Průběh funkce

Určete, kde je funkce f rostoucí a kde klesající:

a) $f(x) = x \ln x$ $\quad [x \in \big(0, \mathrm{e}^{-1}\big)$ klesající; $x \in \big(\mathrm{e}^{-1}, +\infty\big)$ rostoucí$]$

b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ $\quad [x \in (-1,0) \cup (0,1)$ klesající; $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ rostoucí$]$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ $\quad [x \in (-\infty, 0)$ rostoucí; $x \in (0,+\infty)$ klesající$]$

d) $f(x) = x - \sin x$ $\quad$ [rostoucí v $\mathbb{R}$]

Určete lokální extrémy funkce:

a) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$ $\quad [x = 0$ lokální minimum; $x = 2$ lokální maximum$]$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} \cos x$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = -\operatorname{arctg} 2 + (2k+1)\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \text{ lokální minimum} \\ x = -\operatorname{arctg} 2 + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \text{ lokální maximum} \end{array}\right]$

c) $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$ $\quad [x = \pm 2$ lokální minimum; $x = 0$ lokální maximum$]$

d) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ $\quad$ [nemá lokální extrém]

Určete, ve kterých intervalech je funkce f konvexní a ve kterých je konkávní a najděte inflexní body:

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 2$ $\quad \left[\begin{array}{l} \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ konvexní} \\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ konkávní} \\ x = \pm\frac{1}{2} \text{ inflexní body} \end{array}\right]$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$ $\quad \left[\begin{array}{l} (-\infty, -3) \text{ konvexní} \\ (-3, +\infty) \text{ konkávní} \end{array}\right]$

c) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2}$ $\quad \left[\begin{array}{l} (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (3,+\infty) \text{ konvexní} \\ (1,3) \text{ konkávní} \\ x = 1\,,\ x = 3 \text{ inflexní body} \end{array}\right]$

d) $f(x) = \ln(1 + x^3)$ $\quad \left[\begin{array}{l} \big(0, \sqrt[3]{2}\big) \text{ konvexní} \\ (-1,0) \cup \big(\sqrt[3]{2}, +\infty\big) \text{ konkávní} \\ x = 0\,,\ x = \sqrt[3]{2} \text{ inflexní body} \end{array}\right]$

Určete inflexní body funkce:

a) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ $\quad$ [nemá inflexní body]

b) $f(x) = x \sin(\ln x)$ $\quad \left[x = \mathrm{e}^{\pi/4 + k\pi}\,,\ k \in \mathbb{Z}\right]$

Určete největší a nejmenší hodnotu funkce v uvedeném oboru:

a) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3\,, \quad x \in \langle -1, 3 \rangle$ $\quad [f(3) = 12$ největší; $f(2) = -13$ nejmenší$]$

b) $f(x) = \operatorname{tg} x - x\,, \quad x \in \left\langle -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6} \right\rangle$

$$\left[f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - 1 \text{ nejmenší; } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{6} \text{ největší}\right]$$

c) $f(x) = \arccos \dfrac{1}{x}\,, \quad x \in \langle 1, +\infty)$ $\quad [f(1) = 0$ nejmenší; největší hodnoty nenabývá$]$

d) $f(x) = x \ln^2 x\,, \quad x \in (0, 1\rangle$ $\quad \left[f(\mathrm{e}^{-2}) = 4\mathrm{e}^{-2}\right.$ největší; $\left.f(1) = 0 \text{ nejmenší}\right]$

e) $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}\,, \quad x \in (-\infty, +\infty)$ $\quad [f(0) = 1$ nejmenší; největší hodnoty nenabývá$]$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Určete asymptoty grafu funkce f:

a) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ [svislé $x=-1$, $x=1$; vodorovná $y=0$]

b) $f(x) = \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ [svislé $x=-1$, $x=1$; šikmé $y=4x$ v $+\infty$ $y=-4x$ v $-\infty$]

c) $f(x) = 2x + \ln x$ [svislá $x=0$]

d) $f(x) = x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)$ [svislá $x=-\mathrm{e}^{-1}$; šikmé $y=x+\mathrm{e}^{-1}$ v $\pm\infty$]

e) $f(x) = 3x + \operatorname{arctg} x$ $\left[\text{šikmé } y=3x+\dfrac{\pi}{2} \text{ v } +\infty,\ y=3x-\dfrac{\pi}{2} \text{ v } -\infty\right]$

f) $f(x) = 3x\mathrm{e}^{-x}$ [vodorovná $y=0$ v $+\infty$]

Určete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.

$$D_f = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)\,,\quad f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\,,\quad f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

x	$-\infty$		-1			0		1			$+\infty$
f	0	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	0
f'		$-$			$-$	-1	$-$			$-$	
f		$\searrow$				$\searrow$				$\searrow$	
f''		$-$			$+$	0	$-$			$+$	
f		$\frown$			$\smile$	inf.bod	$\frown$			$\smile$	
asymp.	$y=0$		$x=-1$					$x=1$			$y=0$

Určete průběh funkce $f(x) = x\ln^2 x$

$$D_f = (0,+\infty)\,,\quad f'(x) = \ln^2 x + 2\ln x\,,\quad f''(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$$

x	0		e^{-2}		e^{-1}		1		$+\infty$
f	0		$4\mathrm{e}^{-2}$		e^{-1}		0		$+\infty$
f'	$+\infty$	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	lok.max.		$\searrow$		lok.min.	$\nearrow$	
f''			$-$		0		$+$		
f			$\frown$		inf.bod		$\smile$		
asymp.					nemá				

Určete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$

$$D_f = (-\infty,1)\cup(1,+\infty)\,,\quad H_f \subset \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\,,\quad f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}\,,\quad f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

x	$-\infty$		-1		0		1			$+\infty$
f	$\pi/4$		0		$-\pi/4$		$-\pi/2$	$\pi/2$		$\pi/4$
f'		$-$	$-1/2$	$-$	-1	$-$	$-1/2$	$-1/2$	$-$	
f			$\searrow$						$\searrow$	
f''			$-$		0	$+$			$+$	
f			$\frown$		inf.bod	$\smile$			$\smile$	
asymp.	$y=\pi/4$									$y=\pi/4$

Určete průběh funkce $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{1/x}$

$$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\,, \quad f'(x) = \mathrm{e}^{1/x}(2x-1)\,, \quad f''(x) = \mathrm{e}^{1/x}\,\frac{2x^2-2x+1}{x^2}$$

x	$-\infty$		0			$1/2$		$+\infty$
f	$+\infty$	$+$	0	$+\infty$	$+$	$\mathrm{e}^2/4$	$+$	$+\infty$
f'		$-$	0	$-\infty$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$			$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	
f''		$+$				$+$		
f		$\smile$				$\smile$		
asymp.	nemá		$x=0$					nemá

Určete průběh funkce $f(x) = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$

$$D_f = \langle -1, 1 \rangle\,, \quad f'(x) = \arccos x\,, \quad f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

x	-1		0		1
f	$-\pi$	$-$	-1	$-$	0
f'	π	$+$	$\pi/2$	$+$	0
f			$\nearrow$		
f''			$-$		
f			$\frown$		

Určete průběh funkce $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$

$$D_f = (-\infty, +\infty)\,, \quad f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}\,, \quad f''(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$+$	1	$+$	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	
f''			$+$		
f			$\smile$		
asymp.	nemá				$y=x$

Určete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

$$D_f = (0,1) \cup (1, +\infty)\,, \quad f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\,, \quad f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$$

x	0		1			e	e^2		$+\infty$
f	0		$-\infty$	$+\infty$		e	$\mathrm{e}^2/2$		$+\infty$
f'	0	$-$			$-$	0	$+$		
f		$\searrow$			$\searrow$	lok.min.		$\nearrow$	
f''		$-$			$+$		0	$-$	
f		$\frown$			$\smile$		inf.bod	$\frown$	
asymp.			$x=1$						nemá

Určete průběh funkce $f(x) = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

$$D_f = (-\infty, +\infty)\,, \quad H_f \subset (0, \pi)\,, \quad f'(x) = \frac{2x}{|x|(1+x^2)}\,,$$

$$f''(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\,,\ x > 0\,, \quad f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}\,,\ x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	π	0	π
f'	$-$ $\quad -2$		2 $\quad +$
f	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$
f''	$-$		$-$
f	$\frown$		$\frown$
asymp.	$y=\pi$		$y=\pi$

Pro které číslo je součet s jeho druhou mocninou minimální? $[-1/2]$

Určete rozměry kvádru s čtvercovou základnou, který má při daném objemu V nejmenší povrch.

$$\left[\text{krychle } a=\sqrt[3]{V}\,,\ S=6\sqrt[3]{V^2}\right]$$

Na hyperbole dané rovnicí $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ nalezněte bod, který je nejblíže bodu $A=[3;0]$.

$$[B_1=[2;1]\,,\ B_2=[2;-1]]$$

Určete intervaly monotonie daných funkcí:

a) $f(x)=4x-x^2$ $\quad[x\in(-\infty,2)$ rostoucí ; $x\in(2,+\infty)$ klesající$]$

b) $f(x)=x^2-6x$ $\quad[x\in(3,+\infty)$ rostoucí ; $x\in(-\infty,3)$ klesající$]$

c) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+3$ $\quad[x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$ rostoucí ; $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$ klesající$]$

d) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^4$ $\quad[x\in(-\infty,1/4)$ rostoucí ; $x\in(1/4,+\infty)$ klesající$]$

e) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ $\quad[x\in(-1,1)$ rostoucí ; $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ klesající$]$

f) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$ $\quad[x\in(1/2,1)\cup(1,+\infty)$ rostoucí ; $x\in(-\infty,0)\cup(0,1/2)$ klesající$]$

g) $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$ $\quad[x\in(0,2)$ rostoucí ; $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ klesající$]$

h) $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$ $\quad[x\in(1,+\infty)$ rostoucí ; $x\in(0,1)$ klesající$]$

Určete lokální extrémy funkce:

a) $f(x)=\cos 2x-2\sin x$ $\quad\left[\begin{array}{c}\pi/2+k\pi\,;\text{maxima}\\ \frac{7}{6}\pi+2k\pi\,;\ -\pi/6+2k\pi\ \text{minima}\end{array}\ k\in\mathbb{Z}\right]$

b) $f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ $\quad[\text{lokální maximum v } x=0]$

c) $f(x)=|\mathrm{e}^{-x}\sin x|$ $\quad\left[\begin{array}{l}\pi/4+k\pi\,;\ \text{maxima}\\ k\pi\,;\ \text{minima}\end{array}\ k\in\mathbb{Z}\right]$

d) $f(x)=\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ $\quad[\text{lokální minimum v } x=0]$

e) $f(x)=x\ln^2 x$ $\quad\left[\begin{array}{c}\text{lokální maximum v } x=\mathrm{e}^{-2}\\ \text{lokální minimum v } x=1\end{array}\right]$

f) $f(x)=2x+\mathrm{e}^{-x}$ $\quad[\text{lokální minimum v } x=-\ln 2]$

g) $f(x)=\ln(1+\mathrm{e}^{-x})$ $\quad[\text{ funkce nemá lokální extrémy}]$

h) $f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ $\quad[\text{lokální minimum v } x=0]$

Určete intervaly, ve kterých je funkce konkávní, ve kterých je konvexní a inflexní body funkce:

a) $f(x)=x^5-10x^2+x+3$ $\quad\left[\begin{array}{l}x\in(1,+\infty)\ \text{konvexní}\\ x\in(-\infty,1)\ \text{konkávní}\\ x=1\ \text{inflexní bod}\end{array}\right]$

b) $f(x) = x^4 + x^2 + \mathrm{e}^x$ [konvexní v $\mathbb{R}$]

c) $f(x) = 2x^2 + \ln x$ $\begin{bmatrix} x \in (1/2, +\infty) \text{ konvexní} \\ x \in (0, 1/2) \text{ konkávní} \\ x = 1/2 \text{ inflexní bod} \end{bmatrix}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ $\begin{bmatrix} x \in (-1, 1) \text{ konvexní} \\ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \text{ konkávní} \end{bmatrix}$

e) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ $\begin{bmatrix} x \in (-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty) \text{ konvexní} \\ x \in (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \text{ konkávní} \\ x = \pm\sqrt{2}/2 \text{ inflexní body} \end{bmatrix}$

f) $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}$ $\begin{bmatrix} x \in (-\infty, 0) \cup (8, +\infty) \text{ konvexní} \\ x \in (0, 8) \text{ konkávní} \\ x = 0 \text{ a } x = 8 \text{ inflexní body} \end{bmatrix}$

Určete inflexní body funkce:

a) $f(x) = x + \sin x$ [$x_k = k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$]
b) $f(x) = \mathrm{e}^{1/x}$ [$x = -2$]
c) $f(x) = \mathrm{e}^x(x^2 + 1)$ [$x_1 = -3\,;\ x_2 = -1$]
d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ [$x = \mathrm{e}^{8/3}$]

Určete největší hodnotu (M) a nejmenší hodnotu (m) funkce na daném intervalu:

a) $f(x) = x - \sqrt{x}\,,\quad x \in \langle 0, 4\rangle$ [$M = f(4) = 2\,,\ m = f(1/4) = -1/2$]
b) $f(x) = \dfrac{1}{3}\,x^3 - 2x^2 + 3\,,\quad x \in (-1, 2)$ [$M = f(0) = 3\,,\ m$ nenabývá]
c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}\,,\quad x \in (-1, 1)$ [nenabývá M ani m]
d) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x-1}\,,\quad x \in (1, 2\rangle$ [$m = f(2) = \operatorname{arctg} 3\,,\ M$ nenabývá]
e) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{1/x}\,,\quad x \in (0, +\infty)$ [$m = f(1/2) = \mathrm{e}^2/4\,,\ M$ nenabývá]
f) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}\,,\quad x \in (0, +\infty)$ [$M = f(1) = \mathrm{e}^{-1}\,,\ m$ nenabývá]
g) $f(x) = x \operatorname{arctg} x\,,\quad x \in (-\infty, \pi/4\rangle$ [$m = f(0) = 0\,,\ M$ nenabývá]
h) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}\,,\quad x \in (-\infty, +\infty)$ [$m = f(0) = 0\,,\ M$ nenabývá]

Určete asymptoty grafu funkce:

a) $f(x) = x\mathrm{e}^{1/x}$ [$y = x + 1$ v $\pm\infty\,;\ x = 0$]
b) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ [$y = 2$ v $\pm\infty\,;\ x = 1$]
c) $f(x) = 2x - \arccos \dfrac{1}{x}$ [$y = 2x - \pi/2$ v $\pm\infty$]
d) $f(x) = x \ln x$ [nemá asymptoty]
e) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}-1}}$ [$y = 0$ v $+\infty\,;\ x = 0$]
f) $f(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$ [$x = -1\,;\ x = 1$]
g) $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$ [$y = 2x$ v $-\infty$]
h) $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$ [$y = 0$ v $+\infty\,;\ y = -x$ v $-\infty$]

Určete průběh funkce $f(x) = \ln \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$D_f = (0, 1)\,,\quad f'(x) = \frac{1}{x(1-x^2)}\,,\quad f''(x) = \frac{3x^2-1}{x^2(1-x^2)^2}$$

x	0		$1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{2}$		1
f	$-\infty$	$-$	$-\frac{1}{2}\ln 2$	$-$	0	$+$	$+\infty$
f'				$+$			
f				$\nearrow$			
f''		$-$	0		$+$		
f		$\frown$	inf.bod		$\smile$		
asymp.	$x=0$						$x=1$

Určete průběh funkce $f(x) = \arccos\dfrac{1}{x}$.

$$D_f = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty), \quad f'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad f''(x) = \frac{1-2x^2}{|x|x\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}$$

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
f	$\pi/2$		π	0		$\pi/2$
f'		$+$	$+\infty$	$+\infty$	$+$	
f		$\nearrow$			$\nearrow$	
f''		$+$			$-$	
f		$\smile$			$\frown$	
asymp.	$y=\pi/2$					$y=\pi/2$

Určete průběh funkce $f(x) = \ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

$$D_f = (-1, 1),, \quad f'(x) = \frac{4x}{1-x^4}, \quad f''(x) = \frac{4(1+3x^4)}{(1-x^4)^2}$$

x	-1		0		1
f	$+\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	min.	$\nearrow$	
f''			$+$		
f			$\smile$		
asymp.	$x=-1$				$x=1$

Určete průběh funkce $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}-1}}$.

$$D_f = (0, +\infty), \quad f'(x) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{2x}}, \quad f''(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{(1-\mathrm{e}^{2x})^2}$$

x	0		$+\infty$
f	$+\infty$		0
f'		$-$	
f		$\searrow$	
f''		$+$	
f		$\smile$	
asymp.	$x=0$		$y=0$

Určete průběh funkce $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

$$D_f = (-1, 1), \quad f'(x) = \frac{2}{1-x^2}, \quad f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

x	-1		0		1
f	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	2	$+$	
f			$\nearrow$		
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$	inf.bod	$\smile$	
asymp.	$x=-1$				$x=1$

Určete průběh funkce $f(x)=\ln\left(1+x^3\right)$.

$$D_f=(-1,+\infty)\,,\quad f'(x)=\frac{3x^2}{1+x^3}\,,\quad f''(x)=\frac{3x(2-x^3)}{\left(1+x^3\right)^2}$$

x	-1		0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
f	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
f'		$+$	0		$+$		
f				$\nearrow$			
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\frown$	inf.bod	$\smile$	inf.bod	$\frown$	
asymp.	$x=-1$						

Určete průběh funkce $f(x)=\sqrt{4x-x^2}+4\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

$$D_f=\langle 0,4\rangle\,,\quad f'(x)=\sqrt{\frac{4}{x}-1}\,,\quad f''(x)=-\frac{2}{x^2}\left(\frac{4}{x}-1\right)^{-1/2}$$

x	0		4
f	0		2π
f'	$+\infty$	$+$	0
f		$\nearrow$	
f''		$-$	
f		$\frown$	
asymp.		nemá	

Určete průběh funkce $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$.

$$D_f=(-\infty,+\infty)\,,\quad f'(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}\,,\quad f''(x)=(x-2)\mathrm{e}^{-x}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f	$-\infty$		0		e^{-1}		$2\mathrm{e}^{-2}$		0
f'		$+$	1	$+$	0	$-$	$-\mathrm{e}^{-2}$	$-$	
f			$\nearrow$		lok.max.		$\searrow$		
f''				$-$			0	$+$	
f				$\frown$			inf.bod	$\smile$	
asymp.									$y=0$

Určete průběh funkce $f(x)=\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$.

$$D_f=(-\infty,+\infty)\,,\quad f'(x)=-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\,,\quad f''(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)^2}$$

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$+\infty$		0
f'		$-$	
f		$\searrow$	
f''		$+$	
f		$\smile$	
asymp.	$y=-x$		$y=0$

Určete průběh funkce $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$.

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)\,, \quad f'(x) = \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\,, \quad f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1+x^2)}{(1+x)^3}$$

x	$-\infty$		-1			0		$+\infty$
f	0	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	1	$+$	$+\infty$
f'		$-$			$-$	0	$+$	
f		$\searrow$			$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	
f''		$-$				$+$		
f		$\frown$				$\smile$		
asymp.	$y = 0$		$x = -1$					

Určete průběh funkce $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

$$D_f = (0, +\infty)\,, \quad f'(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2}\,, \quad f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

x	0		1	$\mathrm{e}^{3/2}$		$+\infty$
f	$-\infty$		1	$+$		$+\infty$
f'		$+$	2	$+$		
f				$\nearrow$		
f''		$-$		0	$+$	
f		$\frown$		inf.bod	$\smile$	
asymp.	$x = 0$					$y = x$

Určete průběh funkce $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$.

$$D_f = (0, +\infty)\,, \quad f'(x) = \frac{x-1}{x^2}\,, \quad f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$$

x	0		1		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$+$	1		$+$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$1/4$	$+$	
f		$\searrow$	lok.min.		$\nearrow$		
f''			$+$		0	$-$	
f			$\smile$		inf.bod	$\frown$	
asymp.	$x = 0$						

Určete průběh funkce $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

$$D_f = (-\infty, +\infty)\,, \quad f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\,, \quad f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$+$	0	$+$	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	
f''			$+$		
f			$\smile$		
asymp.	$y = -\frac{\pi}{2}x - 1$				$y = \frac{\pi}{2}x - 1$

Pro které kladné číslo x je jeho součet s jeho převrácenou hodnotou minimální? $[x = 1\,;\ s = 2]$

Pro které kladné číslo x je jeho rozdíl s jeho druhou mocninou maximální? $\left[x = \frac{1}{2}\,;\ r = \frac{1}{4}\right]$

Do kružnice o poloměru R vepište obdélník, který má největší obsah a tento obsah určete.

$\left[\text{čtverec o straně } a = R\sqrt{2}\,,\ P = 2R^2\right]$

Který obdélník vepsaný do půlkruhu o poloměru R má největší obsah a jaký?

$$\left[a = R\sqrt{2}\,,\ b = \frac{R}{\sqrt{2}}\,,\ P = R^2\right]$$

Do koule o poloměru R vepište válec, který má největší objem, a který má největší plášť.

$$\left[\begin{array}{l} r = R\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,,\ h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}\,,\ V = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3 \\ \text{pro plášť bez podstav } r = \dfrac{R}{\sqrt{2}}\,,\ h = R\sqrt{2}\,,\ S = 2\pi R^2 \\ \text{pro plášť s podstavami } r = R\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\,,\ h = 2R\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}\,;\ S = \pi R^2\left(1+\sqrt{5}\right) \end{array}\right]$$

Do rotačního kužele s výškou v a poloměrem podstavy R vepište válec s největším objemem.

$$\left[r = \frac{2}{3}R\,,\ h = \frac{1}{3}v\,,\ V = \frac{4}{27}\pi v R^2\right]$$

Který kvádr se čtvercovou podstavou má při daném objemu V nejmenší povrch?

$$\left[\text{krychle } a = \sqrt[3]{V}\,,\ v = \sqrt[3]{V}\,,\ S = 6\sqrt[3]{V^2}\right]$$

Který válec má při daném objemu V minimální povrch? $\left[r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\,,\ v = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}\,;\ S = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}\right]$
