PŘEDNÁŠKA 12

MATICE
A DETERMINANTY

12.1 Matice – základní pojmy

Matice A reálných nebo komplexních čísel je zadána tím, že je zadáno $m \times n$ reálných nebo komplexních čísel a_{rs}, kde index r, resp. s probíhá přirozená čísla od 1 do m, resp. od 1 do n. Čísla a_{rs} se nazývají **prvky** matice $\mathbf{A}$. Matici $\mathbf{A}$ s prvky a_{rs} zapisujeme ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{12.1}$$

nebo stručněji

$$\mathbf{A} = (a_{rs})_{s=1,\dots,n}^{r=1,\dots,m}.$$

Je-li z kontextu jasné, jakých hodnot nabývají indexy r a s, používáme také zápis (a_{rs}). Zápis (12.1) vede k tomu, nazývat index r, resp. s **řádkovým**, resp. **sloupcovým indexem** matice $\mathbf{A}$.

Uspořádanou n-tici, resp. uspořádanou m-tici čísel a_{rs} s konstantním řádkovým indexem r, resp. sloupcovým indexem s nazýváme **r-tým řádkem**, resp. **s-tým sloupcem** matice $\mathbf{A}$.

Uspořádanou dvojici přirozených čísel (m, n), kde m je počet řádků a n je počet sloupců matice $\mathbf{A}$, nazýváme **typem** matice $\mathbf{A}$. Je-li $m = n$, říkáme, že matice $\mathbf{A}$ je **čtvercová**. Je-li $m \neq n$, říkáme, že matice $\mathbf{A}$ je **obdélníková**.

Řádky, resp. sloupce matice $\mathbf{A}$ typu (m, n) můžeme považovat za n-složkové, resp. m složkové aritmetické vektory. Mluvíme proto o nich jako o **řádkových**, resp. **sloupcových vektorech** matice $\mathbf{A}$ a chápeme je jako prvky příslušných vektorových prostorů aritmetických vektorů.

Prvky a_{rr}, $r = 1, 2, \ldots, k$, kde $k = \min\{m, n\}$, nazýváme **diagonálními prvky** matice $\mathbf{A}$. Uspořádanou k-tici čísel $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk})$ nazýváme **diagonálou** matice $\mathbf{A}$. Prvky a_{rs} pro $r < s$ nazýváme **naddiagonálními** a pro $r > s$ **poddiagonálními** prvky matice $\mathbf{A}$.

Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou si **rovny** právě tehdy, když mají obě stejný typ a na stejných místech stejné prvky.

Jsou-li všechny prvky matice $\mathbf{A} = (a_{rs})$ typu (m, n) nulové, pak říkáme, že $\mathbf{A}$ je **nulová matice** a značíme ji $\mathbf{0}_{mn}$, nebo prostě **0**.
Jsou-li všechny nediagonální prvky matice $\mathbf{A}$ nulové, tj. $a_{rs} = 0$ pro $r \neq s$, pak říkáme, že $\mathbf{A}$ je **diagonální matice**. Uvědomme si, že diagonální matice nemusí být čtvercová. Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová diagonální matice a všechny diagonální prvky jsou 1, pak říkáme, že $\mathbf{A}$ je jednotková matice a značíme ji $\mathbf{E}_n$, nebo prostě **E**.
Jsou-li všechny naddiagonální, resp. poddiagonální prvky matice $\mathbf{A}$ nulové, pak říkáme, že matice $\mathbf{A}$ je **dolní**, resp. **horní trojúhelníková**.
Je-li $\mathbf{A} = (a_{rs})$, pak matice $-\mathbf{A} = (-a_{rs})$ se nazývá matice **opačná** k matici $\mathbf{A}$.
Je-li $\mathbf{A} = (a_{rs})$ matice typu (m, n), pak matici $\mathbf{B} = (b_{rs})$ typu (n, m), pro jejíž prvky platí

$$b_{rs} = a_{sr} \,, \quad r = 1, 2, \ldots, n \,, \;\; s = 1, 2, \ldots, m \,, \tag{12.2}$$

nazýváme **maticí transponovanou** k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $\mathbf{A}^T$.
Matice transponovaná k matici $\mathbf{A}$ tedy vznikne ”překlopením” ma-

tice $\mathbf{A}$ kolem její diagonály. Např. matice transponovaná k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 3, & 1 \\ 5, & 8, & -2 \end{pmatrix}$$

je matice

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2, & 5 \\ 3, & 8 \\ 1, & -2 \end{pmatrix}.$$

Z definičního vztahu (12.2) je vidět, že pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ platí

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}.$$

Čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{rs})$ se nazývá **symetrická** právě tehdy, když $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, tj. právě tehdy, když $a_{rs} = a_{sr}$ pro všechna r, s. Příkladem symetrické matice je např. matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 3, & 2 \\ 3, & 0, & -1 \\ 2, & -1, & 5 \end{pmatrix}.$$

Čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{rs})$ se nazývá **antisymetrická** právě tehdy, když $a_{rs} = -a_{sr}$ pro všechna r, s. Pro diagonální prvky pak platí $a_{rr} = -a_{rr}$, a tedy všechny diagonální prvky musí být nulové. Příkladem antisymetrické matice je např.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0, & 3, & 2 \\ -3, & 0, & -1 \\ -2, & 1, & 0 \end{pmatrix}.$$

12.1.1 Lineární operace s maticemi

Definice 1. Sčítání matic. Nechť $\mathbf{A} = (a_{rs}), \mathbf{B} = (b_{rs})$ jsou matice téhož typu (m, n). **Součtem** matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ nazýváme matici $\mathbf{C} = (c_{rs})$ typu (m, n), definovanou vztahem

$$c_{rs} = a_{rs} + b_{rs}\,, \quad r = 1, 2, \ldots, m\,,\ s = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{12.3}$$

Součet matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ zapisujeme $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Zřejmě pro

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 3 \\ -1, & 1, & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 1, & -2, & -3 \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3, & 1, & 3 \\ 0, & -1, & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože součet matic je definován vztahem (12.3) pomocí jejich prvků, a tedy čísel, plyne z komutativnosti a asociativnosti sčítání čísel také tatáž vlastnost pro sčítání matic. Tedy, jsou-li $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ matice téhož typu, pak platí rovnosti

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}\,, \tag{12.4}$$

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}\,. \tag{12.5}$$

Je-li $\mathbf{A}$ libovolná matice typu (m,n), **0** nulová matice téhož typu a $-\mathbf{A}$ matice opačná k matici $\mathbf{A}$, pak platí

$$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}\,, \tag{12.6}$$

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=(-\mathbf{A})+\mathbf{A}=\mathbf{0}\,. \tag{12.7}$$

Snadno se rovněž ověří, že

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T. \tag{12.8}$$

Definice 2. Násobení matice číslem. Je-li $\mathbf{A} = (a_{rs})$ matice typu (m, n) a k je číslo, pak k**-násobkem matice** $\mathbf{A}$ nazýváme matici $\mathbf{C} = (c_{rs})$ téhož typu, pro jejíž prvky platí

$$c_{rs} = k a_{rs}\,, \quad r = 1, 2, \ldots, m\,,\ s = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{12.9}$$

Zřejmě pro každou matici $\mathbf{A}$ platí

$$0\mathbf{A} = \mathbf{0}\,, \tag{12.10}$$

$$(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}\,. \tag{12.11}$$

Jsou-li $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ matice téhož typu, k, h čísla, pak

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}\,, \tag{12.12}$$

$$(k + h)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + h\mathbf{A}\,, \tag{12.13}$$

$$k(h\mathbf{A}) = (kh)\mathbf{A}\,, \tag{12.14}$$

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A}\,, \tag{12.15}$$

$$(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T\,. \tag{12.16}$$

12.1.2 Příklad

Ukážeme si použití uvedených rovností při práci s maticemi.

$$36\begin{pmatrix}1, & -1\\ 2, & 4\\ 3, & -6\end{pmatrix} + 18\begin{pmatrix}-2, & 2\\ -4, & -8\\ -6, & 14\end{pmatrix} =$$

$$18\left[2\begin{pmatrix}1, & -1\\ 2, & 4\\ 3, & -6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2, & 2\\ -4, & -8\\ -6, & 14\end{pmatrix}\right] =$$

$$= 18\left[\begin{pmatrix}2, & -2\\ 4, & 8\\ 6, & -12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2, & 2\\ -4, & -8\\ -6, & 14\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0, & 0\\ 0, & 0\\ 0, & 36\end{pmatrix}.$$

12.1.3 Násobení matic

Definice 3. Jsou dány matice $\mathbf{A} = (a_{rs})$ typu (m,p), $\mathbf{B} = (b_{rs})$ typu (p,n). **Součinem matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$** (v tomto pořadí) je matice $\mathbf{C} = (c_{rs})$ typu (m,n), definovaná předpisem

$$c_{rs} = a_{r1}b_{1s} + a_{r2}b_{2s} + \ldots + a_{rp}b_{ps} = \sum_{k=1}^{p} a_{rk}b_{ks} \tag{12.17}$$

pro všechna $r = 1, 2, \ldots, m$, $s = 1, 2, \ldots, n$. Součin matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ zapisujeme symbolem $\mathbf{AB}$.

Připomeneme-li si definiční vztah skalárního součinu dvou vektorů, vidíme, že prvek c_{rs} součinu $\mathbf{AB}$ dostaneme jako skalární součin r-tého řádku matice $\mathbf{A}$ a s-tého sloupce matice $\mathbf{B}$. Tím je rovněž objasněna podmínka na typy matic, která musí být splněna, aby součin byl definován.

Vlastnosti součinu matic. Je-li **E** jednotková matice a $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ libovolné matice, pak platí

$$\mathbf{EA} = \mathbf{A}\,, \quad \mathbf{BE} = \mathbf{B}\,, \tag{12.18}$$

jakmile jsou součiny na levých stranách rovností definovány.

Násobení matic je asociativní, tj. pro každé tři matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ platí

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}\,, \tag{12.19}$$

jakmile je součin definován.

Násobení matic není komutativní. Pro nulovou matici **0** a libovolné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ platí

$$\mathbf{0A} = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{A0} = \mathbf{0}\,, \tag{12.20}$$

jakmile je součin na levé straně definován.

Jsou-li $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ matice a k číslo, pak platí

$$k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B}\,, \tag{12.21}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}\,, \tag{12.22}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}\,, \tag{12.23}$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\,, \tag{12.24}$$

kdykoliv je alespoň jedna strana rovnosti definována.

Důkazy prvních tří rovností jsou zcela elementární. K důkazu čtvrté rovnosti stačí si zapsat jednotlivé prvky součinů na levé a pravě straně a pak je porovnat.

Součin $\mathbf{AB}$ dvou matic může být nulová matice i když obě matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou nenulové:

☛ ***Příklad***. Máme najít součin matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2, & 1 \\ 2, & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2, & 1 \\ 2, & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Součin dvou nenulových matic tedy může být nulová matice.

☛ ***Příklad***. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 2, & 0 \\ -3, & 4 \end{pmatrix}.$$

Pak součin $\mathbf{AB}$ není definován, protože typ $\mathbf{A}$ je $(2,2)$ a typ $\mathbf{B}$ je $(3,2)$.

Je však definován součin **BA** a platí

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 2, & 0 \\ -3, & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3, & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3, & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 3, & (-3) \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2, & -2 \\ 2, & 4 \\ 9, & 10 \end{pmatrix}.$$

☛ ***Příklad***. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos x, & \sin x \\ \sin x, & -\cos x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\cos x, & \sin x \\ \sin x, & \cos x \end{pmatrix},$$

pro libovolné reálné x. Pak jsou definovány oba součiny $\mathbf{AB}$ i **BA** a platí

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -\cos^2 x + \sin^2 x, & \cos x \sin x + \sin x \cos x \\ -\sin x \cos x - \sin x \cos x, & \sin^2 x - \cos^2 x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos 2x, & \sin 2x \\ -\sin 2x, & -\cos 2x \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -\cos 2x, & -\sin 2x \\ \sin 2x, & -\cos 2x \end{pmatrix}.$$

12.2 Determinanty

12.2.1 Determinant a jeho vlastnosti

Předpokládejme, že **A** je čtvercová matice. Ukážeme, jak lze každé takové matici přiřadit jisté reálné číslo, které budeme nazývat **determinantem** matice **A**. Nejdříve popíšeme základní myšlenku na maticích typu $(2, 2)$.

Definice determinantu matice typu (2,2).

Budeme se zabývat soustavou dvou lineárních algebraických rovnic

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1\,, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2\,. \end{array} \tag{12.25}$$

Předpokládejme, že matice této soustavy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}$$

je regulární, tj. že její řádky jsou lineárně nezávislé. Pak můžeme neznámou x_2 vyloučit tak, že násobíme 1. rovnici číslem a_{22}, druhou číslem $(-a_{12})$ a takto upravené obě rovnice sečteme. Dostaneme rovnici

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \,.$$

Protože matice $\mathbf{A}$ je regulární, je číslo $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Můžeme tedy psát

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \,. \tag{12.26}$$

Analogicky vyloučíme-li ze soustavy (12.25) neznámou x_1, dostaneme

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \,. \tag{12.27}$$

Označíme-li

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \,, \tag{12.28}$$

pak zřejmě

$$\det\begin{pmatrix} b_1, & a_{12} \\ b_2, & a_{22} \end{pmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}\,,$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}, & b_1 \\ a_{21}, & b_2 \end{pmatrix} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1$$

a vztahy (12.26), (12.27) můžeme psát ve tvaru

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1, & a_{12} \\ b_2, & a_{22} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11}, & b_1 \\ a_{21}, & b_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}}. \qquad (12.29)$$

Číslo

$$\det \mathbf{A} = \det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \qquad (12.30)$$

nazýváme **determinantem matice** **A**.

Vlastnosti determinantu matice typu (2,2).

Uvedeme si některé vlastnosti determinantu, jejichž platnost si čtenář snadno ověří sám pomocí definičního vztahu (12.30).

1. **Jestliže matice B vznikla z matice A záměnou řádků nebo sloupců, je** $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

$$\det \begin{pmatrix} a_{21}, & a_{22} \\ a_{11}, & a_{12} \end{pmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$$

$$-\det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}.$$

   Analogicky pro záměnu sloupců.

2. **Má-li matice A obě řádky stejné, je** $\det \mathbf{A} = 0$.

3. **Jestliže matice B vznikla z matice A vynásobením jednoho řádku číslem α, je $\det \mathbf{B} = \alpha \det \mathbf{A}$.**

$$\det \begin{pmatrix} \alpha a_{11}, & \alpha a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} = \alpha a_{11} a_{22} - \alpha a_{21} a_{12} =$$

$$= \alpha (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = \alpha \det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}.$$

4. **Má-li matice A jeden řádek nulový, je $\det \mathbf{A} = 0$.**

5. **Platí**

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}, & a_{12} + b_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11}+b_{11})a_{22}-a_{21}(a_{12}+b_{12}) = (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})+(b_{11}a_{22}-a_{21}b_{12}) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}.$$

6. **Jestliže matice B vznikla z matice A přičtením α-násobku jednoho řádku ke druhému, pak $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$.**
Skutečně, podle vlastností 5, 3 a 2 platí

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha a_{21}, & a_{12} + \alpha a_{22} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} + \alpha \det \begin{pmatrix} a_{21}, & a_{22} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}.$$

7. **Determinant součinu matic je součin determinantů těchto matic, tj.** $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$.

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}, & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11}, & a_{21}b_{12} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}, & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}, & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} +$$

$$+ \det\begin{pmatrix} a_{12}b_{21}, & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21}, & a_{21}b_{12} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{12}b_{21}, & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21}, & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= b_{11}b_{12}\det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{11} \\ a_{21}, & a_{21} \end{pmatrix} + b_{11}b_{22}\det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} -$$

$$- b_{12}b_{21}\det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} + b_{21}b_{22}\det\begin{pmatrix} a_{12}, & a_{12} \\ a_{22}, & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Determinant matice typu (3,3).

Než zavedeme determinant libovolné čtvercové matice typu (n, n), podívejme se na determinant matice typu $(3, 3)$. Definujeme

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} = \tag{12.31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \,.$$

Vidíme, že definiční vztah (12.31) obsahuje $3! = 6$ sčítanců, z nichž každý je součinem tří prvků matice, ležících v různých řádkách a různých sloupcích. Když si zapíšeme uspořádané trojice řádkových a sloupcových indexů jednotlivých sčítanců v (12.31), dostaneme 6 permutací základního pořadí $(1, 2, 3)$, a to

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 1, & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 2, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 3, & 2 \end{pmatrix}. \tag{12.32}$$

Je vidět, že k vytvoření 2. a 3. permutace potřebujeme dvě transposice (např. u 2. permutace přesunout 1 za 2 a pak ještě 1 za 3), k vytvoření 4. permutace potřebujeme 3 transposice (přesunout 1 za 2, pak 1 za 3 a pak ještě 2 za 3), k vytvoření posledních dvou permutací stačí vždy jedna transposice. Je-li počet transposic, potřebný k vytvoření příslušné permutace sudý, resp. lichý, mluvíme o sudé, resp. liché permutaci. Pro zápis permutace budeme používat symboliku obvyklou u funkcí. Značí-li např. π druhou permutaci v (12.32), pak je $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 1$, tj. $\pi(j)$ značí číslo, které je v této permutaci π na j-tém místě. Symbolem zn (π) značíme tzv. **znaménko** permutace π, což je 1, když je permutace π sudá, nebo -1, když je permutace π lichá.

Podíváme-li se nyní na znaménka sčítanců v definičním vztahu (12.31), vidíme, že jsou to právě znaménka permutací příslušných sloupcových indexů, jak jsou zapsány v (12.32). Této vlastnosti determinantu matice typu $(3, 3)$ využijeme při definici determinantu libovolné čtvercové matice typu (n, n).

Dříve, než to učiníme, uvedeme ještě jednu mechanickou pomůcky pro výpočet determinantu matice typu $(3,3)$. Abychom si zapamatovali volbu znaménka u jednotlivých součinů v (12.31), rozepíšeme matici **A** na matici typu $(5,3)$, resp. $(3,5)$ tak, že pod ní, resp. za ní připíšeme ještě první a druhý řádek, resp. první a druhý sloupec matice **A**. Dostaneme matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & \mathrlap{\searrow}\swarrow & & \mathrlap{\searrow}\swarrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \\ & \mathrlap{\searrow}\swarrow & & \mathrlap{\searrow}\swarrow & \\ a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & \swarrow & & \searrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \end{pmatrix}, \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \mathrlap{\searrow}\swarrow & & \mathrlap{\searrow}\swarrow & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \swarrow & & \mathrlap{\searrow}\swarrow & & \mathrlap{\searrow}\swarrow & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{pmatrix},$$

v nichž součiny vytvářené postupem zleva doprava mají znaménko $+$, při postupu zprava doleva znaménko $-$. Tento postup se nazývá **Sarrusovo pravidlo**.

Přerovnáním sčítanců ve vztahu (12.31) a vhodným vytknutím před závorku dostaneme

$$\det \mathbf{A} = a_{11}(a_{22}a_{23} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $\det \mathbf{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$, kde A_{1j} je determinant matice, která vznikne z matice **A** tak, že vynecháme 1. řádku a j-tý sloupec, přičemž takto získaný determinant násobíme ještě číslem $(-1)^{1+j}$. Tuto vlastnost determinantu matice typu $(3, 3)$ nyní zobecníme.

Definice determinantu libovolné čtvercové matice.

Definice 4. Nechť **A** je libovolná čtvercová matice typu (n, n). Pak **determinantem matice A** nazýváme číslo

$$\det \mathbf{A} = \sum \text{zn}\,(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)}\,,$$

kde sčítáme přes všechny permutace π n-tice $(1, 2, \ldots, n)$.

Rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce.

Zvolme pevně řádkový index r a označme $\mathbf{A}_{r1}, \mathbf{A}_{r2}, \ldots, \mathbf{A}_{rn}$ matice, které dostaneme z matice **A** tak, že vynecháme v ní r-tý řádek a postupně $1, 2, \ldots, n$-tý sloupec. Označme nyní

$$A_{rs} = (-1)^{r+s} \det \mathbf{A}_{rs}\,.$$

Toto číslo nazveme **algebraickým doplňkem prvku** a_{rs}. Pak platí

$$\det \mathbf{A} = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \ldots + a_{rn}A_{rn}\,, \quad r = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Říkáme, že jsme **determinant matice A rozvinuli podle r-tého řádku**.

Analogicky se vytváří **rozvoj determinantu matice A podle s-tého sloupce**

$$\det \mathbf{A} = a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + \ldots + a_{ns}A_{ns}\,, \qquad s = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Vlastnosti determinantu.

Dá se ukázat, že takto definovaný determinant má všechny vlastnosti 1 až 7, uvedené pro determinant matice typu $(2, 2)$, samozřejmě s formulacemi příslušně modifikovanými.
Snadno se rovněž ukáže, že pro determinant transponované matice $\mathbf{A}^T$ platí

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}\,.$$

Všimněme si ještě, že determinant diagonální, nebo obecněji trojúhelníkové matice je roven součinu diagonálních prvků. Odtud bezprostředně plyne, že **matice A je regulární právě tehdy, když její determinant je nenulový**.

Výpočet determinantu pomocí Gaussovy eliminace.

Vzhledem k tomu, že výpočet determinantu trojúhelníkové matice je velice jednoduchý, používá se i k výpočtu determinantu Gaussova eliminační metoda. Musíme si však uvědomit, že každá výměna řádků představuje změnu znaménka determinantu a každé násobení řádku nenulovým číslem znamená vynásobení determinantu tímto číslem. Používáme-li tedy Gaussovu eliminaci k výpočtu determinantu, musíme si poznamenávat počet výměn řádků a všechny koeficienty, jimiž jsme násobili řádky. Součin diagonálních členů trojúhelníkové matice, kterou jsme Gaussovou eliminací získali, musíme nyní násobit číslem 1 nebo -1 podle toho, zda počet výměn řádků byl sudý nebo lichý, a pak vydělit součinem všech koeficientů, jimiž jsme násobili během eliminace řádky. Takto získané číslo je pak determinant příslušné matice.

Čtenář si jistě uvědomil, že přičtení k danému řádku libovolné lineární kombinace ostatních řádků nemá na hodnotu determinantu žádný vliv, takže tyto úpravy si nemusíme poznamenávat.

☛ ***Příklad***. Vypočítejte determinant matice **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4, & 3, & -3 \\ 3, & 2, & -2 \\ 2, & -1, & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení.
Použijeme Sarrusovo pravidlo.

$$\det \mathbf{A} = 4{\cdot}2{\cdot}5+3{\cdot}(-2){\cdot}2+(-3){\cdot}3{\cdot}(-1)-(-3){\cdot}2{\cdot}2-3{\cdot}3{\cdot}5-4{\cdot}(-2){\cdot}(-1) = -4\,.$$

☛ ***Příklad***.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & 1, & 0, & 0 \\ -1, & 0, & 4, & 0 \\ 0, & 7, & 1, & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení.
Matice je trojúhelníková, takže determinant je součin diagonálních prvků

$$\det \mathbf{A} = 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 = 24\,.$$

☛ ***Příklad***.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0, & -1 \\ 2, & 4, & 0, & -2 \\ 3, & 0, & 1, & 4 \\ -1, & 5, & 0, & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\det \mathbf{A} = 2 \det \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0, & -1 \\ 1, & 2, & 0, & -1 \\ 3, & 0, & 1, & 4 \\ -1, & 5, & 0, & 2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

protože matice má dva stejné řádky.

☛ ***Příklad***.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\det \mathbf{A} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,.$$

☛ ***Příklad***.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi\cos\vartheta, & \sin\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\varphi, & \cos\varphi\cos\vartheta, & \cos\varphi\sin\vartheta \\ 0, & -\sin\vartheta, & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Řešení.

Použijeme Sarussovo pravidlo.

$$\det \mathbf{A} = \cos^2\varphi\cos^2\vartheta + \sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \sin^2\varphi\cos^2\vartheta =$$

$$= \cos^2\varphi(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta)+\sin^2\varphi(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta) = \cos^2\varphi+\sin^2\varphi = 1\,.$$

☛ ***Příklad***.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 3 & a_1, & 0, & 0, & 0 \\ 4 & 1, & a_2, & 0, & 0 \\ 5 & 0, & 1, & a_3, & 0 \\ 6 & 0, & 0, & 1, & a_4 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

Budeme postupně používat rozvoj podle 1. a posledního řádku

$$\det \mathbf{A} = 2\cdot(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} a_1, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & a_2, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & a_3, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & a_4 \end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+5} \det \begin{pmatrix} 3, & a_1, & 0, & 0 \\ 4, & 1, & a_2, & 0 \\ 5, & 0, & 1, & a_3 \\ 6, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2a_1a_2a_3a_4 + 6\cdot(-1)^{1+4} \det \begin{pmatrix} a_1, & 0, & 0 \\ 1, & a_2, & 0 \\ 0, & 1, & a_3 \end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{4+4} \det \begin{pmatrix} 3, & a_1, & 0 \\ 4, & 1, & a_2 \\ 5, & 0, & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2a_1a_2a_3a_4 - 6a_1a_2a_3 + 5\cdot(-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} a_1, & 0 \\ 1, & a_2 \end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 3, & a_1 \\ 4, & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2a_1a_2a_3a_4 - 6a_1a_2a_3 + 5a_1a_2 - 4a_1 + 3\,.$$