Věty o střední hodnotě

Pro funkci $f(x) = \sin x$ nalezněte v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ bod c, pro který platí $f'(c) = 0$. $\left[c = \dfrac{\pi}{2}\right]$

Pro funkci $f(x)$ nalezněte v intervalu $\langle a, b \rangle$ bod c, pro který platí $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$:

a) $f(x) = \operatorname{arctg} x\,; \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$ $\left[c = \sqrt{\dfrac{4}{\pi} - 1}\right]$

b) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2\,; \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$ $\left[c = \dfrac{1}{12}\left(5 - \sqrt{13}\right)\right]$

c) $f(x) = |\sin x| + x\,; \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ $\left[c = \pm\dfrac{\pi}{2}\right]$

Ukažte, že rovnice $x^3 - 3x^2 + 6x + 1 = 0$ má jediný reálný kořen.

Dokažte, že platí

$$\text{a)}\quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}\,; \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle\,;$$

$$\text{b)}\quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & x \in (0, +\infty) \\ -\dfrac{\pi}{2} & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Dokažte, že $|\sin b - \sin a| \le |a - b|$.

Dokažte pomocí Lagrangeovy věty tvrzení: Nechť funkce $f, g \,:\, \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ mají derivace, $f(a) = g(a)$ a pro $x \in (a, b)$ je $f'(x) < g'(x)$. Pak pro $x \in (a, b)$ platí $f(x) < g(x)$.

Vypočtěte limity

$$\text{a)}\quad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}\,; \qquad \text{b)}\quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^3}\,;$$

$$\text{c)}\quad \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}\,; \qquad \text{d)}\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{x}\,.$$

$\left[\text{a) } 1],;\ \text{b) neexistuje};\ \text{c) } \dfrac{1}{3};\ \text{d) } 0\right]$

Vypočtěte limity

$$\text{a)}\quad \lim_{x \to 0} x^2 \mathrm{e}^{1/x}\,; \qquad \text{b)}\quad \lim_{x \to 0_+} x^2 \ln x\,;$$

$$\text{c)}\quad \lim_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x\,, \quad n \in \mathbb{N}\,; \qquad \text{d)}\quad \lim_{x \to +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) x\,.$$

[a) neexistuje ; b) 0 ; c) 0 ; d) 2]

Vypočtěte limity:

$$\text{a)}\quad \lim_{x \to 0_+} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)\,; \qquad \text{b)}\quad \lim_{x \to +\infty} (\mathrm{e}^x - x)\,.$$

[a) 0 ; b) $+\infty$]

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Vypočtěte limity:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0_+} x^x\,; \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to +\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}\,; \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0_+}(\operatorname{cotg} x)^{\sin x}\,.$$

$\left[\text{a) } 1\,;\ \text{b) } \mathrm{e}^{-1/2}\,;\ \text{c) } 1\right]$

Vypočtěte $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$. [1]

Ověřte platnost Rolleovy věty pro funkci f v daném intervalu:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6\,, \quad x \in \langle 1, 2\rangle$ $\qquad \left[f'(c) = 0 \text{ pro } c = 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

b) $f(x) = x(x^2 - 1)\,, \quad x \in \langle -1, 1\rangle$ $\qquad \left[f'(c) = 0 \text{ pro } c = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

Dokažte, že polynom P s reálnými koeficienty má tuto vlastnost: Mezi každými dvěma reálnými kořeny polynomu P leží kořen polynomu P'.

V intervalu $(0,1)$ nalezněte bod, ve kterém je tečna ke grafu funkce $y = x^3$ rovnoběžná s přímkou spojující body $[0;0]$ a $[1;1]$. Napište rovnici této tečny. $\left[x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;\ \text{tečna } y - x + \dfrac{2\sqrt{3}}{9} = 0\right]$

Dokažte uvedené nerovnosti:

a) $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)\,, \qquad 0 < b < a\,, \quad n \in \mathbb{N}\,;$

b) $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \le |a - b|\,;$

c) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x\,, \qquad x \in (0, +\infty)\,;$

d) $1 + x \le \mathrm{e}^x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,;$

e) $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x < x\,, \qquad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)\,;$

f) $1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos x < 1\,, \qquad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)\,.$

Pro danou funkci f v uvedeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nalezněte bod c, který má vlastnost $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$:

a) $f(x) = x^2\,, \quad x \in \langle a, b\rangle$ $\qquad \left[c = \dfrac{1}{2}(a+b)\right]$

b) $f(x) = \ln x\,, \quad x \in \langle 1, a\rangle$ $\qquad \left[c = \dfrac{a-1}{\ln a}\right]$

c) $f(x) = (x^2-1)(x-2)\,, \quad x \in \langle 1, 2\rangle$ $\qquad \left[c = \dfrac{1}{3}\left(2 + \sqrt{7}\right)\right]$

Nalezněte hodnotu k a interval, ve kterém platí uvedené rovnosti:

a) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = k$ $\qquad \left[k = \dfrac{\pi}{2}\,;\ x \in \mathbb{R}\right]$

b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x} = k$ $\qquad \left[k = -\dfrac{3\pi}{4}\,,\ x \in (-\infty, -1)\,;\ k = \dfrac{\pi}{4}\,,\ x \in (-1, +\infty)\right]$

c) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = k$ $\qquad [k = -\pi\,,\ x \in (-\infty, -1\rangle\,; k = \pi\,,\ x \in \langle 1, +\infty)]$

d) $2\operatorname{arctg} x - \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = k$ $\qquad [k = 0\,;\ x \in \langle 0, +\infty)]$

Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}, \quad n\in\mathbb{N}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$; c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{(x-1)^3}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$; f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{\ln x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

$\left[\text{a)}\ \dfrac{1}{n}\,;\ \text{b)}\ \dfrac{3}{4}\,;\ \text{c) neexistuje}\,;\ \text{d)}\ +\infty\,;\ \text{e)}\ \dfrac{1}{2}\,;\ \text{f)}\ -\pi\,;\ \text{g)}\ 2\,;\ \text{h)}\ \dfrac{1}{6}\right]$

Vypočtěte uvedené limity:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(x^2-8)}{x^2-3x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{2x}$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}$; e) $\lim\limits_{x\to 1_+} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$; f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^3}$.

$\left[\text{a)}\ 2\,;\ \text{b)}\ \dfrac{1}{2}\,;\ \text{c)}\ 0\,;\ \text{d)}\ 2\,;\ \text{e)}\ 0\,;\ \text{f)}\ +\infty\right]$

Vypočtěte uvedené limity:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3\mathrm{e}^{-x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0_+} x^4 \ln x$; d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg} x)\cdot \ln x$;

e) $\lim\limits_{x\to 1_-} \ln x \cdot \ln(1-x)$; f) $\lim\limits_{x\to 0} x\mathrm{e}^{1/x}$.

$\left[\text{a)}\ 0\,;\ \text{b)}\ \dfrac{2}{\pi}\,;\ \text{c)}\ 0\,;\ \text{d)}\ 0\,;\ \text{e)}\ 0\,;\ \text{f) neexistuje}\right]$

Vypočtěte uvedené limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{cotg}^2 x\right)$; d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x - x^2)$.

$\left[\text{a)}\ 0\,;\ \text{b)}\ \dfrac{1}{2}\,;\ \text{c)}\ \dfrac{2}{3}\,;\ \text{d)}\ -\infty\right]$

Vypočtěte uvedené limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0_+} x^{\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0_+} (1+x)^{\ln x}$; d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

$[\text{a)}\ 1\,;\ \text{b)}\ \mathrm{e}^{-1}\,;\ \text{c)}\ 1\,;\ \text{d)}\ 1]$

Vypočtěte uvedené limity:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0_+} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - 1}\,; \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{x}\,;$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\ln(x+1)}\,; \qquad \text{d)}\ \lim_{x\to 1_+} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,.$$

$$\left[\text{a)}\ 1\,;\ \text{b)}\ \ln\frac{3}{2}\,;\ \text{c)}\ 0\,;\ \text{c)}\ +\infty\right]$$

Vypočtěte uvedené limity:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \left(\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}\right)\,; \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,;$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}\,; \qquad \text{d)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sinh 2x}{3x}\,.$$

$$\left[\text{a)}\ 0\,;\ \text{b)}\ 0\,;\ \text{c)}\ 1\,;\ \text{d)}\ \frac{2}{3}\right]$$
