## Reálná čísla a funkce.

Dokažte, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo.

---

Vyjádřete racionální číslo $0{,}5\overline{6}$, tj. desetinné číslo s periodickým rozvojem, ve formě zlomku. $\left[\dfrac{17}{30}\right]$

---

Pomocí absolutní hodnoty napište podmínku, které vyhovují právě všechna čísla intervalu$\langle -6, 4\rangle$.
$[|x+1| \le 5]$

---

Zapište pomocí nerovností s absolutní hodnotou

a) okolí bodu 2 o poloměru 3. $[|x-2| < 3]$

b) prstencové okolí bodu 4 o poloměru 2. $[0 < |x-4| < 2]$

---

Určete supremum a infimum množiny $M = \{x \in \mathbb{R}\,;\ |x-1| < x\}$.

$\left[\inf M = \dfrac{1}{2}\ ,\ \text{supremum neexistuje}\right]$

---

Určete infimum a supremum množiny $M = \left\{\dfrac{n+1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$. $[\inf M = 1\ ,\ \sup M = 2]$

---

Určete kartézské součiny množin $A = \{2, 3, 5\}$ a $B = \{0, 1, 3, 4\}$.

$$\begin{bmatrix} A \times B = \{(2,0);(2,1);(2,3);(2,4);(3,0);(3,1);(3,3);(3,4);(5,0);(5,1);(5,3);(5,4)\} \\ B \times A = \{(0,2);(0,3);(0,5);(1,2);(1,3);(1,5);(3,2);(3,3);(3,5);(4,2);(4,3);(4,5)\} \end{bmatrix}$$

---

Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$. $[D_f = (-\infty, 1\rangle \cup \langle 3, +\infty)]$

---

Určete definiční obor funkce $y = \log \dfrac{x-5}{x^2 - 10x + 24}$. $[D_f = (4,5) \cup (6, +\infty)]$

---

Sestrojte graf funkce $y = |1-x| - |1+x|$.

$$\left[ y = \begin{cases} 2 & x \in (-\infty, -1) \\ -2x & x \in \langle -1, 1\rangle \\ -2 & x \in (1, +\infty) \end{cases} \right]$$

---

Sestrojte graf funkce $y = x^2 + 6x + 10$. $[y - 1 = (x+3)^2]$

---

Sestrojte graf funkce $y = \dfrac{x-3}{x-2}$. $\left[y = 1 - \dfrac{1}{x-2}\right]$

---

Dokažte, že funkce $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ je omezená.

---

Dokažte, že funkce $y = 2x + 3$ je rostoucí na $\mathbb{R}$.

---

Zjistěte, která z následujících funkcí je sudá a která je lichá: a) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$; b) $f(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$. [a) je sudá; b) je lichá]

---

Určete, které funkce jsou periodické, a určete jejich základní periodu

a) $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2} \sin 2x + \dfrac{1}{3} \sin 3x$ [periodická; $T = 2\pi$]

b) $f(x) = 2 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + 3 \operatorname{tg} \dfrac{x}{3}$ [periodická; $T = 6\pi$]

c) $f(x) = \sin x^2$ [není periodická]

---

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Na kterém intervalu existuje inverzní funkce k funkce $y = f(x) = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\log_8 \frac{1}{x}$? Vyjádřete ji.

$[x = 8^{4-3y};\ y \in \mathbb{R}]$

---

Dokažte, že $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ a $\log 3$ nejsou racionální čísla.

---

Vyjádřete ve tvaru zlomku racionální čísla

a) $0{,}7\overline{6}$ $\left[\frac{23}{30}\right]$

b) $0{,}1\overline{3}$ $\left[\frac{2}{15}\right]$

c) $0{,}\overline{27}$ $\left[\frac{3}{11}\right]$

d) $0{,}\overline{7824}$ $\left[\frac{2608}{3333}\right]$

---

Určete množinu celých čísel, která splňují vztah:

a) $0 < x + 3 < 9$ $[\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}]$

b) $6 > 2 + x > -2$ $[\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}]$

---

Pomocí absolutní hodnoty reálného čísla napište podmínku, které vyhovují všechna reálná čísla daného intervalu:

a) $\langle -3, 3\rangle$, b) $\langle 3, 9\rangle$, c) $(-4, 2)$, d) $(-3, 7)$.

[a) $|x| \le 3$; b) $|x-6| \le 3$; c) $|x+1| < 3$; d) $|x-2| < 5$.]

---

Pomocí absolutní hodnoty reálného čísla napište podmínku, které vyhovují všechna reálná čísla, která leží vně intervalu:

a) $\langle -4, 4\rangle$; b) $(2, 10)$; c) $\langle -8, 2\rangle$; b) $(-3, 9)$.

[a) $|x| > 4$; b) $|x-6| \ge 4$; c) $|x+3| > 5$; d) $|x-3| \ge 6$.]

---

Zapište pomocí nerovnosti s absolutní hodnotou okolí bodu $a$ s poloměrem $r$:

a) $a = -1$, $r = 3$; b) $a = 2$, $r = 4$; c) $a = 4$, $r = 5$.

[a) $|x+1| < 3$; b) $|x-2| < 4$; c) $|x-4| < 5$.]

---

Zapište pomocí nerovností s absolutní hodnotou prstencové okolí bodu $a$ o poloměru $r$

a) $a = 3$, $r = 2$; b) $a = -2$, $r = 3$; c) $a = 5$, $r = 4$.

[a) $0 < |x-3| < 2$; b) $0 < |x+2| < 3$; c) $0 < |x-5| < 4$.]

---

Najděte supremum a infimum množiny $M$ dané rovnicemi

a) $x^2 + 11x + 24 < 0$ $[\sup M = -3,\ \inf M = -8]$

b) $x^2 - 12x + 36 \le 0$ $[\sup M = \inf M = 6]$

c) $x^2 + 6x + 10 < 0$ $[M = \emptyset;\ \sup M$ a $\inf M$ neexistují$]$

d) $x^2 - 4x + 5 > 0$ $[M = \mathbb{R};\ \sup M$ a $\inf M$ neexistují$]$

e) $|x| < |x-1|$ $\left[\sup M = \frac{1}{2},\ \inf M \text{ neexistuje}\right]$

d) $|2x+1| - |3x| > 0$ $\left[\sup M = 1,\ \inf M = -\frac{1}{5}\right]$

---

Určete supremum, infimum, maximum a minimum (pokud existují) množiny $M$, jejíž prvky náleží posloupnosti:

a) $\left\{\dfrac{n+2}{n+1}\right\}$ $\quad\left[\sup M = \dfrac{3}{2}\,,\ \inf M = 1\,,\ \max M = \dfrac{3}{2}\,,\ \min M \text{ neexistuje}\right]$

b) $\left\{(-1)^n \dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right\}$ $\quad[\sup M = 1\,,\ \inf M = -1\,,\ \max M \text{ neexistuje}\,,\ \min M \text{ neexistuje}]$

c) $\left\{\dfrac{1}{n!}\right\}$ $\quad[\sup M = 1\,, \inf M = 0\,,\ \max M = 1\,,\ \min M \text{ neexistuje}]$

---

Nechť $\{x+y\}$ je množina všech čísel vzniklých součtem čísel $x$ z množiny $\{x\}$ a čísel $y$ z množiny $\{y\}$. Dokažte, že

a) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$; $\qquad$ b) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$.

---

Znázorněte pomocí bodů v rovině kartézský součin množin $A$ a $B$, kde $A = \{0,1,2\}$ a $B$ je množina všech reálných nezáporných čísel menších než 2.

---

Je dána množina $A = \{-1,3,5\}$. Utvořte $A^2 = A \times A$.

$[A^2 = \{(-1,-1);(-1,3);(-1,5);(3,-1);(3,3);(3,5);(5,-1);(5,3);(5,5)\}]$

---

Určete definiční obor funkce

a) $y = \ln\left[1 - \log(x^2 - 5x + 16)\right]$ $\quad[D_f = (2,3)]$

b) $y = \ln|\sin x|$ $\quad\left[D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)\right]$

c) $y = \dfrac{x^2}{1+x}$ $\quad[D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}]$

d) $y = \sqrt{3x - x^3}$ $\quad[D_f = (-\infty, -\sqrt{3}\rangle \cup \langle 0, \sqrt{3}\rangle]$

e) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$ $\quad[D_f = \langle -1, 2\rangle]$

f) $y = \ln(x^2 - 4)$ $\quad[D_f = \{x \in \mathbb{R}\,;\ |x| > 2\}]$

g) $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$ $\quad[D_f = (4, \infty)]$

h) $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$ $\quad\left[D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\langle 2k\pi, \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\rangle \cup \langle \dfrac{4}{3}\pi + 2k\pi, \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi\rangle\right)\right]$

i) $y = \sqrt{\cos x^2}$ $\quad\left[D_f = \left\{|x| \le \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right\} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\langle \sqrt{\dfrac{\pi}{2}(4k-1)}, \sqrt{\dfrac{\pi}{2}(4k+1)} \right\rangle\right]$

j) $y = \sqrt[4]{\ln \operatorname{tg} x}$ $\quad\left[D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)\right]$

k) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ $\quad[D_f = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)]$

l) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ $\quad[D_f = \emptyset]$

m) $y = \dfrac{3}{4 - x^2} + \ln\left(x^3 - x\right)$ $\quad[D_f = (-1, 0) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)]$

n) $y = \ln\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}\right)$ $\quad[D_f = \langle 4, 6\rangle]$

o) $y = \sqrt{1 - |x|}$ $\quad[D_f = \langle -1, 1\rangle]$

p) $y = \sqrt{\ln\left(\dfrac{5x - x^2}{4}\right)}$ $\quad[D_f = \langle 1, 4\rangle]$

q) $y = \sqrt{\sin x + \dfrac{1}{2}}$ $\quad\left[D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle -\dfrac{1}{6}\pi + 2k\pi, \dfrac{7}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle\right]$

---

Sestrojte graf funkce:

a) *celá část čísla* $x$: $y = [x] = c$, kde $c \in \mathbb{Z}$ takové, že platí $x = c + \theta$, kde $\theta \in \langle 0, 1)$, $x \in \mathbb{R}$

b) *lomená část čísla* $x$: $y = \{x\} = x - [x]$

c) $$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

---

Ukažte, že $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$ a načrtněte graf.

---

Sestrojte graf funkce:

a) $y = |x| - x\,;$ b) $y = |x+1| + |x-1|\,;$

c) $y = -2|x|\,;$ d) $y = |x| - 2\,;$

e) $y = |x+2|\,;$ f) $y = |x-1| - 1\,;$

g) $y = |x+1| - 2|x-1|\,;$ h) $y = |x| + |x-1| - |x+1|\,.$

---

Sestrojte graf funkce:

a) $y = x^2 - 2x + 4\,;$ b) $y = x^2 - 3x + 2\,;$

c) $y = 2(x-1)^2\,;$ d) $y = x^2 + 4x + 6\,;$

e) $y = -x^2 + 4x - 6\,;$ f) $y = 5x - 2x^2\,;$

g) $y = |x^2 - 1|\,;$ h) $y = x^2 + 2 - |2x+1|\,.$

---

Sestrojte graf funkce:

a) $y = \dfrac{3x+2}{2x-3}\,;$ b) $y = \dfrac{2x-1}{3x+2}\,;$

c) $y = 1 - \dfrac{1-x}{1+x}\,;$ d) $y = -2 + \dfrac{2x+1}{2x+2}\,;$

e) $y = -1 + \dfrac{1}{(x+1)^2}\,;$ f) $y = 2 - \dfrac{1}{(x-1)^3}\,;$

g) $y = \left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|\,;$ h) $y = \left|\dfrac{2x-1}{x+1}\right|\,.$

---

Sestrojte graf funkce:

a) $y = \sqrt{-x-2}\,;$ b) $y = -\sqrt{x+1}\,;$

c) $y = \sqrt{4-x^2}\,;$ d) $y = -2\sqrt{4-x^2}\,;$

e) $y = -\sqrt{x^2-1}\,;$ f) $y = 3\sqrt{x^2-2}\,.$

---

Sestrojte graf funkce:

a) $y = \ln(x-1)\,;$ b) $y = 1 - \ln(x+2)\,;$

c) $y = \ln x^3\,;$ d) $y = \ln \dfrac{1}{x-1}\,;$

e) $y = \ln|x+1|$ ; f) $y = 3\ln\sqrt[3]{\dfrac{1}{x+1}}$ ;

g) $y = 1 + \mathrm{e}^{x-1}$ ; h) $y = \mathrm{e}^{-|x-1|}$ ;

i) $y = \dfrac{3}{\mathrm{e}^{2x}}$ ; j) $y = |\mathrm{e}^x - 2|$ ;

k) $y = -\left|\mathrm{e}^{2x} - 2\right|$ ; l) $y = \mathrm{e}^{3x+1} - 2$ .

---

Sestrojte graf funkce:

a) $y = 2\sin(2x+\pi)$ ; b) $y = -3\sin\left(\dfrac{x}{2} - \pi\right)$ ;

c) $y = \left|\sin 2\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\right|$ ; d) $y = 2\cos 3x$ ;

e) $y = 1 - \cos 2x$ ; f) $y = -\left|2\cos\left(3x + \dfrac{3}{2}\pi\right)\right|$ .

---

Sestrojte graf funkce:

a) $y = 2 + \operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$ ; b) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ ;

c) $y = 1 - \left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}\right|$ ; d) $y = \operatorname{cotg} 2x$ ;

e) $y = 1 - 2\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}$ ; f) $y = |\operatorname{cotg} x - 1|$ .

---

Zjistěte, která z následujících funkcí je sudá a která lichá

a) $y = 3x - x^3$ ; b) $y = a^x + x^{-x}$ , $a > 0$ ;

c) $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ ; d) $y = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$ , $a > 0$ ;

e) $y = \dfrac{\sin x}{x}$ ; f) $y = x + x^2$ .

[a) lichá; b) sudá; c) lichá; d) lichá; e) sudá; f) ani sudá ani lichá]

---

Sestrojte graf liché funkce, která má pro $x > 0$ vyjádření $f(x) = x^2 - 2$.

---

Určete vyjádření a graf sudé funkce, která je pro $x \geq 0$ definována vzorcem $f(x) = 2x + 3$.

$$\left[y = \begin{cases} 2x+3 & x \geq 0 \\ -2x+3 & x < 0 \end{cases}\right]$$

---

Zjistěte, která z následujících funkcí je sudá a která lichá:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$ ; b) $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ ;

c) $f(x) = \sin x - \cos x$ ; d) $f(x) = -2^{x^2}$ ;

e) $f(x) = x \cdot \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$ ; f) $f(x) = \dfrac{x}{a^x - 1}$ .

[a) sudá; b) lichá; c) ani sudá, ani lichá; d) sudá; e) sudá; f) ani sudá; ani lichá]

---

Dokažte, že

a) součin dvou sudých funkcí je funkce sudá
b) součin dvou lichých funkcí je funkce sudá
c) součin sudé a liché funkce je funkce lichá

---

Dokažte, že

a) $f(x) + f(-x)$ je sudá funkce
b) $f(x) - f(-x)$ je lichá funkce

---

Ukažte, že funkce $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ je omezená.

---

Ukažte, že následující funkce jsou shora omezené

$$\text{a) } y = -2x^2 + x - 1\,; \qquad \text{b) } y = 5 - x^2\,.$$

---

Dokažte, že následující funkce jsou zdola omezené

$$\text{a) } y = x^2 + 4x - 2\,; \qquad \text{b) } y = 1 - 2x + 6x^2\,.$$

---

Ukažte, že funkce $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ je ve svém definičním oboru neomezená.

---

Ukažte, že následující funkce jsou na daných intervalech rostoucí

$$\text{a) } y = x^2\,,\ x \in \langle 0, +\infty)\,; \qquad \text{b) } y = 2x + \sin x\,,\ x \in (-\infty, +\infty)\,.$$

---

Ukažte, že následující funkce jsou na daných intervalech klesající

$$\text{a) } y = x^2\,,\ x \in (-\infty, 0\rangle\,; \qquad \text{b) } y = 1 - 8x^3\,,\ x \in (-\infty, +\infty)\,.$$

---

Zjistěte, které funkce jsou periodické a určete jejich základní periodu:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \sin 3x\,; & \text{b) } y = 5\cos 2x\,; \\ \text{c) } y = 4\sin \pi x\,; & \text{d) } y = \sin \dfrac{3\pi x}{4}\,; \\ \text{e) } y = 2\sin(3x+5)\,; & \text{f) } y = -\cos \dfrac{x-1}{2}\,; \\ \text{g) } y = \sqrt{\operatorname{tg} x}\,; & \text{h) } y = \operatorname{tg}\sqrt{x}\,. \end{array}$$

$$\left[\text{a) } T = \frac{2}{3}\pi\,;\ \text{b) } T = \pi\,;\ \text{c) } T = 2\,;\ \text{d) } T = \frac{8}{3}\,;\ \text{e) } T = \frac{2}{3}\pi\,;\ \text{f) } T = 4\pi\,;\ \text{g) } T = \pi\,;\ \text{h) neperiodická}\right]$$

---

Určete základní periodu funkcí:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = 2\sin 3x + 3\sin 2x\,; & \text{b) } y = \sin x + \cos 2x\,; \\ \text{c) } y = \sin \dfrac{\pi}{3}x + \sin \dfrac{\pi}{4}x\,; & \text{d) } y = \sin\left(2\pi x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(3\pi x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 3\sin 5\pi x\,; \\ \text{e) } y = A\cos \lambda x + B\sin \lambda x\,. & \end{array}$$

$$\left[\text{a) } T = 2\pi\,;\ \text{b) } T = 2\pi\,;\ \text{c) } T = 24\,;\ \text{d) } T = 2\,;\ \text{e) } T = \frac{2\pi}{\lambda}\right]$$

---

Vyjádřete $y$ jako funkci proměnné $x$, jdou-li dány funkce

a) $y = z^2\,,\quad z = x + 1$ $\quad\left[y = (x+1)^2\right]$

b) $y = \sqrt{z+1}\,,\quad z = \operatorname{tg}^2 x$ $\quad\left[y = \dfrac{1}{|\cos x|}\right]$

Vyjádřete $u$ jako funkci proměnné $x$, jsou-li dány funkce

a) $y = \sin x\,, \quad z = \ln y\,, \quad u = \sqrt{1+z^2}$ $\left[u = \sqrt{1+(\ln\sin x)^2}\right]$

b) $y = 1+x\,, \quad z = \cos y\,, \quad u = \sqrt{1-z^2}$ $[u = |\sin(1+x)|]$

---

Rozepište následující složené funkce do řetězu jednoduchých funkcí, z nichž se skládají

a) $y = \sin^3 x$ $[y = z^3\,,\ z = \sin x]$

b) $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$ $[y = z^{2/3}\,,\ z = 1+x]$

c) $y = \ln \operatorname{tg} x$ $[y = \ln z\,,\ z = \operatorname{tg} x]$

d) $y = \sin^3(2x+1)^{1/2}$ $[y = u^3\,,\ u = \sin z\,,\ z = v^{1/2}\,,\ v = 1+x]$

e) $y = 5^{(3x+1)^2}$ $[y = 5^u\,,\ u = v^2\,,\ v = 3x+1]$

---

Určete funkci inverzní k dané funkci

a) $y = 2x$ $\left[y = \frac{x}{2}\right]$

b) $y = 1-3x$ $\left[y = \frac{1-x}{3}\right]$

c) $y = x^2+1\,, \quad x \geq 0$ $[y = \sqrt{x-1}\,,\ x \geq 1]$

d) $y = \dfrac{1}{1-x}$ $\left[y = \frac{x-1}{x}\,,\ x \neq 0\right]$

e) $y = \sqrt[3]{x^2+1}\,, \quad x \geq 0$ $[y = \sqrt{x^3-1}\,,\ x \geq 1]$

f) $y = 10^{x+1}$ $[y = \log \frac{x}{10}\,,\ x > 0]$

g) $y = \log_x 2$ $[y = 2^{1/x}\,,\ x \neq 0]$

h) $y = \dfrac{2^x}{1+2^x}$ $\left[y = \log_2 \frac{x}{1-x}\right]$

i) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ $\left[y = \frac{1-x}{1+x}\right]$

---