Funkce dané parametricky

Vyjádřete explicitně funkci $y = f(x)$ zadanou parametrickými rovnicemi $x = \arcsin t$, $y = \arccos t$, $t \in \langle -1, 1\rangle$.
$\left[y = \frac{\pi}{2} - x\,, \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle\right]$

Parametrizujte funkci $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

$$\left[\begin{array}{ll} & x = \alpha t\,,\ y = \dfrac{\alpha t}{\alpha^2 t^2 + 1}\,,\ t \in (-\infty, +\infty) \\ \text{např.} & x = \ln t\,,\ y = \dfrac{\ln t}{\ln^2 t + 1}\,,\ t \in (0, +\infty) \\ & x = \operatorname{tg} t\,,\ y = \dfrac{1}{2}\sin 2t\,,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right]$$

Najděte hodnotu parametru bodu B daného kartézskými souřadnicemi jako bodu ležícího na křivce dané parametricky:

a) $x = t^2 + 2t\,, \quad y = t^3 + t\,, \quad B = [3; 2]$ $[t = 1]$

b) $x = 3(2\cos t - \cos 2t)\,, \quad y = 3(2\sin t + \sin 2t)\,, \quad b = [-9; 0]$ $[t = (2k+1)\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}]$

c) $x = 3\cos t\,, \quad y = 2\sin t\,, \quad B = [0; 1]$ [bod neleží na křivce]

Vyjádřete křivku zadanou rovnicí

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2 xy\,, \quad a > 0$$

v polárních souřadnicích a parametrizujte ji.
$\left[\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}\,;\ x = a\sqrt{\sin 2\varphi}\cdot\cos\varphi\,,\ y = a\sqrt{\sin 2\varphi}\cdot\sin\varphi\,,\ \varphi \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right]$

Určete první derivace funkce $y = f(x)$ podle x, která je dána parametricky:

a) $x = a\cos t\,, \quad y = b\sin t\,, \quad t \in \langle 0, 2\pi)$ $\left[y' = -\frac{b}{a}\operatorname{cotg} t\,,\ t \neq k\pi\right]$

b) $x = 1 - t^2\,, \quad y = t - t^3\,, \quad t \in (-\infty, +\infty)$ $\left[y' = \frac{3t^2 - 1}{2t}\,,\ t \neq 0\right]$

Určete druhou derivaci funkce $y = f(x)$ dané parametrickými rovnicemi $x = \mathrm{e}^t \sin t$, $y = \mathrm{e}^t \cos t$.
$\left[y'' = \frac{-2}{\mathrm{e}^t(\sin t + \cos t)^3}\right]$

Přesvědčte se o tom, že funkce $y = f(x)$ daná parametrickými rovnicemi $x = \sin t$, $y = \sin kt$, $t \in (-\infty, +\infty)$ vyhovuje diferenciální rovnici

$$(1 - x^2)y'' - xy' + k^2 y = 0\,.$$

Napište rovnici tečny a normály ke křivce dané parametricky rovnicemi $x = \sin t$, $y = \cos 2t$, v bodě $t = \frac{\pi}{6}$.
[tečna: $4x + 2y - 3 = 0$; normála: $2x - 4y + 1 = 0$]

Určete úhly, pod kterými se protínají křivky

$$\mathcal{C}_1 \equiv \{y = x^2\} \quad \text{a} \quad \mathcal{C}_2 \equiv \left\{x = \frac{5}{3}\cos t\,,\ y = \frac{5}{4}\sin t\,,\ t \in \langle 0, 2\pi)\right\}.$$

$\left[\alpha = \operatorname{arctg}\frac{41}{2}\,,\ \text{v bodech } [1; 1] \text{ a } [-1; 1]\right]$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Vyšetřete průběh křivky dané parametrickými rovnicemi:

$$x = 2t - t^2\,, \quad y = 3t - t^3\,; \qquad t \in (-\infty, +\infty)\,.$$

Vyšetřete průběh křivky dané parametrickými rovnicemi:

$$x = \frac{t^2}{t-1}\,, \quad y = \frac{t}{t^2-1}\,.$$

Nalezněte průběh funkce dané v polárních souřadnicích rovnicí $\rho = 1 + 2\cos\varphi$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ a $\rho \geq 0$.

Vyjádřete explicitně funkci $y = f(x)$ zadanou parametricky rovnicemi:

a) $x = \operatorname{arctg} t\,, \quad y = \operatorname{arccotg} t\,; \quad t \in (-\infty, +\infty)$ $\quad \left[y = \frac{\pi}{2} - x\,;\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right]$

b) $x = a(1-t)\,, \quad y = at\,; \quad t \in (-\infty, +\infty)$ $\quad [y = a - x\,;\ x \in (-\infty, +\infty)]$

c) $x = a\cos t\,, \quad y = a\sin t\,; \quad t \in \langle 0, \pi\rangle$ $\quad \left[y = \sqrt{a^2 - x^2}\,;\ x \in \langle -a, a\rangle\right]$

d) $x = \sin^2 t\,, \quad y = \cos^2 t\,; \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ $\quad [y = 1 - x\,;\ x \in \langle 0, 1\rangle]$

Z rovnic parametrických zadání křivek (funkcí) eliminujte parametr:

a) $x = 3t\,, \quad y = 6t - t^2\,; \quad t \in (-\infty, +\infty)$ $\quad \left[x^2 - 18x + 9y = 0\right]$

b) $x = \cos t\,, \quad y = \sin 2t\,; \quad t \in (-\infty, +\infty)$ $\quad \left[y^2 = 4x^2(1 - x^2)\right]$

c) $x = t^3 + 1\,, \quad y = t^2\,; \quad t \in (-\infty, +\infty)$ $\quad \left[y^3 = (x-1)^2\right]$

d) $x = \operatorname{tg} t\,, \quad y = \sin 2t + 2\cos 2t\,; \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad \left[y = \frac{2(1 + x - x^2)}{1 + x^2}\right]$

Parametrizujte funkci:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ $\quad \left[\text{např. } x = \ln t\,,\ y = \ln^2 t + 2\ln t + 3\,;\ t \in (0, +\infty)\right]$

b) $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ $\quad [\text{např. } x = a\cos t\,,\ y = a\sin t\,;\ t \in \langle 0, \pi\rangle]$

Určete hodnotu parametru bodu B daného kartézskými souřadnicemi jako bodu ležícího na křivce dané parametricky:

a) $x = 2\operatorname{tg} t\,, \quad y = 2\sin^2 t + \sin 2t\,; \quad B = [2; 2]$ $\quad \left[t = \frac{\pi}{4} + k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right]$

b) $x = t^2 - 1\,, \quad y = t^3 - t\,; \quad B = [0; 0]$ $\quad [t_1 = -1\,;\ t_2 = 1]$

Vyjádřete v polárních souřadnicích křivku zadanou analyticky rovnicí:

a) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)\,; \quad a > 0$ $\quad \left[\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}\right]$

b) $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4a^2xy\left(x^2 - y^2\right)\,; \quad a > 0$ $\quad \left[\rho = a\sqrt{\sin 4\varphi}\right]$

Určete první derivaci funkce $y = f(x)$ podle x, je-li funkce dána parametricky:

a) $x = a(t - \sin t)\,, \quad y = a(1 - \cos t)$ $\quad \left[y' = \operatorname{cotg}\frac{t}{2}\right]$

b) $x = \frac{t+1}{t}\,, \quad y = \frac{t-1}{t}$ $\quad [y' = -1]$

c) $x = \ln\left(1 + t^2\right)\,, \quad y = t - \operatorname{arctg} t$ $\quad \left[y' = \frac{t}{2}\right]$

Určete druhou derivaci funkce $y = f(x)$ dané parametricky:

a) $x = 3\cos t\,, \quad y = 4\sin t$ $\quad \left[y'' = -\frac{4}{9\sin^3 t}\right]$

b) $x = t^2 - 2t\,, \quad y = t^2 + 2t$ $\left[y'' = -\dfrac{1}{(t-1)^3}\right]$

c) $x = t + \mathrm{e}^{-t}\,, \quad y = 2t + \mathrm{e}^{-2t}$ $\left[y'' = -\dfrac{2\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right]$

Přesvědčte se o tom, že funkce $y = f(x)$ daná parametrickými rovnicemi $x = \mathrm{e}^t \sin t$, $y = \mathrm{e}^t \cos t$, vyhovuje diferenciální rovnici $y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$.

Přesvědčte se o tom, že funkce $y = f(x)$ daná parametrickými rovnicemi $x = \dfrac{1+t}{t^3}$, $y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{2}{t}$, vyhovuje diferenciální rovnici $x\,(y')^3 = 1 + y'$.

Napište rovnici tečny a normály ke křivce dané parametrickými rovnicemi:

a) $x = 2\mathrm{e}^t\,, \quad y = \mathrm{e}^{-t}$ v bodě $t = 0$ $\left[\begin{array}{l}\text{tečna: } x + 2y - 4 = 0\\ \text{normála: } 2x - y - 3 = 0\end{array}\right]$

b) $x = 2\ln\operatorname{cotg} t + 1\,, \quad y = \operatorname{tg} t + \operatorname{cotg} t$ v bodě $t = \dfrac{\pi}{4}$ $\left[\begin{array}{l}\text{tečna: } y = 2\\ \text{normála: } x = 1\end{array}\right]$

Určete úhly, pod kterými se protínají křivky

$$\mathcal{C}_1 \equiv \{x = a\cos\varphi\,;\ y = a\sin\varphi\} \quad \text{a} \quad \mathcal{C}_2 \equiv \left\{x = \frac{at^2}{1+t^2}\,;\ y = \frac{at\sqrt{3}}{1+t^2}\right\}.$$

[$\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ se protínají ve dvou bodech pod úhlem 30°]

Vyšetřete průběh křivky dané parametricky rovnicemi:

a) $x = t + \mathrm{e}^{-t}\,, \quad y = 2t + \mathrm{e}^{-2t}\,; \quad t \in (-\infty, +\infty)$
b) $x = t\ln t\,, \quad y = \dfrac{1}{t}\ln t\,; \quad t \in (0, +\infty)$
c) $x = \dfrac{3at}{t^3+1}\,, \quad y = \dfrac{3at^2}{t^3+1}\,; \quad a > 0\,;\ t \neq -1$
d) $x = t^3 + 3t + 1\,, \quad y = t^3 - 3t + 1\,; \quad t \in (-\infty, +\infty)$
e) $x = t^3 - 3\pi\,, \quad y = t^3 - 6\operatorname{arctg} t\,; \quad t \in (-\infty, +\infty)$
f) $x = t\mathrm{e}^t\,, \quad y = t\mathrm{e}^{-t}\,; \quad t \in (-\infty, +\infty)$

Vyšetřete průběh funkce dané v polárních souřadnicích rovnicemi:

a) $\rho = \mathrm{e}^{\varphi}$
b) $\rho = a\sin 3\varphi\,; \quad a > 0$
c) $\rho = a(1 + \operatorname{tg}\varphi)$
