PŘEDNÁŠKA 9

URČITÝ INTEGRÁL

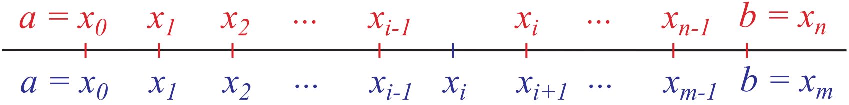
9.1 Riemannův integrál

Definice 1. Nechť $I = \langle a, b \rangle$ omezený interval v $\mathbb{R}$.
Dělením D intervalu $\langle a, b \rangle$ nazveme každou konečnou posloupnost bodů

$$x_0 = x \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots < x_{n-1} \leq x_n = b\,.$$

Definice 2. Řekneme, že dělení D' intervalu $\langle a, b \rangle$ je **zjemněním dělení** D právě tehdy, když je každý dělící bod dělení D dělícím bodem dělení D'.

Dělení D:



Dělení D' - zjemnění dělení D

Definice 3. Nechť je funkce f omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme

$$m_i = \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)\,, \qquad M_i = \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)\,.$$

Pro každé dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ sestrojme součty

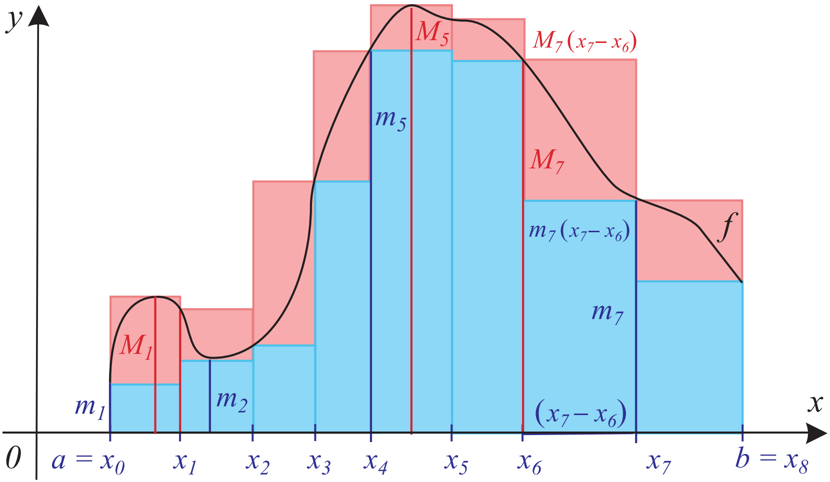
$$s_D = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})\,, \qquad S_D = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})\,.$$

Číslo s_D se nazývá **dolní Riemannův součet** a S_D **horní Riemannův součet funkce** $f(x)$ **příslušný k dělení** D.

Poznámka. Protože pro každé i je $m_i \leq M_i$, platí nerovnost

$$s_D \leq S_D.$$

Geometrická interpretace



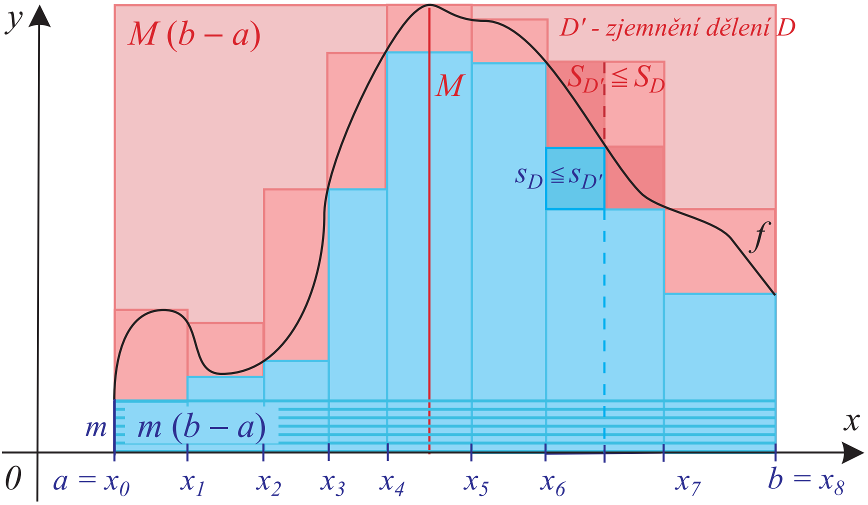
Dolní součet představuje obsah vepsaného obrazce složeného z obdélníků, který je pro každé dělení menší nebo roven obsahu plochy vymezené osou x a grafem funkce na daném intervalu. Horní součet udává velikost plochy opsaného obrazce, a je tedy pro každé dělení větší nebo roven obsahu uvedené plochy.

Označme symbolem $\mathcal{D}$ množinu všech dělení intervalu $\langle a, b\rangle$,

$$M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)\,, \qquad m = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)\,.$$

Věta. *Je-li D' zjemněním dělení D, platí nerovnosti:*

$$m(b-a) \le s_D \le s_{D'} \le S_{D'} \le S_D \le M(b-a)\,.$$



Věta. *Pro libovolná dvě dělení D_1 a D_2 intervalu $\langle a, b\rangle$ platí nerovnost $s_{D_1} \leq S_{D_2}$.*

Množina $\{s_D; D \in \mathcal{D}\}$ je **shora omezená**, například číslem $M(b-a)$, a **zdola omezená**, například číslem $m(b-a)$. Proto existují čísla

$$s = \sup_{D\in\mathcal{D}} s_D \in \mathbb{R} \qquad \text{a} \qquad S = \inf_{D\in\mathcal{D}} S_D \in \mathbb{R}\,.$$

Definice 4. Číslo $s = \sup\limits_{D\in\mathcal{D}} s_D$ se nazývá **dolní Riemannův integrál funkce f na intervalu** $\langle a, b\rangle$, číslo $S = \inf\limits_{D\in\mathcal{D}} S_D$ se nazývá **horní Riemannův integrál funkce f na intervalu** $\langle a, b\rangle$.

Definice 5. Nechť je $I = \langle a, b\rangle$ omezený interval v $\mathbb{R}$ a funkce $f(x)$ je omezená na I. Jestliže platí $s = S$, kde s je dolní a S horní Riemannův integrál funkce $f(x)$ na intervalu I, nazýváme tuto společnou hodnotu **Riemannovým integrálem funkce** $f(x)$ **na intervalu** $\langle a, b\rangle$ a značíme ji symbolem $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Existuje-li Riemannův integrál funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, říkáme, že funkce $f(x)$ je **integrovatelná na intervalu** $\langle a, b\rangle$. Vedle názvu Riemannův integrál se běžně používá také název **určitý integrál funkce** f **na intervalu** $\langle a, b\rangle$.

Poznámka. Uvědomme si, že Riemannův integrál je definován pouze pro omezené funkce na omezeném intervalu, v jiném případě nemá výše uvedená definice smysl.

Poznámka.

V naší geometrické interpretaci představují dolní a horní Riemannovy součty aproximace obsahu rovinné oblasti vymezené grafem dané funkce a osou x na daném intervalu $\langle a, b\rangle$, přičemž hodnota dolního součtu je vždy menší nebo rovna obsahu uvedené plochy, hodnota horního součty je vždy větší nebo rovna tomuto obsahu.

Viděli jsme, že při zjemňování dělení se dolní součet zvětšuje nebo zůstává konstantní, horní součet se naopak zmenšuje, případně zůstává konstantní, a oba se ”přibližují” k obsahu oblasti pod grafem funkce. Aby mělo smysl hovořit o obsahu tohoto obrazce, nemělo by záležet na tom, budeme-li jej aproximovat zdola nebo shora, což nastává tehdy, když se dolní Riemannův integrál rovná hornímu. V tomto případě je tedy obsah uvedeného obrazce roven Riemannovu integrálu $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta. *Je-li funkce f monotonní na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je na tomto intervalu integrovatelná.*

Věta. *Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je na tomto intervalu integrovatelná.*

Věta. *Funkce f je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ právě tehdy, když je pro každé $c \in (a, b)$ funkce integrovatelná na obou intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$. Přitom platí rovnost:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Poznámka. Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jsme definovali pro $b \geq a$. Předcházející věta nám umožňuje rozšířit definici integrálu pro $b \leq a$ vztahem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Uvědomme si, že tato definice není ve sporu s případem $b = a$, kdy je Riemannův integrál roven nule. Pro takto rozšířené integrály platí rovnost:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

za předpokladu, že alespoň dva integrály existují.

Prozatím jsme definovali Riemannův integrál pro funkce, které byly definovány na omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Nyní rozšíříme definici Riemannova integrálu na funkce, které jsou definovány na omezené množině $M \subset \mathbb{R}$.

Definice 6. Nechť je funkce $f : M \to \mathbb{R}$ definována na omezené množině $M \subset \mathbb{R}$ a nechť I je omezený uzavřený interval takový, že $M \subset I$. **Riemannovým integrálem funkce f přes množinu M** rozumíme integrál

$$\int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{kde} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ pro } x \in M\,, \\ 0 \text{ pro } x \in I \setminus M\,. \end{cases}$$

Integrál funkce f přes množinu M budeme značit $\displaystyle\int_M f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta. *Nechť jsou funkce* $f_1\,, f_2$ *integrovatelné na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a* c_1, c_2 *jsou reálné konstanty. Pak platí:*

$$\int_a^b \bigl(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\bigr)\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta. *Nechť jsou funkce* f, g *integrovatelné na intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Pak jsou na* $\langle a, b\rangle$ *integrovatelné také funkce* f^2 *a* $f \cdot g$.

Poznámka. Je třeba upozornit, že obecně neplatí rovnost

$$\int_a^b f(x) g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta. *Nechť je funkce* f *integrovatelná na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a pro každé* $x \in \langle a, b\rangle$ *je* $k \leq f(x) \leq K$. *Pak je*

$$k(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq K(b-a).$$

Věta. *Je-li integrovatelná funkce $f(x) \geq 0$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak platí:* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Věta. *Jsou-li funkce f, g integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ a pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí nerovnost $f(x) \leq g(x)$, pak platí nerovnost:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta. *Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak platí:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|\,\mathrm{d}x.$$

9.2 Integrál jako funkce horní meze

Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$. Pak pro každý bod $x \in \langle a, b\rangle$ existuje integrál $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Protože hodnota tohoto integrálu je určena jednoznačně, můžeme definovat funkci $F\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, \ \ x \in \langle a, b\rangle\,.$$

Integrál v této rovnosti je tedy **funkcí horní meze**. Analogicky je možné definovat integrál jako **funkci dolní meze**

$$G(x) = \int\limits_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\,, \ \ x \in \langle a, b\rangle\,.$$

Pro body $x,\ x+h \in \langle a, b\rangle$ je

$$F(x+h) = \int\limits_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) + \int\limits_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Věta. *Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$. Pak má funkce $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\ x \in \langle a, b\rangle$ následující vlastnosti:*

(i) *je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$;*

(ii) *je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in (a, b)$, pak je $F'(x_0) = f(x_0)$. Je-li $x_0 = a$, resp. $x_0 = b$, pak je $F'(a+) = f(a+)$, resp. $F'(b-) = f(b-)$;*

(iii) *má-li funkce f v bodě $x_0 \in (a, b)$ nespojitost 1. druhu, pak je $F'(x_0+) = f(x_0+)$, $F'(x_0-) = f(x_0-)$.*

9.3 Věty o střední hodnotě pro Riemannův integrál

Věta. *Nechť jsou* f , *a* g *integrovatelné funkce na intervalu* $\langle a, b\rangle$, $g(x) \geq 0$ *a* $k \leq f(x) \leq K$. *Pak platí nerovnost:*

$$k \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq K \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Je-li navíc funkce $f(x)$ *na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *spojitá, existuje* $\xi \in (a, b)$ *takové, že* $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$

Věta. *Nechť je funkce* f *spojitá na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a* g *monotonní funkce, která má na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *spojitou derivaci. Pak existuje bod* $\xi \in (a, b)$ *takový, že platí:*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(b) \int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x + g(a) \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

9.4 Newton–Leibnizova formule

Věta. *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a F je její primitivní funkce. Pak platí:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Poznámka. Newton–Leibnizova formule se obvykle zapisuje pomocí hranaté závorky ve tvaru

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Zřejmě platí:

$$[F(x) \pm G(x)]_a^b = [F(x)]_a^b \pm [G(x)]_a^b, \qquad [cF(x)]_a^b = c[F(x)]_a^b$$

pro každé dvě funkce F, G a libovolné reálné číslo c.

Newton–Leibnizova formule je velice užitečná, neboť nám konečně poskytuje návod, jak Riemannův integrál nalézt. Navíc nám umožňuje využít všechny početní metody, které jsme používali při hledání primitivní funkce: jakmile nalezneme pro danou funkci f její primitivní funkci F, stačí dosadit do Newton–Leibnizovy formule.

Poznámka. Při používání Newton–Leibnizovy formule nezáleží na tom, kterou z funkcí primitivních v intervalu $\langle a, b\rangle$ k funkci f použijeme. Jsou-li F, G dvě primitivní funkce k funkci f v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje konstanta C tak, že $G(x) = F(x) + C$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, a tedy

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)\,.$$

Definice 7. Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, nazýváme číslo $F(b) - F(a)$ **Newtonovým určitým integrálem** funkce $f(x)$ od bodu a do bodu b.

☛ *Příklad 9.1.*

Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{pro } x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}\,,\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z} \text{ nesoudělná čísla,} \\ \\ 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Lze ukázat, že pro tuto funkci existuje Riemannův integrál

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ale k této funkci neexistuje žádná na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ primitivní funkce. Proto nemá tato funkce Newtonův integrál.

9.5 Integrace per partes

Věta. *Nechť jsou f, g spojitě diferencovatelné funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí:*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Funkce

$$F(x) = \int_a^x f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t\,, \quad \tilde{F}(x) = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(t)g'(t)\ \mathrm{d}t$$

jsou primitivní funkce k integrovatelné funkci $f'(x)g(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Mohou se tedy lišit pouze o aditivní konstantu. Ale pro $x = a$ platí $F(a) = \tilde{F}(a) = 0$. Tedy pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí rovnost:

$$\int_a^x f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(t)g'(t)\ \mathrm{d}t\,.$$

Pro $x = b$ odtud plyne tvrzení věty. $\square$

9.6 Substituční metoda pro Riemannův integrál

Věta. *Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce $\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ má spojitou derivaci a platí $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$. Pak platí rovnost*

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Je-li $F(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ primitivní funkce k funkci $f(x)$, pak je podle věty o substituci pro neurčitý integrál funkce $\Psi(t) = F\big(\varphi(t)\big)$ primitivní funkcí k funkci $f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$ na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$. Proto je integrál vlevo roven

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Psi(\beta) - \Psi(\alpha) = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta. *Nechť je $f(x)$ spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$ a funkce $\varphi : \langle\alpha,\beta\rangle \to \langle a,b\rangle$ je spojitá diferencovatelná funkce, která zobrazuje interval $\langle\alpha,\beta\rangle$ na interval $\langle a,b\rangle$, a nechť je $\varphi'(t) \neq 0$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Důkaz. Nechť je $\Psi(t)$ primitivní funkce k funkci $f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$ na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$. Pak je integrál vpravo roven $\Psi(\beta)-\Psi(\alpha)$. Ale předpoklady věty zaručují, že existuje inverzní funkce $t=\varphi^{-1}(x)$ k funkci $x=\varphi(t)$ a že funkce $F(x)=\Psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$. Proto platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = \Psi\big(\varphi^{-1}(b)\big)-\Psi\big(\varphi^{-1}(a)\big) =$$

$$= \Psi(\beta)-\Psi(\alpha) = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Poznámka. Povšimněme si, že podobně jako v případě neurčitých integrálů se v obou větách objevuje tvar

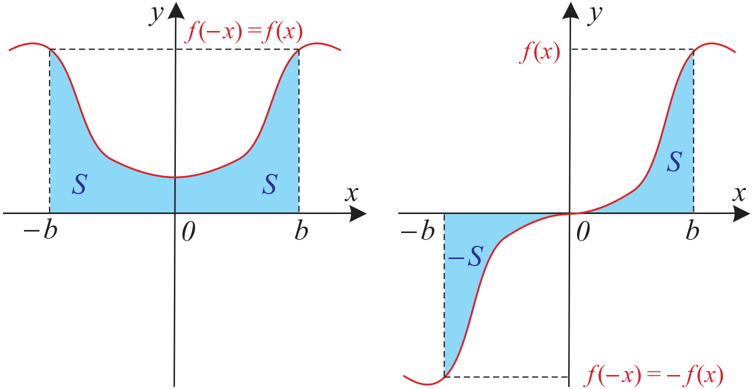
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ovšem předpoklady se liší podle toho, zda pomocí známého integrálu na levé nebo pravé straně hledáme druhý z integrálů v této rovnosti.

9.7 Integrál sudé, liché nebo periodické funkce

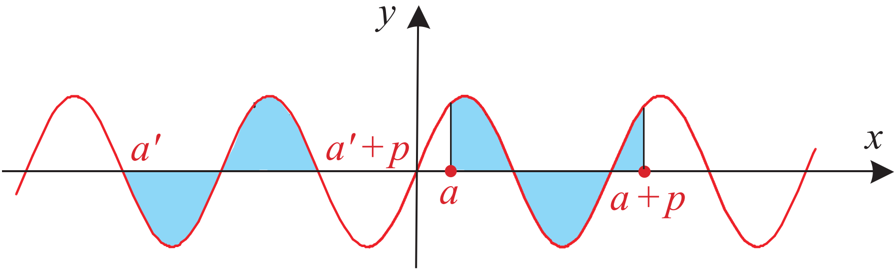
Věta. *Je-li funkce f sudá a integrovatelná v intervalu $\langle -b, b\rangle$, pak platí:* $\int\limits_{-b}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Věta. *Je-li funkce f lichá a integrovatelná v intervalu $\langle -b, b\rangle$, platí:* $\int\limits_{-b}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$



Věta. *Nechť funkce f je periodická s periodou T, nechť a, a' jsou reálná čísla. Existuje-li jeden z následujících integrálů, existuje i druhý z nich a platí*

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a'}^{a'+T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Volně řečeno, integrál přes integrační obor délky periody je stejný bez ohledu na to, kde je integrační obor umístěn.

9.8 Aplikace Riemannova integrálu v geometrii a fyzice

9.8.1 Využití Riemannova integrálu v geometrii

Předpokládejme, že derivace funkcí, které se ve vzorcích vyskytují, jsou spojité na celém integračním oboru.

Výpočet obsahu části roviny

1. Obsah S části roviny ohraničené grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$, spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$ a splňujících nerovnost $f(x) \geq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ a příslušnými úsečkami na přímkách $x = a$, $x = b$ je dán vztahem

$$S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Speciálně pro $g(x) = 0$ platí

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Obsah S části roviny ohraničené grafem funkce dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ spojitých na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a splňujících podmínky $\dot{\varphi}(t) > 0$ a $\psi(t) \geq 0$ pro všechna $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a příslušnými úsečkami na ose x a na přímkách $x = \varphi(\alpha)$, $x = \varphi(\beta)$ je dán vztahem

$$S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\dot{\varphi}(t)\, \mathrm{d}t.$$

3. Obsah S části roviny ohraničené grafem spojité a nezáporné funkce dané v polárních souřadnicích rovnicí $\varrho = f(\varphi)$ a průvodiči pro φ_1 a φ_2 s délkami $\varrho_1 = f(\varphi_1)$ a $\varrho_2 = f(\varphi_2)$, kde $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \leq 2\pi$ je dán vztahem

$$S = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tfrac{1}{2}\varrho^2 \,\mathrm{d}\varphi.$$

Tento vztah se nazývá **Leibnizův vzorec pro rovinnou výseč**.

Výpočet délky křivky

1. Délka s rovinné křivky dané jako graf funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, s krajními body $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ je dána vztahem

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

2. Délka s rovinné křivky, která je popsaná parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)\,,\ y = \psi(t)\,,\ t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, s krajními body $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$, $(\varphi(\beta), \psi(\beta))$, je dána vztahem

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}\, \mathrm{d}t\,.$$

3. Délka s prostorové křivky zadané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)\,,\ y = \psi(t)\,,\ z = \chi(t)\,,\ t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, s krajními body $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha))$, $(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta))$, je dána vztahem

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)}\, \mathrm{d}t\,.$$

Výpočet obsahu pláště rotačního tělesa

1. Obsah Q pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky, vytvořené jako graf spojité nezáporné funkce $y = f(x)\,,\ x \in \langle a, b\rangle$, kolem osy x je dán vztahem

$$Q = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Obsah Q pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinné křivky, která je popsaná parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)\,,\ y = \psi(t)\,,\ t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, splňujících podmínky $\dot{\varphi}(t) > 0$ a $\psi(t) \geq 0$ pro všechna $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$ s krajními body $\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\big)$, $\big(\varphi(\beta), \psi(\beta)\big)$ kolem osy x je dán vztahem

$$Q = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Výpočet objemu rotačního tělesa

1. Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky, vytvořené jako graf spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, kolem osy x je dán vztahem

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x.$$

2. Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinné křivky, která je popsaná parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, splňujících podmínky $\dot{\varphi}(t) > 0$ a $\psi(t) \geq 0$ pro všechna $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$ s krajními body $\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\big)$, $\big(\varphi(\beta), \psi(\beta)\big)$ kolem osy x je dán vztahem

$$V = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\dot{\varphi}(t) \, \mathrm{d}t.$$

9.8.2 Použití Riemannova integrálu ve fyzice a technice

Výpočet statických momentů

1. Statický moment S_x, resp. S_y oblouku homogenní rovinné křivky vzhledem k ose x, resp. y pro křivku zadanou jako graf spojité funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ je dán vztahem

$$S_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{resp.} \quad S_y = \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Statický moment S_x, resp. S_y oblouku homogenní rovinné křivky vzhledem k ose x, resp. y pro křivku popsanou parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, s krajními body $\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\big)$, $\big(\varphi(\beta), \psi(\beta)\big)$, je dán vztahem

$$S_x = \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t)}\,\mathrm{d}t\,, \quad \text{resp.} \quad S_y = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

3. Statický moment S_{xy}, resp. S_{xz}, resp. S_{yz} oblouku homogenní prostorové křivky vzhledem k rovině xy, resp. xz, resp. yz pro

křivku popsanou parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, s krajními body $\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha)\big)$, $\big(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta)\big)$, je dán vztahem

$$S_{xy} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \chi(t) g(t)\,\mathrm{d}t, \quad S_{xz} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t) g(t)\,\mathrm{d}t, \quad S_{yz} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) g(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde $g(t) = \sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t) + \dot\chi^2(t)}$.

4. Statický moment S_x, resp. S_y homogenního rovinného obrazce ohraničeného grafem spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ a příslušnými úsečkami na ose x a na přímkách $x = a$, $x = b$, vzhledem k ose x, resp. y je dán vztahem

$$S_x = \frac{1}{2} \int\limits_{a}^{b} (f(x))^2\,\mathrm{d}x, \quad \text{resp.} \quad S_y = \int\limits_{a}^{b} x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. Statický moment S_x, resp. S_y homogenního rovinného obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$ takových, že $f(x) \geq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ a příslušnými úsečkami na

ose x a na přímkách $x = a$, $x = b$, vzhledem k ose x, resp. y je dán vztahem

$$S_x = \frac{1}{2}\int_a^b \big((f(x))^2 - (g(x))^2\big)\,\mathrm{d}x, \quad \text{resp.} \quad S_y = \int_a^b x\big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

6. Statický moment S_{yz} homogenní rotační plochy vytvořené při rotaci grafu spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, kolem osy x vzhledem k rovině yz je dán vztahem

$$S_{yz} = 2\pi \int_a^b x f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

V tomto případě je $S_{xy} = S_{xz} = 0$.

7. Statický moment S_{yz} homogenního rotačního tělesa, jehož plášť se vytvoří při rotaci grafu spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, kolem osy x a které má podstavy v rovinách $x = a$, $x = b$, vzhledem k rovině yz, je dán vztahem

$$S_{yz} = \pi \int_a^b x(f(x))^2\,\mathrm{d}x,$$

Výpočet souřadnic těžiště

1. Souřadnice x_T, y_T těžiště oblouku homogenní rovinné křivky jsou dány vztahy $x_T = \dfrac{S_y}{s}$, $y_T = \dfrac{S_x}{s}$, kde s je délka uvažovaného oblouku a S_x , S_y jsou příslušné statické momenty.

2. Souřadnice x_T, y_T, z_T těžiště oblouku homogenní prostorové křivky jsou dány vztahy $x_T = \dfrac{S_{yz}}{s}$, $y_T = \dfrac{S_{xz}}{s}$, $z_T = \dfrac{S_{xy}}{s}$, kde s je délka uvažovaného oblouku a S_{xy} , S_{xz} , S_{yz} jsou příslušné statické momenty.

3. Souřadnice x_T, y_T těžiště homogenního rovinného obrazce jsou dány vztahy $x_T = \dfrac{S_y}{S}$, $y_T = \dfrac{S_x}{S}$, kde S je obsah uvažovaného rovinného obrazce a S_x , S_y jsou příslušné statické momenty.

4. Souřadnice x_T těžiště homogenního rotačního tělesa, jehož plášť se vytvoří při rotaci grafu spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, kolem osy x a které má podstavy v rovinách $x = a$, $x = b$, je dána vztahem $x_T = \dfrac{S_{yz}}{V}$, kde V je objem uvažovaného tělesa a S_{yz} je příslušný statický moment. Zde je $y_T = z_T = 0$.

Výpočet momentů setrvačnosti

1. Momenty setrvačnosti I_x, resp. I_y, resp. I_z oblouku homogenní rovinné křivky vzhledem k ose x, resp. y, resp. k počátku pro křivku zadanou jako graf spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, jsou dány vztahy

$$I_x = \int_a^b (f(x))^2 g(t)\,\mathrm{d}t, \quad I_y = \int_a^b x^2 g(t)\,\mathrm{d}t, \quad I_z = \int_a^b (x^2 + (f(x))^2) g(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde $g(t) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$.

2. Momenty setrvačnosti I_x, resp. I_y, resp. I_z oblouku homogenní rovinné křivky vzhledem k ose x, resp. y, resp. k počátku pro křivku popsanou parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, s krajními body $\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\big)$, $\big(\varphi(\beta), \psi(\beta)\big)$, je dán vztahem

$$I_x = \int_\alpha^\beta \big(\psi(t)\big)^2 g(t)\,\mathrm{d}t, \; I_y = \int_\alpha^\beta \big(\varphi(t)\big)^2 g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$I_z = \int_\alpha^\beta \big((\varphi(t))^2 + (\psi(t))^2\big) g(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{kde } g(t) = \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}.$$

3. Momenty setrvačnosti I_x, resp. I_y, resp. I_z oblouku homogenní prostorové křivky vzhledem k ose x, resp. y, resp. z pro křivku popsanou parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, s krajními body $\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha)\big)$, $\big(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta)\big)$, jsou dány vztahy

$$I_x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big((\psi(t))^2 + (\chi(t))^2\big) g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad I_y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big((\varphi(t))^2 + (\chi(t))^2\big) g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$I_z = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big((\varphi(t))^2 + (\psi(t))^2\big) g(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde $g(t) = \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)}$.

4. Momenty setrvačnosti I_x, resp. I_y, resp. I_z homogenního rovinného obrazce ohraničeného grafem spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ a příslušnými úsečkami na ose x a na přímkách $x = a$, $x = b$, vzhledem k ose x, resp. y, resp. počátku jsou dány vztahy

$$I_x = \frac{1}{3}\int\limits_a^b \big(f(x)\big)^3 \,\mathrm{d}x, \qquad I_y = \int\limits_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$I_z = \int\limits_a^b \Big(\frac{1}{3}\big(f(x)\big)^3 + x^2 f(x)\Big)\,\mathrm{d}x.$$

5. Momenty setrvačnosti I_x, resp. I_y, resp. I_z homogenního rovinného obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$ takových, že $f(x) \geq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ a příslušnými úsečkami na ose x a na přímkách $x = a$, $x = b$, vzhledem k ose x, resp. y, resp. počátku jsou dány vztahy

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \Big(\big(f(x)\big)^3 - \big(g(x)\big)^3\Big)\,\mathrm{d}x, \quad I_y = \int_a^b x^2\big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x,$$
$$I_z = I_x + I_y.$$

6. Moment setrvačnosti I_x homogenní rotační plochy vytvořené při rotaci grafu spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, kolem osy x vzhledem k ose x je dán vztahem

$$I_x = 2\pi \int_a^b \big(f(x)\big)^3 \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

7. Moment setrvačnosti I_x homogenního rotačního tělesa, jehož plášť se vytvoří při rotaci grafu spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, kolem osy x a které má podstavy v rovinách $x = a$, $x = b$, vzhledem k ose x, je dán vztahem

$$I_x = \frac{\pi}{2} \int_a^b \bigl(f(x)\bigr)^4 \, \mathrm{d}x.$$

9.9 Nevlastní Riemannův integrál

Definice 8. Nechť $a < b$ a pro každé $y \in (a, b)$ existuje Riemannův integrál $\displaystyle\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{y \to b-} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

nazveme ji **nevlastním** (nebo **zobecněným**) **Riemannovým integrálem funkce** $f(x)$ **od bodu** a **do bodu** b, a řekneme, že nevlastní integrál je **konvergentní**. V případě, že je výše uvedená limita nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že integrál **diverguje**. Nevlastní Riemannův integrál funkce $f(x)$ od a do b značíme opět $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Podle definice je tedy

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to b-} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.1}$$

O tomto integrálu říkáme, že je **nevlastní vlivem integrandu**. Bod b, v jehož každém okolí je integrand neomezený, se nazývá **singulárním bodem** integrandu nebo nevlastního integrálu. Uvedená rovnost platí i tehdy, když integrál vlevo existuje jako vlastní Riemannův integrál. Proto můžeme bez obav používat pro nevlastní integrály totéž označení jako pro integrály vlastní.

Nevlastní integrál pro funkce, jejichž jediným singulárním bodem je bod a, tj. dolní integrační mez, definujeme analogicky:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to a+} \int\limits_x^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.2}$$

Jsou-li oba krajní body a, b integračního oboru jedinými singulárními body integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pak rozdělíme integrační obor nějakým bodem $c \in (a,b)$ a vyšetřujeme integrály $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a

$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Podobně, je-li některý bod $c \in (a, b)$ singulárním bodem integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, uvažujeme každý z integrálů $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zvlášť.

9.9.1 Newton–Leibnizova formule pro nevlastní integrály

Věta. *Předpokládejme, že integrál $I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ má jediný singulární bod a, že existují vlastní integrály $\int_x^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $x \in (a, b)$ a že funkce f má primitivní funkci F v intervalu $(a, b\rangle$. Konverguje-li integrál I, pak platí:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - \lim_{x\to a+} F(x). \tag{9.3}$$

Analogicky v případě, že jediným singulárním bodem je b.

9.9.2 Srovnávací kritérium konvergence integrálu

Věta. *Nechť funkce $f,\ g$ jsou definovány v intervalu (a,b) a nechť $0 \le f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in (a,b)$. Nechť existují vlastní integrály $\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_\alpha^b g(x)\,\mathrm{d}x$ pro každé $\alpha \in (a,b)$. Potom platí následující dvě tvrzení.*

1. *Konverguje-li integrál $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, konverguje také integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*
2. *Diverguje-li integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, diverguje také integrál $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Funkce f, resp. integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ve srovnávacím kritériu se nazývá **minorantní funkce**, resp. **minorantní integrál**. Funkce g, resp. integrál $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ se nazývá **majorantní funkce**, resp. **majorantní integrál**.

9.9.3 Absolutně konvergentní integrály

Definice 9. Jestliže existují nevlastní Riemannovy integrály $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\displaystyle\int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$, nazýváme integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **absolutně konvergentní**.

Jestliže integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a integrál $\displaystyle\int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$ diverguje, říkáme, že integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je **neabsolutně konvergentní**.

Ze srovnávacího kritéria bezprostředně plyne následující tvrzení.

Věta. *Nechť funkce f je definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$, nechť existuje integrál $\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro každé $\alpha \in (a, b)$. Nechť konverguje integrál $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Potom konverguje i integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

9.9.4 Integrály nevlastní vlivem mezí

Definice 10. Nechť pro každé $y > a$ existuje Riemannův integrál $\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{y\to+\infty}\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazýváme ji **nevlastním** (nebo **zobecněným**) **Riemannovým integrálem**.

Nechť pro každé $y < a$ existuje Riemannův integrál $\int_y^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{y\to-\infty}\int_y^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazýváme ji **nevlastním** (nebo **zobecněným**) **Riemannovým integrálem**.

Definice 11. Nechť funkce f má vlastní Riemannův integrál přes libovolný omezený interval (x, y) a nechť $c \in \mathbb{R}$. Říkáme, že **nevlastní Riemannův integrál I funkce f od $-\infty$ do ∞ konverguje** právě tehdy, když konvergují integrály $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Integrál I značíme $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ a definujeme

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lze ukázat, že konvergence ani hodnota integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ nezávisí na volbě bodu $c \in \mathbb{R}$.

9.9.5 Absolutně konvergentní integrály

Definice 12. Jestliže existují nevlastní Riemannovy integrály $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$, nazýváme integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **absolutně konvergentní.**

Jestliže integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a integrál $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ diverguje, říkáme, že integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ je **neabsolutně konvergentní.**

Věta. *Nechť funkce f je definovaná v intervalu (a,∞) a nechť existuje vlastní Riemannův integrál $\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$ pro každé $y \in (a,\infty)$. Nechť konverguje integrál $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Potom konverguje také integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Avšak z konvergence integrálu $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ neplyne konvergence integrálu $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$.*

9.9.6 Nutná podmínka konvergence

Věta. *Nechť existuje vlastní integrál* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *pro každé* $b > a$ *a nechť existuje vlastní nebo nevlastní limita* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 0$. *Pak integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *diverguje.*

9.9.7 Srovnávací kritérium

Věta. *Nechť jsou funkce* f, g *definovány v intervalu* (a, ∞), *nechť* $0 \le f(x) \le g(x)$ *pro každé* $x \in (a, \infty)$. *Nechť existují vlastní integrály* $\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$ *pro každé* $\beta \in (a, \infty)$. *Potom platí následující dvě tvrzení.*

1. *Konverguje-li integrál* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$, *konverguje i integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. *Diverguje-li integrál* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, *diverguje i integrál* $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$.