PŘEDNÁŠKA 13

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

13.1 Gaussova eliminační metoda

Připomeňme si nejdříve, jak jsme na střední škole řešili eliminační metodou soustavy lineárních algebraických rovnic.

Budeme řešit soustavu tří rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0\,, \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 0\,, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1\,. \end{array} \tag{13.1}$$

Nejdříve vyloučíme ze dvou rovnic neznámou x_1. Nejsnáze to učiníme tak, že (-2) násobek druhé rovnice přičteme k první rovnici a (-3) násobek druhé rovnice přičteme ke třetí rovnici. Dostaneme tak ekvivalentní soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcl} & - & x_2 & - & 7x_3 & = & 0\,, \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 0\,, \\ & - & x_2 & - & 11x_3 & = & 1\,. \end{array}$$

Vyměníme-li první a druhou rovnici, dostaneme

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 0\,, \\ & - & x_2 & - & 7x_3 & = & 0\,, \\ & - & x_2 & - & 11x_3 & = & 1\,. \end{array}$$

Nyní násobíme druhou rovnici číslem -1 a přičteme ke třetí rovnici. Dostaneme ekvivalentní soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 0\,, \\ & & x_2 & + & 7x_3 & = & 0\,, \\ & & & - & 4x_3 & = & 1\,, \end{array} \tag{13.2}$$

jejíž řešení již snadno nalezneme. Je to $x_1 = -3/4, x_2 = 7/4, x_3 = -1/4$. Vzhledem k tomu, že jsme prováděli jen ekvivalentní úpravy soustavy rovnic, mají obě ekvivalentní soustavy (13.1) a (13.2) stejná řešení. Nalezli jsme tedy i řešení zadané soustavy.

Označíme-li

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 4 \\ 3, & 2, & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

můžeme soustavu (13.1) zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,.$$

Matice **A** se nazývá **matice soustavy** (13.1) a vektor **b** se nazývá **vektor pravých stran** soustavy (13.1). Přidáme-li k matici soustavy **A** jako poslední sloupec vektor **b**, dostaneme tzv. **rozšířenou matici soustavy**. Rozšířená matice soustavy (13.1), resp. (13.2) je

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc} 2, & 1, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & 4, & 0 \\ 3, & 2, & 1, & 1 \end{array} \right), \qquad \text{resp.} \qquad \mathbf{C} = \left(\begin{array}{cccc} 1, & 1, & 4, & 0 \\ 0, & 1, & 7, & 0 \\ 0, & 0, & -4, & 1 \end{array} \right).$$

Všimněme si, že matice **C** je horní trojúhelníková matice, kterou dostaneme z matice **B**, provedeme-li na její řádky stejné úpravy jako jsme prováděli na rovnice vyšetřované soustavy. Lze tedy matici **B** převést na horní trojúhelníkovou matici **C** pomocí tří typů elementárních úprav řádek, a to:

- záměna libovolných dvou řádků;
- vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem;
- přičtení libovolného násobku kteréhokoli řádku k jinému řádku.

Analogicky lze provádět tyto tři typy elementárních úprav na sloupcích matice **B** a převést ji tak na dolní trojúhelníkovou matici. Metoda, kterou jsme použili k převodu soustavy (13.1) na (13.2), nebo analogicky matice **B** na matici **C**, je speciálním případem tzv. **Gaussovy eliminační metody**, kterou nyní popíšeme.

Gaussova eliminační metoda

Našim cílem je ukázat, jak lze pomocí elementárních úprav matice $\mathbf{A} = (a_{rs})$ převést tuto matici na horní trojúhelníkovou matici $\mathbf{B} = (b_{rs})$ téhož typu takovou, že jakmile je diagonální prvek $b_{kk} = 0$, pak je $b_{rs} = 0$ pro všechny indexy $r \geq k$ a všechny s. Takto získaná matice má jeden z těchto tří tvarů:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12}, & \cdots, & b_{1m}, & \cdots, & b_{1n} \\ 0, & b_{22}, & \cdots, & b_{2m}, & \cdots, & b_{2n} \\ \cdots & & & & & \\ 0, & 0, & \cdots, & b_{mm}, & \cdots, & b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12}, & \cdots, & b_{1n} \\ 0, & b_{22}, & \cdots, & b_{2n} \\ \cdots & & & \\ 0, & 0, & \cdots, & b_{nn} \\ 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ \cdots & & & \\ 0, & 0, & \cdots, & 0 \end{pmatrix},$$

$$
\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix}
b_{11}, & b_{12}, & \cdots, & b_{1k}, & \cdots, & b_{1n} \\
0, & b_{22}, & \cdots, & b_{2k}, & \cdots, & b_{2n} \\
\cdots & & & & & \\
0, & 0, & \cdots, & b_{kk}, & \cdots, & b_{kn} \\
0, & 0, & \cdots, & 0, & \cdots, & 0 \\
\cdots & & & & & \\
0, & 0, & \cdots, & 0, & \cdots, & 0
\end{pmatrix},
$$

kde všechny vypsané diagonální prvky jsou nenulové.

Je-li matice **A** nulová, má již požadovaný tvar. Předpokládáme tedy, že matice **A** má alespoň jeden nenulový prvek. Označme jej a_{rs}. Pak výměnou prvního a r-tého řádku a prvního a s-tého sloupce dostaneme matici, která má na místě $(1,1)$ nenulový prvek a_{rs}. Můžeme tedy předpokládat, že upravujeme matici **A** takovou, že $a_{11} \neq 0$.

V prvním kroku vynulujeme všechny prvky prvního sloupce ležící pod a_{11}. Je-li např. $a_{i1} \neq 0\,,\; i = 2, 3, \ldots, m$, pak přičtením $(-a_{i1}/a_{11})$-násobku prvního řádku k i-tému řádku dostaneme na místě $(i,1)$ nulu.

V druhém kroku stejným postupem vynulujeme všechny prvky druhého sloupce počínaje prvkem s řádkovým indexem 3.

Opakováním tohoto postupu dospějeme k matici mající jeden z uvedených tří tvaru.

Prvek, který používáme k nulování části sloupce pod diagonálou, se nazývá **klíčový prvek**.

Musíme si uvědomit, že výsledná matice závisí na volbě pořadí, v němž jsme aplikovali jednotlivé elementární úpravy, a tedy není zadanou maticí $\mathbf{A}$ jednoznačně určena.

☛ ***Příklad***. Gaussovou eliminační metodou převedeme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & -4, & 3, & 1, & 0 \\ 1, & -2, & 1, & -4, & 2 \\ 0, & 1, & -1, & 3, & 1 \\ 4, & -7, & 4, & -4, & 5 \end{pmatrix}$$

na horní trojúhelníkovou matici.

Řešení. Prvek na místě $(1,1)$ je nenulový, takže bychom mohli začít eliminaci rovnou. Avšak pro nulování prvku $a_{21} = 1$ bychom museli první řádek násobit zlomkem $-\frac{1}{2}$, a tomu se můžeme vyhnout tím, že vyměníme první a druhý řádek, čímž dostaneme klíčový prvek 1. V takto získané matici

$$\begin{pmatrix} 1, & -2, & 1, & -4, & 2 \\ 2, & -4, & 3, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & -1, & 3, & 1 \\ 4, & -7, & 4, & -4, & 5 \end{pmatrix}$$

vynulujeme první prvek druhého, resp. čtvrtého řádku tak, že k němu přičteme (-2)-násobek, resp. (-4)-násobek prvního řádku.

Dostaneme tak matici

$$\begin{pmatrix} 1, & -2, & 1, & -4, & 2 \\ 0, & 0, & 1, & 9, & -4 \\ 0, & 1, & -1, & 3, & 1 \\ 0, & 1, & 0, & 12, & -3 \end{pmatrix},$$

jejíž 1. sloupce má již požadovaný tvar. Tato matice má na místě $(2,2)$ nulu, takže vyměníme 2. a 3. řádek. V takto získané matici stačí ke 4. řádku přičíst (-1)-násobek 2. řádku, abychom dostali matici

$$\begin{pmatrix} 1, & -2, & 1, & -4, & 2 \\ 0, & 1, & -1, & 3, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 9, & -4 \\ 0, & 0, & 1, & 9, & -4 \end{pmatrix},$$

s upravenými dvěma sloupci. Přičteme-li ještě (-1)-násobek třetího řádku ke čtvrtému řádku, dostaneme hledanou horní trojúhelníkovou matici

$$\begin{pmatrix} 1, & -2, & 1, & -4, & 2 \\ 0, & 1, & -1, & 3, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 9, & -4 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Je to matice typu $\mathbf{B}_3$, jak jsme je popsali v předchozím odstavci.

✒ ***Příklad***. Gaussovou eliminační metodou převedeme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 2 \\ 3, & 6, & 2, & 11, & 3 \\ 3, & 6, & 3, & 4, & 8 \\ 1, & 4, & 5, & 1, & 4 \end{pmatrix}$$

na horní trojúhelníkovou matici.

Řešení. Ke 2. a 3. řádku přičteme (-3)-násobek 1. řádku a ke čtvrtému řádku přičteme (-1)-násobek 1. řádku. Dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 2 \\ 0, & 0, & -7, & -1, & -3 \\ 0, & 0, & -6, & -8, & 2 \\ 0, & 2, & 2, & -3, & 2 \end{pmatrix}.$$

V ní stačí nyní vyměnit 2. a 4. řádek, abychom dostali matici se dvěma upravenými sloupci

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 2 \\ 0, & 2, & 2, & -3, & 2 \\ 0, & 0, & -6, & -8, & 2 \\ 0, & 0, & -7, & -1, & -3 \end{pmatrix}.$$

Abychom se – podobně jako v předchozím příkladě – vyhnuli počítání se zlomky, zvolíme za klíčový prvek číslo -1, ležící v místě $(4,4)$. Musíme proto vyměnit 3. a 4. sloupec a 3. a 4. řádek. V této matici

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 4, & 3, & 2 \\ 0, & 2, & -3, & 2, & 2 \\ 0, & 0, & -1, & -7, & -3 \\ 0, & 0, & -8, & -6, & 2 \end{pmatrix}$$

přičteme ke 4. řádku (-8)-násobek třetího řádku a dostaneme hledanou horní trojúhelníkovou matici

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 4, & 3, & 2 \\ 0, & 2, & -3, & 2, & 2 \\ 0, & 0, & -1, & -7, & -3 \\ 0, & 0, & 0, & 50, & 26 \end{pmatrix}$$

typu $\mathbf{B}_2$.

13.2 Soustavy lineárních rovnic – teorie

Nechť a_{rs}, b_r pro $r = 1, 2, \ldots, m$, $s = 1, 2, \ldots, n$ jsou reálná nebo komplexní čísla. Budeme se zabývat **soustavou** m **lineárních algebraických rovnic o** n **neznámých**

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1\,, \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2\,, \\
\ldots & & & & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\,.
\end{array}
\tag{13.3}
$$

Řešením soustavy (13.3) budeme nazývat každou uspořádanou n-tici $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ čísel takovou, že po dosazení u_i za x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, do soustavy (13.3) dostaneme identity.

Soustavu (13.3) zapisujeme obvykle v maticovém tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{13.4}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matice **A** se nazývá **matice soustavy** (13.3), vektor **b** se nazývá **vektorem pravých stran** a vektor **x** se nazývá **vektorem neznámých**, nebo také značně nepřesně, ale výstižně **vektorem řešení** soustavy (13.3). Říkáme, že soustava (13.3) je **homogenní** právě tehdy, když vektor **b** jejich pravých stran je nulový.

V opačném případě říkáme, že soustava (13.3) je **nehomogenní**. Matice $(\mathbf{A}, \mathrm{b})$ se nazývá **rozšířená matice soustavy** (13.3).
Aritmetické vektory **x** a **b** zde zapisujeme někdy jako řádkové vektory, jindy jako sloupcové vektory a chápeme je jako matice typu $(1, n)$ nebo typu $(n, 1)$. Rozdíl mezi interpretací aritmetického vektoru jako řádkového nebo sloupcového hraje roli pouze v případě, kdy jím násobíme jinou matici. Ze souvislosti bude vždy patrné, o který typ vektoru v dané situaci jde.
Říkáme, že dvě soustavy lineárních algebraických rovnic jsou **ekvivalentní** právě tehdy, když mají obě stejné množiny řešení.
Příkladem ekvivalentních soustav lineárních rovnic jsou např. soustavy

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 1\,, \\ x_1 & - & 2x_2 & = & 4\,, \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & x_2 & = & 5\,, \\ x_1 & + & 3x_2 & = & -3\,, \end{array}$$

mající právě jedno řešení $(6/5, -7/5)$, nebo soustavy

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 1\,, \\ 4x_1 & + & 2x_2 & = & 2\,, \end{array} \qquad 2x_1 + x_2 = 1\,,$$

jejichž řešením je každá uspořádaná dvojice $(r, 1-2r)$ pro každé číslo r.
Každé dvě soustavy lineárních rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{13.5}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{13.6}$$

takové, že rozšířená matice $(\mathbf{C}, \mathbf{d})$ vznikla z rozšířené matice $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ nějakými elementárními řádkovými úpravami, jsou ekvivalentní. Při řádkových úpravách totiž měníme v podstatě jen pořadí rovnic a to nemá na řešení vliv. Zcela jiná situace nastane, zaměníme-li sloupce matice **A**. Každá záměna sloupců totiž představuje záměnu příslušných složek řešení. Vyměníme-li např. 1. a 2. sloupec matice **A**, změní se vektor řešení tak, že se v něm vymění 1. a 2. složka. Násobení s-tého sloupce číslem k znamená dělení s-té složky řešení číslem k. To znamená, že při přechodu od soustavy (13.5) k soustavě (13.6) pomocí sloupcových elementárních úprav se obecně množina řešení nezachovává.

☛ ***Příklad.*** Máme ukázat, že dané dvě soustavy jsou ekvivalentní:

1.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & -1\,, \\ 2x & + & y & = & 2\,. \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 13\,, \\ x & + & y & = & 5\,. \end{array}$$

Řešení. Obě soustavy mají právě jedno řešení $(-3, 8)$.

2.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 4\,, \\ 6x & - & 4y & = & 7\,. \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} 12x & + & 4y & = & 3\,, \\ 9x & + & 3y & = & 2\,. \end{array}$$

Řešení. Obě soustavy mají prázdnou množinu řešení.

3.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4\,, \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3\,, \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 10\,, \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4\,, \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 10\,, \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3\,. \end{array}$$

Řešení. Obě soustavy se liší pouze pořadím 2. a 3. rovnice. (Jiná argumentace: obě soustavy mají prázdnou množinu řešení.)

13.3 Homogenní soustava lineárních rovnic

13.3.1 Vlastnosti řešení homogenní soustavy

Budeme se zabývat homogenní soustavou m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots\ + a_{1n}x_n &= 0\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots\ + a_{2n}x_n &= 0\,, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots\ + a_{mn}x_n &= 0\,. \end{aligned} \tag{13.7}$$

Tuto soustavu budeme zapisovat ve tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}\,. \tag{13.8}$$

Homogenní soustava (13.7) má vždy alespoň jedno řešení, a to tzv. **triviální řešení** $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots, 0)$. Je-li matice **A** regulární, pak soustava (13.7) nemá kromě triviálního řešení žádné jiné řešení.

Skutečně, je-li **u** libovolné řešení, tj. $\mathbf{Au} = \mathbf{o}$, pak

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Au} = \mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{o} = \mathbf{o}\,,$$

a tedy **u** musí být triviální.

Je-li matice **A** singulární, pak soustava (13.7) má nekonečně mnoho řešení. Označíme-li h hodnost matice **A**, pak soustavu (13.7) můžeme Gaussovou eliminací převést na tvar

$$\begin{aligned}
c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \;\ldots\; + c_{1h}y_h + c_{1h+1}y_{h+1} + \;\ldots\; + c_{1n}y_n &= 0\,,\\
c_{22}y_2 + \;\ldots\; + c_{2h}y_h + c_{2h+1}y_{h+1} + \;\ldots\; + c_{2n}y_n &= 0\,,\\
\ldots\qquad\qquad&\\
c_{mh}y_h + c_{mh+1}y_{h+1} + \;\ldots\; + c_{mn}y_n &= 0\,,
\end{aligned} \tag{13.9}$$

kde vektor $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je vhodnou permutací vektoru neznámých $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, vzniklou případnými výměnami sloupců matice **A** během Gaussovy eliminace.

Je-li $h = n$, má soustava (13.7) pouze triviální řešení, jak jsme ukázali již výše.

Je-li $h < n$, pak za neznámé $y_{h+1}, y_{h+2}, \ldots, y_n$ můžeme dosadit libovolných $n - h$ čísel $r_{h+1}, r_{h+2}, \ldots, r_n$. Soustava (13.9) pak přejde v nehomogenní soustavu

$$\begin{aligned} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ \dots\ + c_{1h}y_h &= \ -c_{1h+1}y_{h+1} - \ \dots\ - c_{1n}y_n\,, \\ c_{22}y_2 + \ \dots\ + c_{2h}y_h &= -c_{2h+1}y_{h+1} - \ \dots\ - c_{2n}y_n\,, \\ &\dots \\ c_{mh}y_h &= -c_{mh+1}y_{h+1} - \ \dots\ - c_{mn}y_n\,, \end{aligned} \tag{13.10}$$

s trojúhelníkovou maticí. Tato soustava je ekvivalentní se soustavou (13.7) (až případně na pořadí složek vektorů řešení, vyvolaných výměnami sloupců při Gaussově eliminaci) a její řešení nalezneme již snadno tzv. **zpětným chodem**. Z poslední rovnice vypočítáme y_h, dosadíme do předposlední a vypočítáme y_{h-1}, atd., až z 1. rovnice vypočítáme y_1.

Snadno se ověří, že množina všech řešení homogenní soustavy tvoří vektorový prostor, podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbf{C}^n$. Skutečně, jsou-li **u**, **v** dvě řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$, tj. $\mathbf{Au} = \mathbf{o}$, $\mathbf{Av} = \mathbf{o}$, pak pro každou jejich lineární kombinaci $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ platí

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \mathbf{A}\alpha\mathbf{u} + \mathbf{A}\beta\mathbf{v} = \alpha\mathbf{Au} + \beta\mathbf{Av} = \mathbf{o}\,,$$

a tedy i vektor $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ je řešením soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$.

Snadno se ukáže, že tento vektorový prostor všech řešení soustavy má dimenzi $n-h$, kde n je počet neznámých a h je hodnost matice **A**. Za jeho bázi můžeme zvolit $n-h$ lineárně nezávislých řešení soustavy (13.10), které dostaneme tak, že za čísla $r_{h+1}, r_{h+2}, \ldots, r_n$ zvolíme složky vektorů standardní báze prostoru $\mathbb{R}^{n-h}$ (nebo $\mathbf{C}^{n-h}$)

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)\,,\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)\,,\ \ldots\,,\ \mathbf{e}_{n-h} = (0, 0, \ldots, 1)\,.$$

13.4 Nehomogenní soustava lineárních rovnic

Budeme se zabývat nehomogenní soustavou m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1\,, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2\,, \\ & & & \dots & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m\,, \end{array} \tag{13.11}$$

kde alespoň jedno z čísel b_j je nenulové. Tuto soustavu můžeme zapsat ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,. \tag{13.12}$$

Nehomogenní soustava (13.12) na rozdíl od homogenní soustavy

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o} \tag{13.13}$$

nemusí mít vždy řešení. Nutnou a postačující podmínku existence řešení soustavy (13.11) udává následující tvrzení, známé pod názvem **Frobeniova věta**.

Věta (Frobeniova) *Soustava (13.11) má řešení právě tehdy, když její matice* **A** *a rozšířená matice* $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ *mají stejnou hodnost.*

Důkaz. Důkaz této věty je celkem názorný. Označíme-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ sloupce matice **A**, pak soustavu (13.11) můžeme psát ve tvaru

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}\,.$$

Podle definice řešení je vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ řešením soustavy (13.11) právě tehdy, když po dosazení u_i za x_i , $i = 1, 2, \ldots, n$, dostaneme identitu, tj. právě tehdy, když platí

$$u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + \ldots + u_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}\,.$$

To však nastává právě tehdy, když vektor **b** je lineární kombinací sloupců matice **A**, tj. právě tehdy, když matice **A** a $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ mají stejnou hodnost.

13.4.1 Nehomogenní soustavy s regulární maticí, Cramerovo pravidlo

Je-li matice **A** nehomogenní soustavy

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{13.14}$$

regulární, pak homogenní soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$ má pouze triviální řešení, a tedy nehomogenní soustava má právě jedno řešení **u**. Pro toto řešení platí

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}\,.$$

Vynásobíme-li tuto rovnost inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ zleva, dostaneme

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\,. \tag{13.15}$$

Vyjádříme-li inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ pomocí algebraických doplňků, dostaneme

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{21}, & \cdots, & A_{n1} \\ A_{12}, & A_{22}, & \cdots, & A_{n2} \\ & \cdots & & \\ A_{1n}, & A_{2n}, & \cdots, & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{13.16}$$

Odtud pro r-tou složku u_r, $r = 1, 2, \ldots, n$, dostáváme

$$u_r = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (b_1 A_{1r} + b_2 A_{2r} + \ldots + b_n A_{nr}) \,, \quad r = 1, 2, \ldots, n \,. \quad (13.17)$$

Součet v závorce je však rozvoj determinantu matice $\mathbf{B}_r$ podle r-tého sloupce, kde matice $\mathbf{B}_r$ vznikne z matice **A** tak, že její r-tý sloupce nehradíme vektorem **b** pravých stran. Můžeme tedy rovnost (13.17) psát ve tvaru

$$u_r = \frac{\det \mathbf{B}_r}{\det \mathbf{A}} \,, \quad r = 1, 2, \ldots, n \,. \quad (13.18)$$

Rovnost (13.18) je známá pod názvem **Cramerovo pravidlo**.