Posloupnosti

Napište prvních pět členů posloupností

$$\text{a)}\quad \left\{\frac{n+1}{n}\right\}; \qquad \text{c)}\quad a_1 = 1\,;\ a_2 = 2\,;\ a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n\,;$$

$$\text{b)}\quad \left\{1 + \frac{2}{n}\right\}; \qquad \text{d)}\quad a_1 = 1\,;\ a_2 = 2\,;\ a_n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}\,.$$

Vyjádřete n – tý člen posloupností:

a) $\frac{1}{2}\,;\ \frac{2}{3}\,;\ \frac{3}{4}\,;\ \frac{4}{5}\,;\ \frac{5}{6}\,;\ \ldots$ $\left[\frac{n}{n+1}\right]$

b) $-2\,;\ 4\,;\ -8\,;\ 16\,;\ -32\,;\ \ldots$ $[(-2)^n]$

V aritmetické posloupnosti je pátý člen roven 36 a desátý člen $a_{10} = 76$. Vypočtěte a_1, diferenci d a součet s_5 prvních pěti členů dané posloupnosti. $[a_1 = 4\,;\ d = 8\,;\ s_5 = 100]$

V geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ je $a_3 = 12$, $a_7 = 192$; vypočtěte a_1, kvocient q a součet s_5.
$[a_1 = 3\,;\ q = 2\,;\ s_5 = 93]$

Dokažte podle definice, že posloupnost $\left\{\frac{3n+4}{n}\right\}$ má limitu 3 a je klesající. Kterým indexem počínaje se všechny další členy liší od čísla 3 o méně než $\frac{1}{100}$. $[n_0 = 400]$

Dokažte podle definice, že posloupnost $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ má limitu 0.

Dokažte podle definice, že posloupnost $\left\{\frac{2n^2-3n+1}{1-n}\right\}$ diverguje k $-\infty$.

Vypočtěte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-5n+2}{5n^2+4n-1}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n^2+1}$ $[0]$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-1}{n^2-n-1}$ $[+\infty]$

Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\,(1+2+3+\ \ldots\ +n)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n+1)^4-(n-1)^4}{(3n+1)^4+(n-1)^4}$ $\left[\frac{40}{41}\right]$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^5+3n}{n^5-3n^2+1}\right)^4$ $[16]$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$ $[1]$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Vypočtěte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$ $[1]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}}$ $\left[\dfrac{1}{5}\right]$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right)$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}.\cos(n!)}{n+1}\,. \qquad [0]$$

Dokažte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,; \quad a>0\,.$$

Dokažte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{6n+5}. \qquad [\mathrm{e}^3]$$

Napište prvních pět členů posloupností:

a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$; b) $\left\{\dfrac{n^2+1}{3n^2+4}\right\}$; c) $\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$; d) $\left\{1+\sqrt[n]{2}\right\}$;

e) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$; f) $a_1=a_2=1\,;\ a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n\,;$

g) $a_1=1\,;\ a_2=2\,;\ a_{n+2}=a_n.a_{n+1}+(-1)^n\,.$

Vyjádřete $n-$tý člen posloupností:

a) $0\,,\ \dfrac{1}{4}\,,\ \dfrac{2}{6}\,,\ \dfrac{3}{8}\,,\ \dfrac{4}{10}\,,\ \ldots$ $\left[a_n=\dfrac{n-1}{2n}\right]$

b) $\dfrac{1}{2}\,,\ \dfrac{1}{4}\,,\ \dfrac{1}{8}\,,\ \dfrac{1}{16}\,,\ \dfrac{1}{32}\,,\ \ldots$ $\left[a_n=\dfrac{1}{2^n}\right]$

c) $0\,,\ 2\,,\ 0\,,\ 4\,,\ 0\,,\ 6\,,\ 0\,,\ 8\,,\ \ldots$ $\left[a_n=\dfrac{n}{2}\,(1+(-1)^n)\right]$

d) $2\,,\ \dfrac{3}{2}\,,\ \dfrac{4}{3}\,,\ \dfrac{5}{4}\,,\ \dfrac{6}{5}\,,\ \dfrac{7}{6}\,,\ \ldots$ $\left[a_n=\dfrac{n+1}{n}\right]$

e) $\dfrac{2}{3}\,,\ \dfrac{8}{3}\,,\ \dfrac{26}{3}\,,\ \dfrac{80}{3}\,,\ \dfrac{242}{3}\,,\ \ldots$ $\left[a_n=3^{n-1}-\dfrac{1}{3}\right]$

f) $\dfrac{1}{1.2^2}\,,\ \dfrac{1}{3.2^4}\,,\ \dfrac{1}{5.2^6}\,,\ \dfrac{1}{7.2^8}\,,\ \ldots$ $\left[a_n=\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n}}\right]$

Vypočtěte k dané aritmetické posloupnosti žádané veličiny:

a) $a_3=12\,;\ a_7=32\,;\ a_1=?\,;\ d=?\,;\ s_5=?$ $[a_1=2\,,\ d=5\,,\ s_5=60]$

b) $a_5=20\,;\ a_{10}=80\,;\ a_1=?\,;\ d=?\,;\ s_6=?$ $[a_1=-28\,,\ d=12\,,\ s_6=12]$

c) $a_1=5\,;\ d=3\,;\ a_{12}=?\,;\ s_{10}=?$ $[a_{12}=38\,,\ s_{10}=185]$

d) $a_6 = 35$; $d = 4$; $a_1 = ?$; $s_6 = ?$ $[a_1 = 15,\ s_6 = 150]$

e) $a_{13} = 28$; $a_{24} = 94$; $a_3 = ?$; $d = ?$ $[a_3 = -32,\ d = 6]$

f) $s_{10} = 820$; $d = 6$; $a_1 = ?$; $a_{10} = ?$ $[a_1 = 55,\ a_{10} = 109]$

g) $s_7 = 100$; $s_{12} = 220$; $a_1 = ?$; $d = ?$ $\left[a_1 = \frac{66}{7},\ d = \frac{34}{21}\right]$

h) $s_8 = 124$; $s_{14} = 635$; $a_1 = ?$; $d = ?$ $\left[a_1 = -\frac{58}{3},\ d = \frac{209}{21}\right]$

Vypočtěte součet všech přirozených čísel od 1 do 100. [5050]

Vypočtěte součet všech sudých čísel od 2 do 200. [10 100]

Vypočtěte k dané geometrické posloupnosti žádané veličiny:

a) $a_1 = 4,\ q = 2$; $a_6 = ?,\ s_6 = ?$ $[a_6 = 128,\ s_6 = 252]$

b) $a_3 = 12,\ q = \frac{3}{2}$; $a_1 = ?,\ s_5 = ?$ $\left[a_1 = \frac{16}{3},\ s_5 = \frac{211}{3}\right]$

c) $a_3 = 15,\ a_6 = 120$; $q = ?,\ a_1,\ s_5 = ?$ $\left[q = 2,\ a_1 = \frac{15}{4},\ s_5 = \frac{465}{4}\right]$

d) $s_5 = 121,\ q = 3$; $a_1 = ?,\ a_5 = ?$ $[a_1 = 1,\ a_5 = 81]$

Užitím definice limity posloupnosti dokažte, že

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n - 5}{3n^2 - 3} = \frac{2}{3}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + n - 2}{n^2 - 1} = 1$; d) $(-1)^n \cdot (0.999)^n = 0$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3 + 1} = 0$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n + 2}{1 - n} = -\infty$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3 + n^2}{n + 2} = \infty$.

Dokažte podle definice, že posloupnost $\left\{\frac{3n}{n+1}\right\}$ je rostoucí a má limitu 3. Kterým indexem počínaje se všechny další členy liší od čísla 3 o méně než $\frac{3}{100}$? $[n_0 = 99]$

Dokažte, že

a) $$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ 1 & a = 1 \\ -\infty & a > 1 \\ \text{neexistuje} & a \le -1 \end{cases};$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 0$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$; g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$.

Vypočtěte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3n+1}{3n^2-1}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-n+2}{n^2+n+5}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)(3n+2)}{1-n+n^2}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{n^4+1}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4+1}{n^3+2n+3}$;

$$\left[\text{a) } 1\,;\ \text{b) } \frac{1}{2}\,;\ \text{c) } \frac{2}{3}\,;\ \text{d) } 3\,;\ \text{e) } 6\,;\ \text{f) } 0\,;\ \text{g) } +\infty\right]$$

Vypočtěte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^5+1}{2n^5+3n}\right)^4$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^3-n^2+5}{6n^3+5n-1}\right)^{-3}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2+(2n-1)^3}{(n-1)^2-(2n+3)^3}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$.

$$\left[\text{a) } \frac{1}{16}\,;\ \text{b) } 27\,;\ \text{c) } -1\,;\ \text{d) } \frac{15}{17}\,;\ \text{e) } 3\,;\ \text{f) } 0\right]$$

Vypočtěte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n-1)!}{(2n+1)!-(2n-1)!}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

$$\left[\text{a) } 0\,;\ \text{b) } 0\,;\ \text{c) } 1\,;\ \text{d) } \frac{1}{2}\,;\ \text{e) } 0\,;\ \text{f) } 4\right]$$

Vypočtěte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)n}\right)$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{2n^3+n^2-1}$.

$$\left[\text{a) } -\frac{1}{2}\,;\ \text{b) } \frac{4}{3}\,;\ \text{c) } -1\,;\ \text{d) } 1\,;\ \text{e) } \frac{1}{6}\right]$$

Vypočtěte

$$\text{a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}\,; \qquad \text{b)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+1}\,;$$

$$\text{c)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+4^{n+1}}{2^n+4^n}\,; \qquad \text{d)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n}\,;\ \ a>0\,;$$

$$\text{e)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}\,;\ \ a>0\,.$$

$\left[\text{a)}\ \frac{1}{3}\,;\ \text{b)}\ 1\,;\ \text{c)}\ 4\,;\ \text{d)}\ 0\,,\ a<1\,;\ \frac{1}{2}\,,\ a=1\,;\ 1\,,\ a>1\,;\ \text{e)}\ -1\,,\ a<1\,;\ 0\,,\ a=1\,;\ 1\,,\ a>1\right]$

Vypočtěte

$$\text{a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2.\cos n}{n+3}\,; \qquad \text{b)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n.\sin n^2}{2n^2+5}\,.$$

[a) neexistuje ; b) 0]

Dokažte, že posloupnost

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$$

je klesající a zdola ohraničená, a proto konvergentní.

Vypočtěte

$$\text{a)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n; \qquad \text{b)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^n;$$

$$\text{c)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n; \qquad \text{d)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n;$$

$$\text{e)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{2n}; \qquad \text{f)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n-1};$$

$$\text{g)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{4n+3}; \qquad \text{h)}\quad \lim_{n\to\infty} n^{-3n}(n+1)^{3n-5}\,.$$

[a) e^3 ; b) e^{-4} ; c) $\mathrm{e}^{-1/3}$; d) e^{-1} ; e) e ; f) e^3 ; g) e^8 ; h) 0]
