $\left[-\dfrac{2x^2}{(1 + x^2)^2}\right]$

e) $f(x) = \arccos\dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}}$ $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 2x - 2x^2}}\right]$

f) $f(x) = \arcsin\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$ $\left[-\dfrac{1}{(1 + x)\sqrt{2x(1 - x)}}\right]$

Vypočtěte první derivaci funkce v obecném bodě $x \in D_f$

a) $f(x) = \sinh^3 x$ $[3\sinh^2 x \cdot \cosh x]$

b) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tgh} x)$ $\left[\dfrac{1}{\cosh 2x}\right]$

c) $f(x) = \operatorname{tgh}(1 - x^2)$ $\left[-\dfrac{2x}{\cosh^2(1 - x^2)}\right]$

d) $f(x) = \sinh^2 x + \cosh^2 x$ $[2\sinh 2x]$

e) $f(x) = \sqrt{\cosh x}$ $\left[\dfrac{\sinh x}{2\sqrt{\cosh x}}\right]$

f) $f(x) = \mathrm{e}^{\cosh^2 x}$ $\left[\mathrm{e}^{\cosh^2 x} \cdot \sinh 2x\right]$

Vypočtěte první derivaci funkce v obecném bodě $x \in D_f$

a) $f(x) = x^{x^2}$ $\left[x^{x^2+1}(2\ln x + 1)\right]$

b) $f(x) = x^{x^x}$ $\left[x^{x^x} \cdot x^x \cdot \left(\ln^2 x + \ln x + \dfrac{1}{x}\right)\right]$

c) $f(x) = (\ln x)^x$ $\left[(\ln x)^x \cdot \left(\dfrac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)\right)\right]$

d) $f(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$ $\left[\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x \left(\dfrac{1}{x+1} - \ln \dfrac{x}{x+1}\right)\right]$

e) $f(x) = \sqrt[x]{(x+1)^2}$ $\left[2\sqrt[x]{(x+1)^2}\left(\dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right)\right]$

f) $f(x) = (x^2+1)^{\sin x}$ $\left[(x^2+1)^{\sin x}\left(\dfrac{2x\sin x}{x^2+1} + \cos x \cdot \ln(x^2+1)\right)\right]$

Určete první derivaci funkce $f(x) = \arcsin(\sin x)$ v bodech $x = (2k-1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. [neexistuje]

Pro jaká $n \in \mathbb{N}$ má funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

derivaci v bodě $x = 0$? $[n > 1]$

Dokažte, že funkce $f(x) = |x-a| \cdot \varphi(x)$, kde $\varphi(x)$ je diferencovatelná a $\varphi(a) \neq 0$, nemá derivaci v bodě a.

Dokažte, že derivace liché funkce je funkce sudá.

Dokažte, že derivace periodické funkce je opět funkce periodická se stejnou periodou.

Ve kterých bodech má graf funkce $f(x) = x + \sqrt[3]{\sin x}$ tečny rovnoběžné s osou y? $[x = k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}]$

Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v daném bodě:

a) $f(x) = \mathrm{tg}\, 2x$ v bodě $[0;?]$ $\left[\text{tečna: } t \equiv y = 2x\,;\ \text{normála } n \equiv y = -\dfrac{x}{2}\right]$

b) $f(x) = \ln x$ v bodě $[1;?]$ [tečna: $t \equiv y = x - 1$; normála $n \equiv y = -x + 1$]

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ v bodě $\left[-\dfrac{1}{2};?\right]$ [tečna: $t \equiv y + 4x + 4 = 0$; normála $n \equiv 8y - 2x + 15 = 0$]

Určete rovnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$, která je rovnoběžná s danou přímkou $\boldsymbol{p}$:

a) $f(x) = x^3 + x - 2\,,\quad \boldsymbol{p} \equiv y = 4x - 1$ $[t_1 \equiv y = 4(x-1)\,;\ t_2 \equiv y + 4 = 4(x+1)]$

b) $f(x) = x^2(x-2)^2\,,\quad \boldsymbol{p} \equiv y = 0$

$[t_1 \equiv y = 0\,,$ v bodech $[0;0]\,,\ [2;0]\,;\ t_2 \equiv y = 1$ v bodě $[1;1]]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\,,\quad \boldsymbol{p} \equiv y = -\dfrac{x}{2} + 3$ $\left[t \equiv y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(x-1)\,,\ \text{jedna z tečen}\right]$

Určete rovnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$, která je kolmá k dané přímce $\boldsymbol{p}$:

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5\,,\quad \boldsymbol{p} \equiv 2x - 6y + 1 = 0$ $[t \equiv 3x + y + 6 = 0]$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 5\,,\quad \boldsymbol{p} \equiv y = -x + 3$ $\left[t \equiv y - \dfrac{17}{4} = x - \dfrac{3}{2}\right]$

c) $f(x) = \ln x\,,\quad \boldsymbol{p} \equiv y = -2x - 1$ $\left[t \equiv y - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(x - 2)\right]$

Napište rovnice tečen hyperboly $7x^2 - 2y^2 = 14$, které jsou kolmé na přímku $2x + 4y - 3 = 0$. $[t_1 \equiv y - 7 = 2(x - 4)\,;\ t_2 \equiv y + 7 = 2(x + 4)]$

Dokažte, že hyperboly $h_1 \equiv xy = 8$, $h_2 \equiv x^2 - y^2 = 12$ se protínají pod pravým úhlem.

Dokažte, že tečny hyperboly $xy = a^2$ omezují se souřadnicovými osami trojúhelníky s konstantním obsahem $P = 2a^2$.

Dokažte, že bod dotyku tečny k hyperbole $y = \dfrac{a}{x}$ půlí úsečku na tečně, jejíž koncové body jsou průsečíky této tečny se souřadnicovými osami.

Určete rovnici normály ke grafu funkce $y = f(x)$, která je rovnoběžná s danou přímkou $\boldsymbol{p}$:

a) $f(x) = x \ln x\,,\quad \boldsymbol{p} \equiv 2x - 2y + 3 = 0$ $[n \equiv x - y - 3\mathrm{e}^{-2} = 0]$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 5\,,\quad \boldsymbol{p} \equiv x + 4y - 4 = 0$ $[n \equiv x + 4y - 24 = 0]$

Určete rovnici normály ke grafu funkce $y = f(x)$, která je kolmá k dané přímce $\boldsymbol{p}$:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 6\,,\quad \boldsymbol{p} \equiv y = -x$ $[n \equiv 4x - 4y - 21 = 0]$

b) $f(x) = -\sqrt{x} + 2\,,\quad \boldsymbol{p} \equiv y = -\dfrac{x}{2} + 2$ $[n \equiv 2x - y - 1 = 0]$

Veďte tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ tak, aby procházely daným bodem

a) $f(x) = \dfrac{x + 9}{x + 5}\,,\quad B = [0; 0]$ $[t_1 \equiv x + 25y = 0\,,\ t_2 \equiv x + y = 0]$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}\,,\quad B = [-1; 1]$

$$\left[t_1 \equiv y - \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = -\frac{x - 1 - \sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}\,,\ t_2 \equiv y - \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = -\frac{x - 1 + \sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}}\right]$$

c) $f(x) = 2x^2 - 1\,,\quad B = [2; 3]$

$[t_1 \equiv y - 11 + 8\sqrt{2} = (8 - 4\sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})\,,\ t_2 \equiv y - 11 - 8\sqrt{2} = (8 + 4\sqrt{2})(x - 2 - \sqrt{2}]$

Bod se pohybuje po kubické parabole $12y = x^3$. Která ze souřadnic se mění rychleji?

[pro $|x| < 2$ se mění rychleji x–ová souřadnice]

Z přístavu O vyjíždí parník A na sever rychlostí 30 km/hod. a na východ parník B rychlostí 40 km/hod. Jakou rychlostí se zvětšuje vzdálenost obou lodí? [50 km/hod.]

Celkový elektrický náboj protékající vodičem je dán vztahem $Q(t) = 2t^2 + 3t + 1$ [C]. Určete proud koncem páté sekundy. [23 A]

Určete pod jakým úhlem se protínají křivky:

a) $x^2 + y^2 = 8\,;\quad y^2 = 2x$ [arctg 3]

b) $x^2 + y^2 - 4x = 1\,;\quad x^2 + y^2 + 2y = 9$ [45°]

c) $x^2 - y^2 = 5\,;\quad \dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ [90°]

d) $x^2 + y^2 = 8ax\,;\quad y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ [45° a 90°]

e) $x^2 = 4ay\,;\quad y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ [arctg 3]

Určete diferenciál funkce:

a) $f(x) = \dfrac{1}{4x^4}$ $\left[\mathrm{d}f(x;\mathrm{d}x) = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x^5}\right]$

b) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-1}$ $\left[\mathrm{d}f(x;\mathrm{d}x) = \dfrac{-6x^2\,\mathrm{d}x}{(x^3-1)^2}\right]$

c) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ $\left[\mathrm{d}f(x;\mathrm{d}x) = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\right]$

d) $f(x) = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4}\right)\right]$ $\left[\mathrm{d}f(x;\mathrm{d}x) = -\dfrac{\mathrm{d}x}{2\sin(x/2)}\right]$

e) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1-x^2}$ $\left[\mathrm{d}f(x;\mathrm{d}x) = \dfrac{(x^2-1)\sin x + 2x\cos x}{(1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x\right]$

Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně:

a) $\sqrt[3]{1.02}$; b) $\sin 29^\circ$; c) $\log_{10} 11$; d) $\operatorname{arctg} 1.02$; e) $\sqrt{16.06}$.

[a) 1.007 ; b) 0.4849 ; c) 1.043 ; d) 0.795 ; e) 4.0075]

Odvoďte přibližný vzorec $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \dfrac{x}{na^{n-1}}$ pro $a > 0$ a $a \gg x$.

Strana čtverce je $x = (2.4 \pm 0.05)\,\mathrm{m}$. S jakou absolutní a relativní chybou můžeme stanovit obsah čtverce? $[0.24\,\mathrm{m}^2\,;\ 4.2\,\%]$

Určete druhou derivaci funkce $f(x)$ v obecném bodě $x \in D_f$:

a) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$ $[\mathrm{e}^x(x^2+4x+2)]$

b) $f(x) = \sqrt{2px}$, $p > 0$ konst. $\left[\dfrac{-p}{2x\sqrt{2px}}\right]$

c) $f(x) = \sin^2 x$ $[2\cos 2x]$

d) $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$ $[-2\mathrm{e}^x \sin x]$

e) $f(x) = \arcsin x$ $\left[\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\right]$

f) $f(x) = a^x \cdot x^3$, $a > 0$ $\left[x \cdot a^x \left(x^2 \ln^2 a + 6x\ln a + 6\right)\right]$

Určete třetí derivaci funkce $f(x)$ v obecném bodě $x \in D_f$:

a) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ $[\mathrm{e}^{-x}(3-x)]$

b) $f(x) = x^2 \ln x$ $\left[\dfrac{2}{x}\right]$

c) $f(x) = x^3 \mathrm{e}^x$ $[\mathrm{e}^x(x^3+9x^2+18x+6)]$

d) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$ $\left[\dfrac{2a(3x^2-a^2)}{(a^2+x^2)^3}\right]$

Přesvědčte se o tom, že dané funkce vyhovují daným diferenciálním rovnicím:

a) $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-2x}$; C_1 , $C_2 \in \mathbb{R}$; konat. ; $y'' + y' - 2y = 0$;

b) $y = \arcsin x$; $(1-x^2)y'' = xy$;

c) $y = A\sin(\omega t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi)$; A , B , ω , $\varphi \in \mathbb{R}$; $y'' + \omega^2 y = 0$.

Určete n–tou derivaci funkce

a) $f(x) = x^n$ $[n!]$

b) $f(x) = x\mathrm{e}^x$ $[\mathrm{e}^x(x+n)]$

c) $f(x) = x \ln x$ $\left[(-1)^n \dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}\,;\ n \geq 2\right]$

d) $f(x) = \log_a x\,;\quad a > 0\,,\ a \neq 1$ $\left[(-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{x^n \ln a}\right]$

e) $f(x) = \sin^2 x$ $\left[2^{n-1} \sin\left(2x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

f) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}\,;\quad x \neq -1$ $\left[\dfrac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right]$

g) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}\,;\quad x \neq -1$ $\left[(-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}\right]$

Pomocí Leibnitzovy formule vypočtěte:

a) $\left[(x^2+1)\sin x\right]^{(20)}$ $\left[(x^2 - 379)\sin x - 40x \cos x\right]$

b) $[\mathrm{e}^x \sin x]^{(30)}$ $\left[\mathrm{e}^x \sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} \sin\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$
