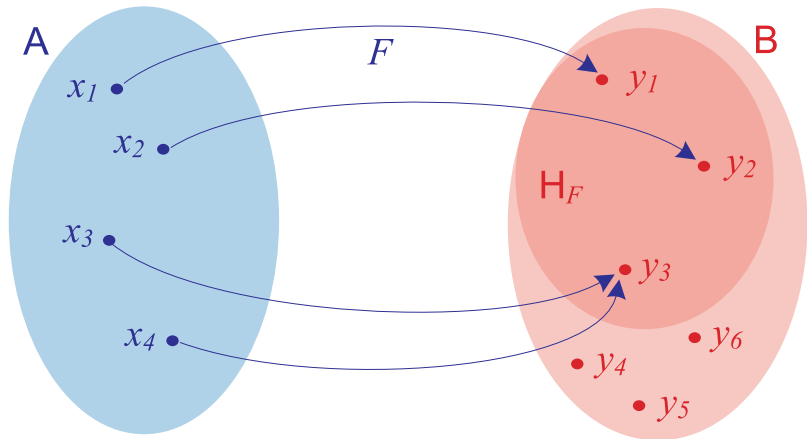


PŘEDNÁŠKA 4

FUNKCE

4.1 Pojem zobrazení a funkce



Uvažujme libovolné neprázdné množiny **A**, **B**. Přiřadíme-li každému prvku $x \in \mathbf{A}$ právě jeden prvek $y \in \mathbf{B}$, dostáváme množinu F uspořádaných dvojic $(x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, která se nazývá **zobrazení množiny A do množiny B**.

Prvku x se říká **vzor** prvku y , prvku y se říká **obraz** prvku x v zobrazení F ; rovněž se používá vyjádření, že y je **hodnota zobrazení** F v bodě x a píše se $y = F(x)$ nebo $x \mapsto F(x)$. Množina **A** se nazývá **definiční obor zobrazení** F a označuje také symbolem $\mathbf{D}(F)$ či \mathbf{D}_F . Množina všech obrazů v zobrazení F se nazývá **obor hodnot zobrazení** F a označuje se $\mathbf{H}(F)$ či \mathbf{H}_F ; platí: $\mathbf{H}(F) \subset \mathbf{B}$. Symbolicky se zobrazení F množiny **A** do množiny **B** zapisuje takto:

$$F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \quad \mathbf{D}(F) = \mathbf{A}$$

Speciální případy zobrazení F množiny A do množiny B

- ↳ **Zobrazení v množině A** nebo **zobrazení množiny A do sebe** je zobrazení F , kde $A = B$.

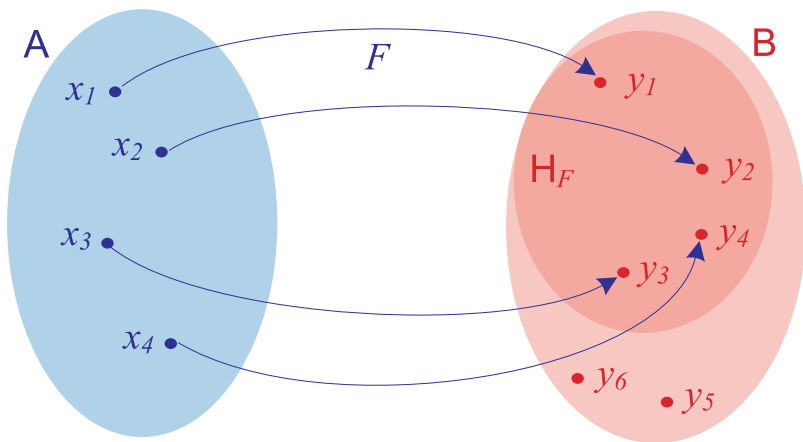
Sem patří:

- ↳ **Reálná funkce jedné reálné proměnné** je zobrazení v množině všech reálných čísel \mathbf{R} , tj.

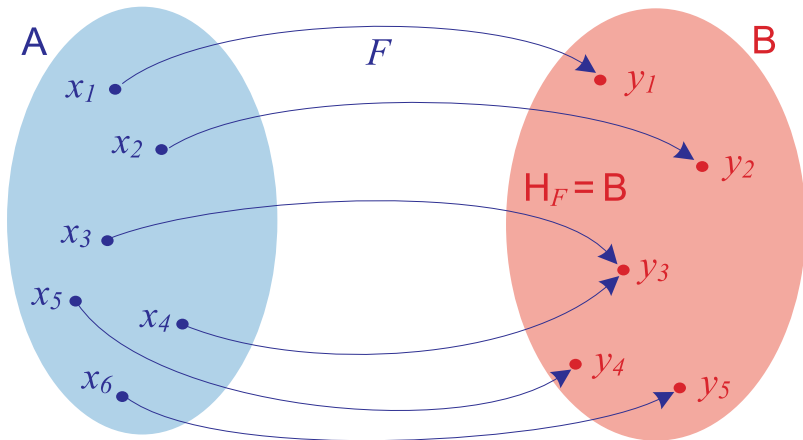
$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbb{R}.$$

- ↳ **Geometrická zobrazení v rovině a v prostoru**, kde \mathbf{A} , \mathbf{B} jsou množiny bodů v téže rovině, popř. v prostoru.

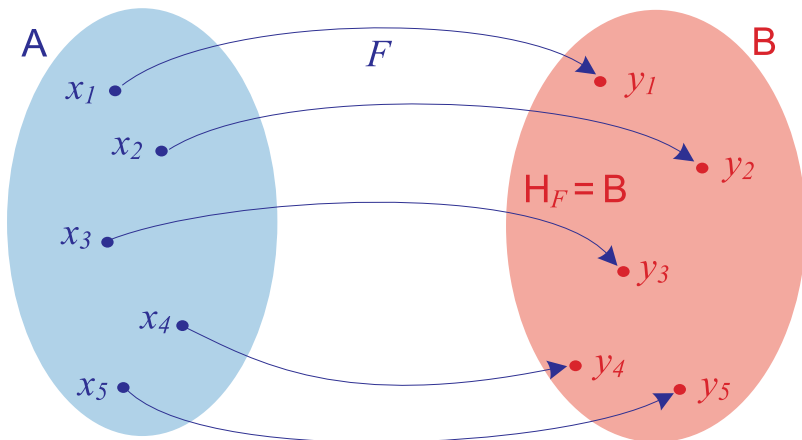
- ↳ **Prosté zobrazení** je takové zobrazení F , ve kterém je každý prvek $y \in \mathbf{H}(F)$ obrazem **právě jednoho** prvku $x \in \mathbf{A} = \mathbf{D}(F)$, neboli **každé dva různé vzory** x_1, x_2 **mají také různé obrazy** $F(x_1), F(x_2)$.



- ↳ **Zobrazení množiny A na množinu B** je takové zobrazení F , ve kterém je každý prvek množiny B obrazem aspoň jednoho prvku množiny A , tj. $B = H(F)$.

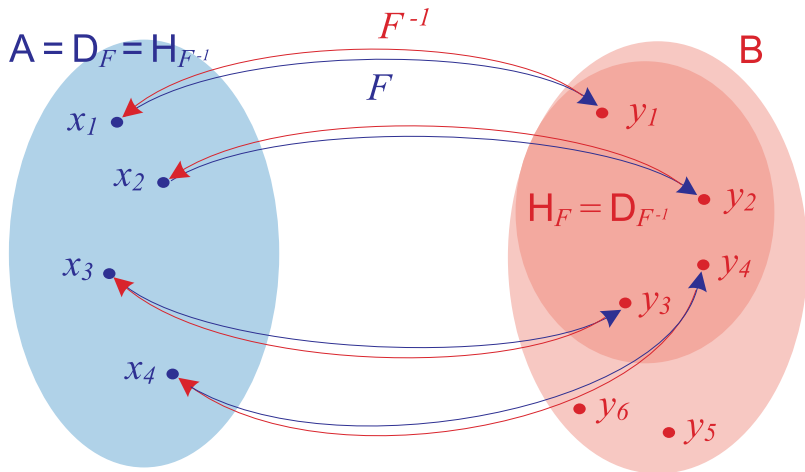


- ↳ **Vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami A , B je prosté zobrazení množiny A na množinu B .**

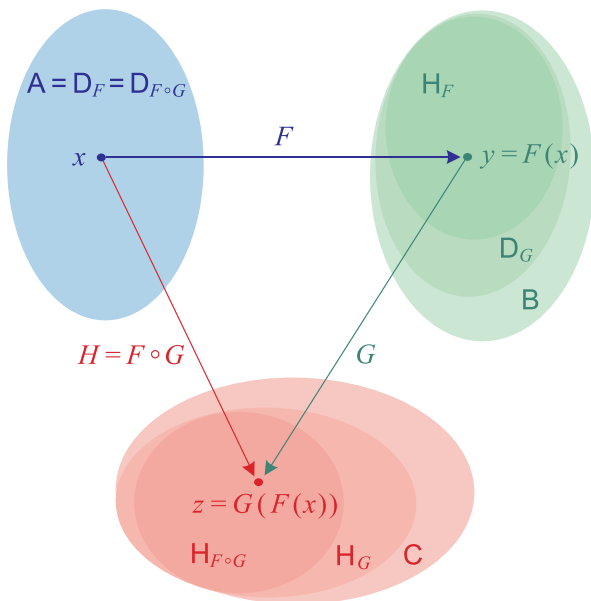


Je-li dané zobrazení F **prosté**, pak k němu existuje právě jedno prosté zobrazení, které ke každému prvku $y \in \mathbf{H}(F)$ přiřazuje jeho vzor $x \in \mathbf{D}(F)$; toto zobrazení se nazývá **inverzní zobrazení k zobrazení F** a značí se symbolem F^{-1} . Platí: $\mathbf{D}(F^{-1}) = \mathbf{H}(F)$, $\mathbf{H}(F^{-1}) = \mathbf{D}(F)$,

$$x = F^{-1}(y) \text{ právě když } y = F(x)$$



Nechť G a F jsou dvě zobrazení, pro která je $\mathbf{H}_F \subset \mathbf{D}_G$. Zobrazení H se nazývá **kompozicí zobrazení F a G** , je-li $H(x) = G(F(x))$ pro všechna $x \in \mathbf{D}_F$. Kompozice zobrazení F a G (v tomto pořadí) se symbolicky zapisuje $H = F \circ G$.



4.2 Reálná funkce jedné reálné proměnné

Jak je uvedeno v předchozí části, **reálnou funkcí jedné reálné proměnné** se rozumí zobrazení v množině všech reálných čísel \mathbf{R} ; reálnou funkci budeme zpravidla značit f , vzor x se nazývá **proměnná** nebo **argument funkce** f , obraz y se nazývá **funkční hodnota** nebo **hodnota funkce** f v bodě x a značí se $f(x)$.

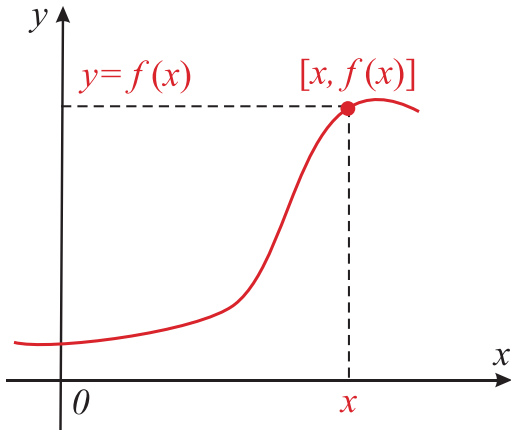
Názornou představu o vlastnostech funkce poskytuje její **grafické vyjádření** neboli **graf funkce**, který sestojíme takto:

V rovině zvolíme pravoúhlou soustavu souřadnic s počátkem O a osami x, y . Pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ přiřadíme v této rovině každé uspořádané dvojici reálných čísel $[x, f(x)]$ bod, který má (v uvedeném pořadí) souřadnice $(x, f(x))$. Množina všech takových bodů roviny se nazývá **graf funkce** f :

$$\text{graf } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbf{D}(f), y = f(x)\}$$

Obsahuje-li definiční obor $\mathbf{D}(f)$ konečný počet hodnot argumentu x , můžeme sestojit celý graf přesně, bod po bodu. Obsahuje-li

však definiční obor dané funkce nekonečně mnoho hodnot, je nutné graf přibližně dokreslit. Ke správnému nakreslení grafu jsou nezbytné znalosti různých vlastností funkce. Proto se v následujícím podíváme na základní elementární funkce a u každé z nich si připomeneme její **analytické zadání**, tj. **vzorec** či rovnici tvaru $y = f(x)$, kde $f(x)$ je výraz s proměnnou x , a příslušné **grafické zobrazení**.



4.2.1 Vlastnosti a druhy funkcí

Některé funkce mají určité společné vlastnosti, podle kterých je nazýváme. Nejdůležitější z nich jsou následující:

↳ Funkce sudé a liché

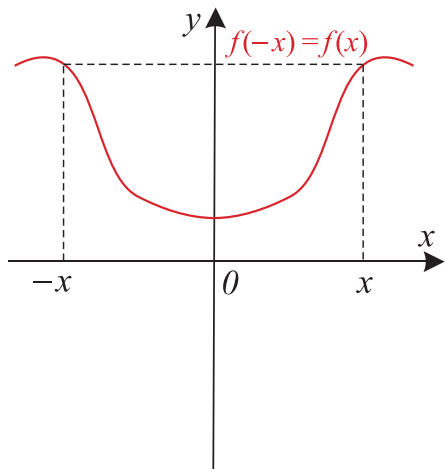
Nechť má funkce f takovou vlastnost, že pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je také $-x \in \mathbf{D}(f)$

↳ Funkce f se nazývá **sudá funkce**, právě když pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je $f(-x) = f(x)$.

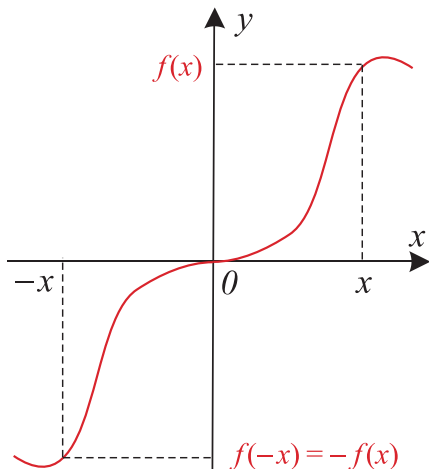
↳ Funkce f se nazývá **lichá funkce**, právě když pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je $f(-x) = -f(x)$.

(Funkce samozřejmě nemusí splňovat ani jednu z podmínek, tedy nemusí být ani sudá, ani lichá.)

Funkce sudá:

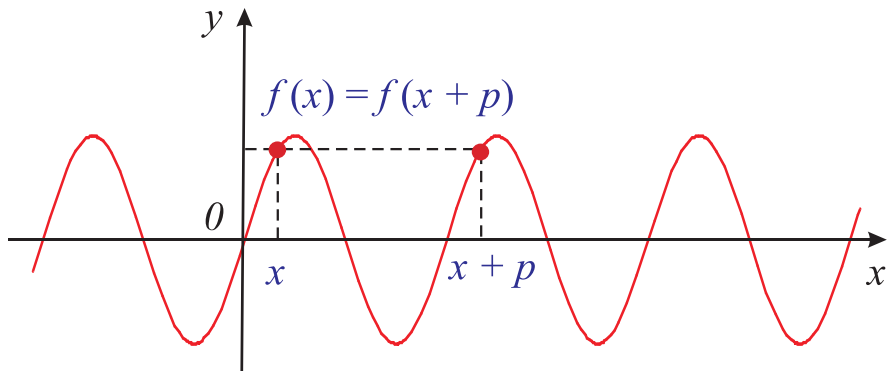


Funkce lichá:



↳ Funkce periodické

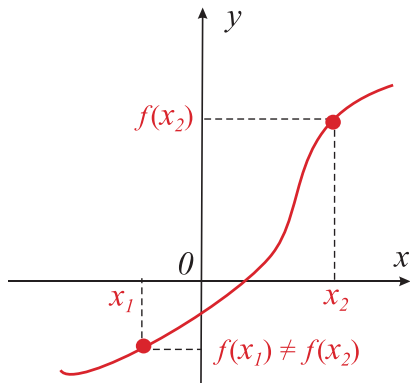
Funkce f se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové reálné číslo $p \neq 0$, že pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je také $x \pm p \in \mathbf{D}(f)$ a platí: $f(x \pm p) = f(x)$.



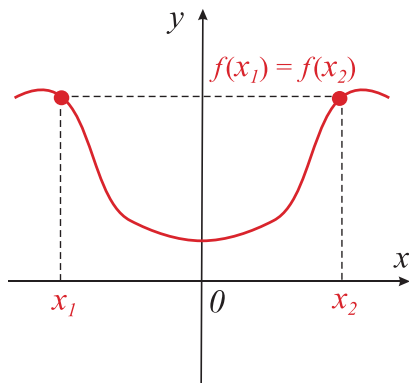
↳ Funkce prosté a funkce k nim inverzní

Protože funkce je speciálním případem zobrazení, použije se pro ni stejná definice jako pro prosté zobrazení a zobrazení k němu inverzní.

Funkce f se nazývá **prostá**, jestliže pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in \mathbf{D}_f$, $x_1 \neq x_2$, je také $f(x_1) \neq f(x_2)$.



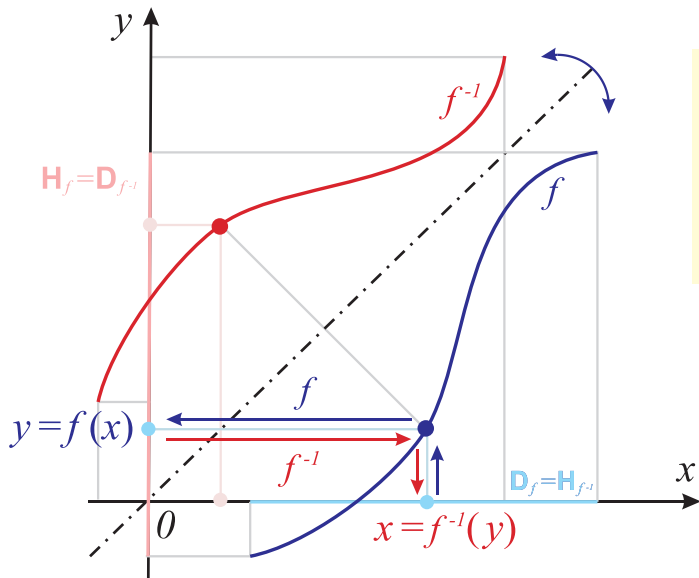
Funkce prostá



Funkce, která není prostá

Je-li funkce f prostá, existuje k ní **funkce inverzní** f^{-1} , která každému prvku $y \in \mathbf{H}_f$ přiřazuje jeho vzor $x \in \mathbf{D}_f$:

$$x = f^{-1}(y) \text{ právě když } y = f(x).$$



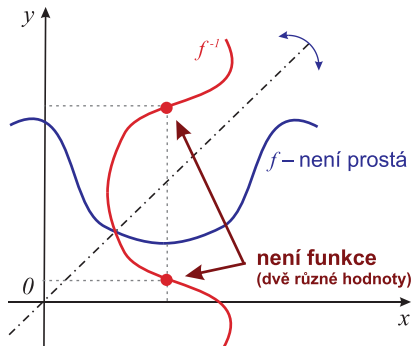
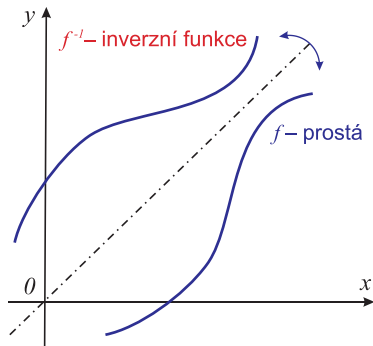
platí:

$$\mathbf{D}_f = \mathbf{H}_{f^{-1}}$$

$$\mathbf{H}_f = \mathbf{D}_{f^{-1}}$$

Při sestrojování grafu inverzní funkce pak vyneseme proměnou jako obvykle na osu x a hodnoty na osu y – oproti grafu původní funkce si tak souřadnicové osy „vymění role“; graf inverzní proto bude symetrický s grafem původní funkce f v osové souměrnosti podle osy prvního a třetího kvadrantu.

Uvědomme, že inverzní funkce existuje jen pro funkci prostou – pro funkci, která není prostá, nebude křivka vzniklá osovou souměrností grafem funkce:

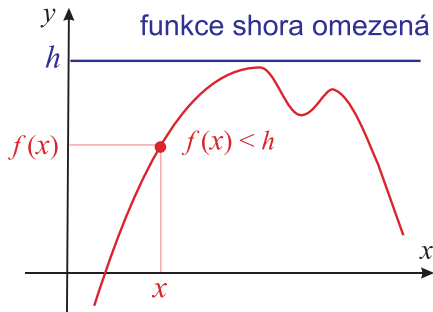
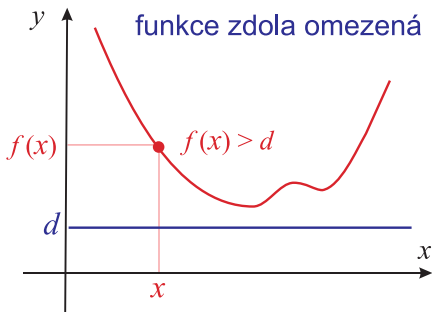


↳ Funkce omezené, zdola omezené, shora omezené

Uvažujme funkci f a podmnožinu \mathbf{M} jejího definičního oboru $\mathbf{D}(f)$.

- ↳ Funkce f se nazývá **zdola omezená na množině \mathbf{M}** , právě když existuje takové $d \in \mathbf{R}$, že pro všechna $x \in \mathbf{M}$ je $f(x) \geq d$.
- ↳ Funkce f se nazývá **shora omezená na množině \mathbf{M}** , právě když existuje takové $h \in \mathbf{R}$, že pro všechna $x \in \mathbf{M}$ je $f(x) \leq h$.
- ↳ Funkce f se nazývá **omezená na množině \mathbf{M}** , právě když je zdola i shora omezená na \mathbf{M} .

Je-li $\mathbf{M} = D_f$, řekneme, že **funkce je omezená (zdola, shora)**.

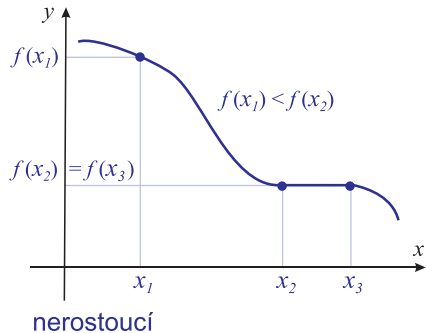
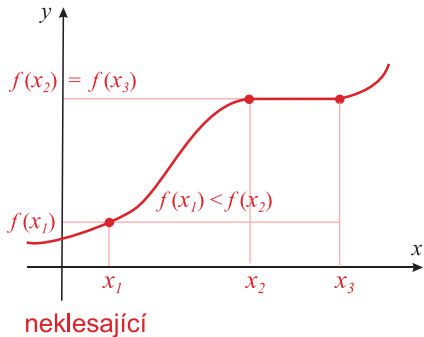
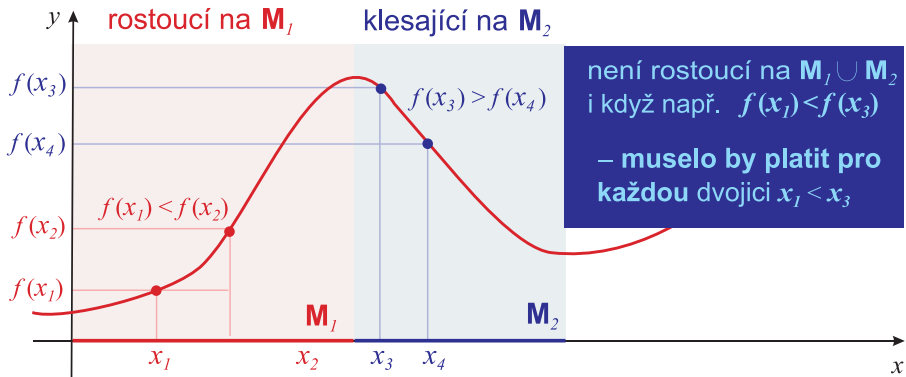


↳ Funkce monotónní

Uvažujme funkci f a podmnožinu $\mathbf{M} \subset \mathbf{D}(f)$.

- ↳ Funkce f se nazývá **rostoucí na množině \mathbf{M}** , právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí:
je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.
- ↳ Funkce f se nazývá **klesající na množině \mathbf{M}** , právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí:
je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.
- ↳ Funkce f se nazývá **neklesající na množině \mathbf{M}** , právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí:
je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- ↳ Funkce f se nazývá **nerostoucí na množině \mathbf{M}** , právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathbf{M}$ platí:
je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Rostoucí a klesající funkce se souhrnně nazývají **ryze monotónní** (na dané množině); neklesající a nerostoucí se souhrnně nazývají **monotónní** (na dané množině).



Řekneme, že funkce f má bodě $x_0 \in \mathbf{D}(f)$

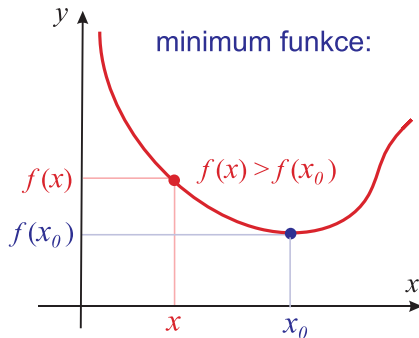
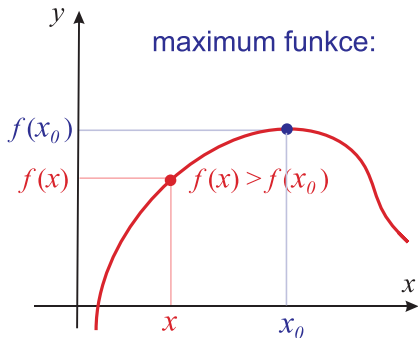
↳ **maximum**, jestliže pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ platí:

$$f(x_0) \geq f(x),$$

↳ **minimum**, jestliže pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ platí:

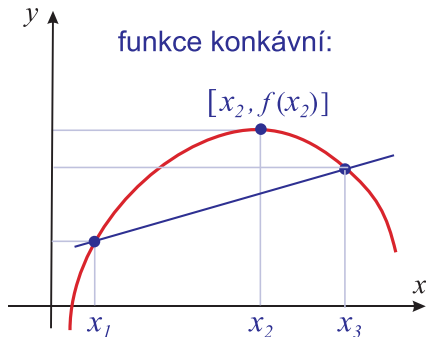
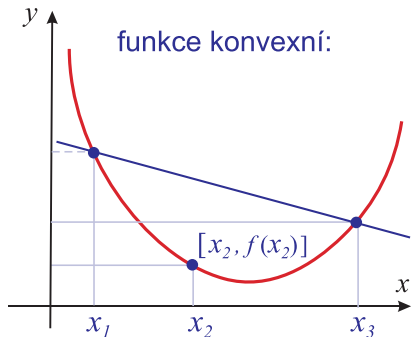
$$f(x_0) \leq f(x).$$

Maxima a minima funkce nazýváme **extrémy (globální)**.



Nechť je $I \subset \mathbb{R}$ interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, kde $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $A = [x_2, y]$ přímky procházející body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_3; f(x_3)]$

- nad bodem grafu funkce $[x_2, f(x)]$, nazývá se funkce f **konvexní na intervalu I** ,
- pod bodem grafu funkce $[x_2, f(x)]$, nazývá se funkce f **konkávní na intervalu I** .

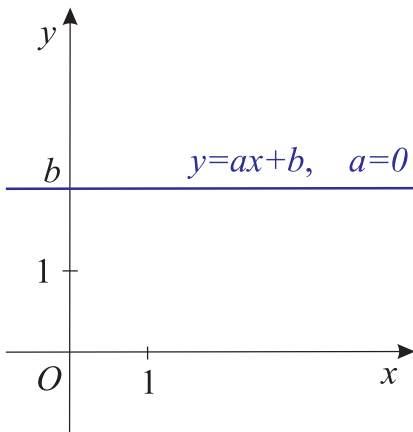


4.2.2 Základní elementární funkce

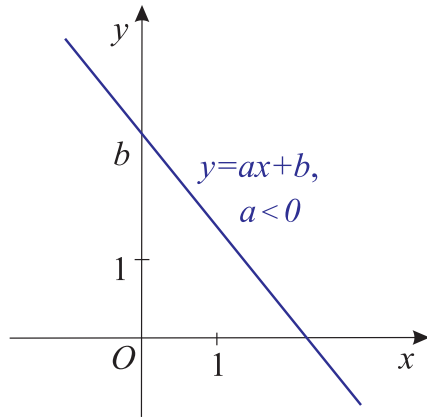
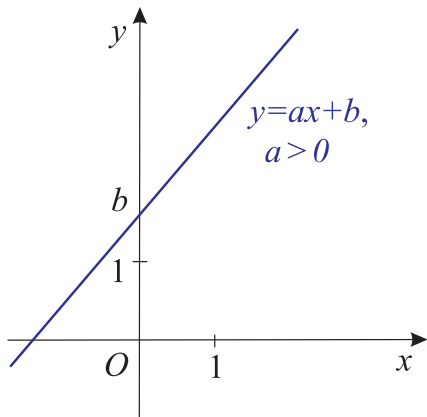
Lineární funkce

Lineární funkcí nazýváme každou funkci

$$f : y = ax + b, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}. \quad (4.1)$$



$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathbf{H}(f) = \{b\}$, nerostoucí a neklesající, není prostá



$$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R}, \mathbf{H}(f) = \mathbb{R}$$

není ani shora, ani zdola omezená

rostoucí

klesající

prostá

prostá

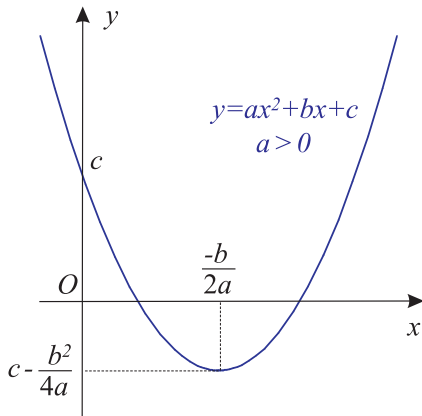
Kvadratická funkce

Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci

$$f : y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}.$$

Grafem každé kvadratické funkce je **parabola**, která je souměrná podle osy o rovnoběžné s osou y .

Průsečíku osy paraboly s parabolou se říká **vrchol paraboly** a přímce kolmé k ose paraboly, procházející jejím vrcholem, se říká **vrcholová tečna paraboly**.

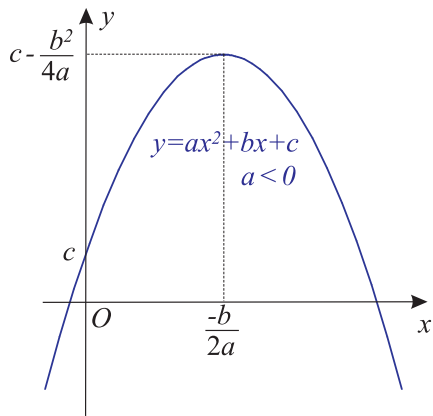


$$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R}, \mathbf{H}(f) = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}, +\infty \right\rangle$$

zdola omezená, není shora omezená

$$\text{klesající v } \left\langle -\infty, -\frac{b}{2a} \right\rangle$$

$$\text{rostoucí v } \left\langle -\frac{b}{2a}, +\infty \right\rangle$$



$$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R}, \mathbf{H}(f) = \left\langle -\infty, c - \frac{b^2}{4a} \right\rangle$$

shora omezená, není zdola omezená

$$\text{rostoucí v } \left\langle -\infty, -\frac{b}{2a} \right\rangle$$

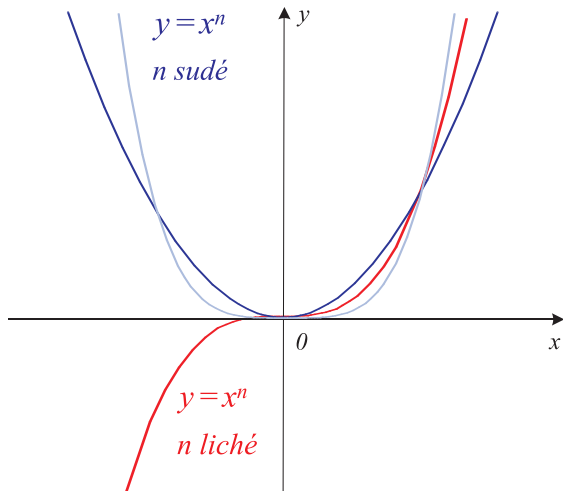
$$\text{klesající v } \left\langle -\frac{b}{2a}, +\infty \right\rangle$$

Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem

Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem je funkce

$$f : y = x^n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}.$$

Je-li speciálně $n = 1$, je f lineární funkce; je-li $n = 2$ je to funkce kvadratická. Pro $n > 1$ je grafem **parabola n -tého stupně**.



Pomocí algebraických operací násobení číslem a sčítání funkcí $f(x) = x^n$ získáme *polynomy*.

Polynomem nazýváme funkci $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Není-li polynom identicky roven nule, existuje největší n takové, že $a_n \neq 0$. Toto n nazýváme **stupeň** polynomu. V dalším budeme předpokládat, že je polynom $P(x)$ nenulový a že má stupeň n .

Nulovým bodem neboli **kořenem** polynomu P se rozumí bod $x_0 \in \mathbb{R}$, pro který

$$P(x_0) = 0.$$

Je-li x_1 nulový bod polynomu $P(x)$ stupně n , ze psát

$$P(x) = (x - x_1)P_1(x),$$

kde $P_1(x)$ je polynom stupně $(n - 1)$. Má-li polynom $P_1(x)$ kořen x_2 , je $P_1(x) = (x - x_2)P_2(x)$, a tedy

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)P_2(x),$$

kde $P_2(x)$ je polynom stupně $(n - 2)$. Jestliže pokračujeme uvedeným postupem dostaneme nulové body x_1, x_2, \dots, x_N , z nichž se některé mohou vyskytovat vícekrát. Polynom $P(x)$ lze pak zapsat ve tvaru

$$P(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r} P_N(x),$$

kde x_1, \dots, x_r jsou navzájem různé kořeny polynomu $P(x)$, přiřazená čísla k_i se nazývají *násobnost kořene* x_i a platí pro ně $N = k_1 + k_2 + \dots + k_r$, a $P_N(x)$ je polynom stupně $(n - N)$, který nemá reálné kořeny.

Obecně lze libovolný polynom stupně n zapsat ve tvaru

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \\ (x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s},$$

kde polynomy $x^2 + p_ix + q_i$ nemají reálný kořen a

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2m_1 + \dots + 2m_s = n.$$

Lineární lomené funkce jsou funkce tvaru

$$f : f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{kde} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Je-li $c = 0$, jedná se o lineární funkci. Proto budeme dále předpokládat, že $c \neq 0$. Protože rovnost $cx + d = 0$ platí pouze pro $x = -\frac{d}{c}$, je definiční obor lineární lomené funkce $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.

Lineární lomenou funkci lze upravit na tvar

$$f(x) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} \frac{1}{x + d/c}.$$

Tedy pro $ad - bc = 0$ je tato funkce rovna konstantní funkci. Proto budeme navíc předpokládat, že $ad - bc \neq 0$. Obecnou lineární lomenou funkci lze získat také složením tří jednodušších funkcí

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1, \quad \text{kde } f_1 \text{ je lineární funkce } f_1(x) = x + \frac{d}{c}, \text{ funkce } f_2 = \frac{1}{x} \text{ a funkce } f_3 \text{ je opět lineární funkce } f_3(x) = -\frac{ad - bc}{c^2} x + \frac{a}{c}.$$

Z těchto funkcí jsme podrobněji nepopsali pouze funkci $f_2(x) = \frac{1}{x}$.

Tato funkce vyjadřuje vztah nepřímé úměry mezi x a y . Je definována na intervalech $(-\infty, 0)$, kde je klesající a na intervalu $(0, +\infty)$ kde je také klesající. Ale je třeba upozornit, že tato funkce není klesající na celém svém definičním oboru. Funkce je lichá a její graf je rovnoosá *hyperbola* se středem v počátku, jejíž asymptoty jsou souřadnicové osy.

Je-li $ad - bc > 0$ je obecná lineární lomená funkce $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ klesající na intervalech $(-\infty, -d/c)$ a $(d/c, +\infty)$. Je-li $ad - bc < 0$ je funkce na těchto intervalech rostoucí. Grafem je hyperbola se středem v bodě $\left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right]$, jejíž asymptoty jsou přímky $x = -\frac{d}{c}$ a $y = \frac{a}{c}$. Graf funkce protíná osu Ox v bodě $x = -\frac{b}{a}$ a osu Oy v bodě $y = \frac{b}{d}$.

Lineární lomená funkce $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ je prostá a její inverzní funkce je opět lineární lomená funkce $y = \frac{dx - b}{-cx + a}$.

Racionální funkce jsou funkce tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy.

Označíme-li X_0 množinu všech reálných nulových bodů polynomu $Q(x)$, je definiční obor $D_f = \mathbb{R} \setminus X_0$.

Je-li stupeň polynomu $P(x)$, n , větší nebo roven stupni m polynomu $Q(x)$, lze dělením zjistit, že tuto funkci je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $P_1(x)$ je polynom stupně $(n - m)$ a stupeň polynomu $Q(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$.

Funkci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde je stupeň polynomu $P(x)$ menší než stupeň polynomu $Q(x)$, lze zapsat jako součet jednodušších ra-

cionálních funkcí. Předpokládejme, že

$$q(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots \\ \dots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s},$$

kde dvojčleny $x^2 + p_ix + q_i$ nemají reálné kořeny, tj. platí $p_i^2 - 4q_i < 0$.

Pak lze racionální funkci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ psát ve tvaru:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \\ + \frac{A_{21}}{x - x_2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \dots + \frac{A_{r1}}{x - x_r} + \dots + \frac{A_{rk_r}}{(x - x_r)^{k_r}} \\ + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1m_1}x + C_{1m_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}} \\ + \dots + \\ + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2 + p_sx + q_s} + \frac{B_{s2}x + C_{s2}}{(x^2 + p_sx + q_s)^2} + \dots + \frac{B_{sm_s}x + C_{sm_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}}$$

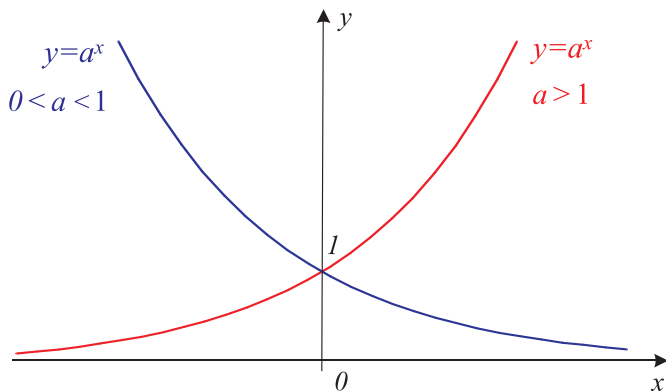
Tomuto zápisu se říká **rozklad na parciální zlomky**.

Exponenciální funkce o základu a

Exponenciální funkce o základu a je funkce

$$f : y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad D(f) = \mathbb{R}.$$

Je-li základ $a > 1$, je funkce a^x rostoucí v \mathbb{R} , je-li $0 < a < 1$, je klesající v \mathbb{R} ; v obou případech je prostá v celém definičním oboru.



Logaritmická funkce o základu a

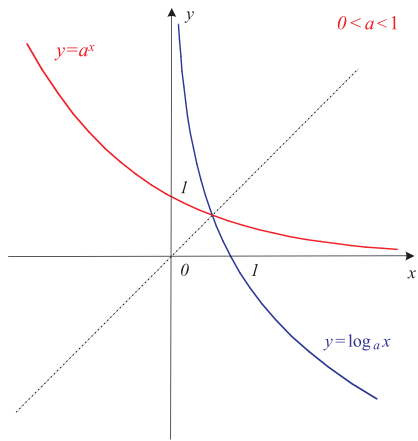
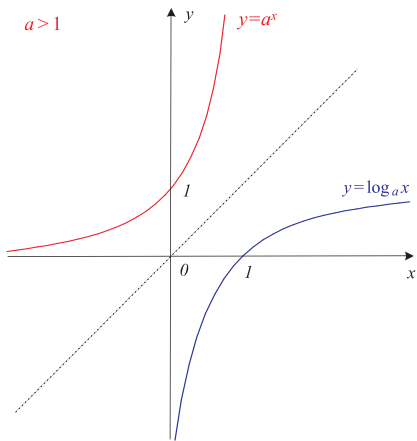
Logaritmická funkce o základu a je zavedena jako funkce **inverzní k exponenciální funkci o téže základu a** . Symbolicky se zapisuje takto:

$$f : y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad D(f) = (0, +\infty),$$

přičemž podle definice pro každé $x \in (0, +\infty)$, $y \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ platí:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Je-li základ $a > 1$, je funkce $\log_a x$ rostoucí v \mathbb{R} , je-li $0 < a < 1$, je klesající v \mathbb{R} ; v obou případech je prostá v celém definičním oboru.

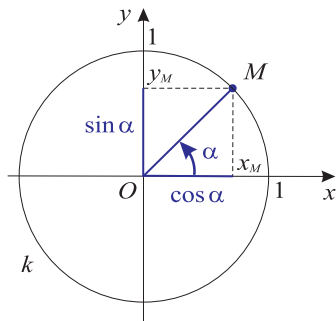
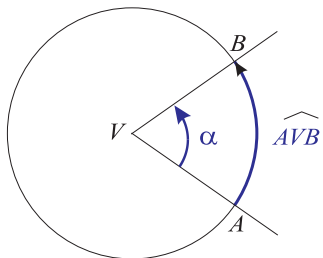


Goniometrické funkce

Připomeňme si nejprve pojem **orientovaného úhlu** a jeho **velikosti**. Orientovaným úhlem se rozumí uspořádaná dvojice polopřímek VA, VB se společným počátkem. První z této dvojice se nazývá **počátečním ramenem orientovaného úhlu**, druhá **koncovým ramenem orientovaného úhlu**; společný počátek obou polopřímek se nazývá **vrchol orientovaného úhlu**. Pro orientovaný úhel se používá označení \widehat{AVB} . **Velikostí orientovaného úhlu** \widehat{AVB} se nazývá každé z reálných čísel $\alpha + 2k\pi$ (v obloukové míře), resp. $\alpha + k \cdot 360^\circ$ (v míře stupňové), kde $k \in \mathbb{Z}$ a α se určí takto:

- Je-li $VA = VB$, je $\alpha = 0$,
- Je-li $VA \neq VB$, je α velikost neorientovaného úhlu, který vznikne otočením počátečního ramene VA do polohy koncového ramene VB v **kladném smyslu**, tj. proti směru hodinových ručiček.

Je tedy $0 \leq \alpha < 2\pi$, resp. $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$; této velikosti se říká **základní velikost orientovaného úhlu**.



Zvolme kartézskou soustavu souřadnic Oxy . Ke každému reálnému číslu α lze přiřadit právě jeden orientovaný úhel velikosti α (v obloukové míře), jehož počáteční rameno je polopřímka OI , kde I je obraz čísla 1 na ose x (místo I budeme v grafu psát přímo číslo 1); říká se mu **orientovaný úhel v základní poloze**. Sestrojíme jednotkovou kružnici k (tj. kružnici o poloměru 1) se středem O , její průsečík s koncovým ramenem orientovaného úhlu α v základní poloze označíme M .

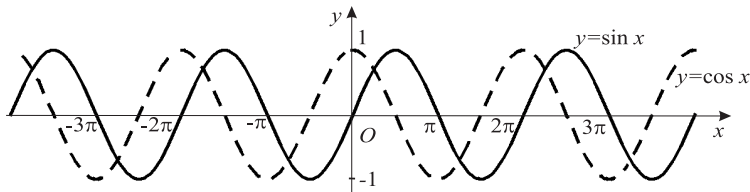
Definujeme

Druhou souřadnici bodu M jednotkové kružnice na koncovém rameni orientovaného úhlu α v základní poloze nazýváme **sinus úhlu** α a jeho první souřadnici nazýváme **kosinus úhlu** α ; značíme je $\sin \alpha$, $\cos \alpha$.

$$\sin \alpha = y_M, \quad \cos \alpha = x_M \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Těmito vztahy je každému reálnému číslu $x \in \mathbf{R}$ přiřazeno právě jedno reálné číslo $\sin x$ a právě jedno reálné číslo $\cos x$, tj. tyto vztahy udávají funkční předpisy **funkce sinus** a **funkce kosinus**:

$$f : y = \sin x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbf{R}, \quad f : y = \cos x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbf{R}.$$



Důležité je zejména to, že funkce sinus je lichá, funkce kosinus sudá a obě funkce jsou **periodické s periodou** 2π . Obě jsou rovněž omezené:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

Ihned z definice také plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\sin x = 0 \quad \text{právě když je} \quad x = k\pi = 2k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \quad \text{právě když je} \quad x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}$$

Pro libovolné reálné číslo x platí:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{4.2}$$

Funkce $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ jsou zavedeny vztahy:

$$f : y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ (2k + 1)\frac{\pi}{2} \right\}$$

$$f : y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}.$$

Nejdůležitější hodnoty goniometrických funkcí můžeme shrnout do tabulky:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.	0
$\operatorname{cotg} \alpha$	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	není def.	0	není def.

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Součtové vzorce

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$$

$$\operatorname{cotg} g(x \pm y) = \frac{\pm \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} x \mp \operatorname{cotg} y}$$

Vztahy pro dvojnásobný úhel

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cdot \cos x & \tan 2x &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

Vztahy pro poloviční úhel

$$\begin{aligned}\sin \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} & \tan \frac{x}{2} &= \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \\ \cos \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}\end{aligned}$$

Znaménko se určí podle kvadrantu.

Součtové věty

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

Převody přes liché násobky

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{tg} \alpha$$

Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou zavedeny jako inverzní funkce k funkcím goniometrickým. Protože funkce inverzní existuje jen pro prostou funkci, je vždy nejprve třeba omezit definiční obor na interval, na němž je daná goniometrická funkce prostá.

Funkce arkussinus,

$$f : y = \arcsin x, \quad \mathbf{D}(f) = \langle -1, 1 \rangle,$$

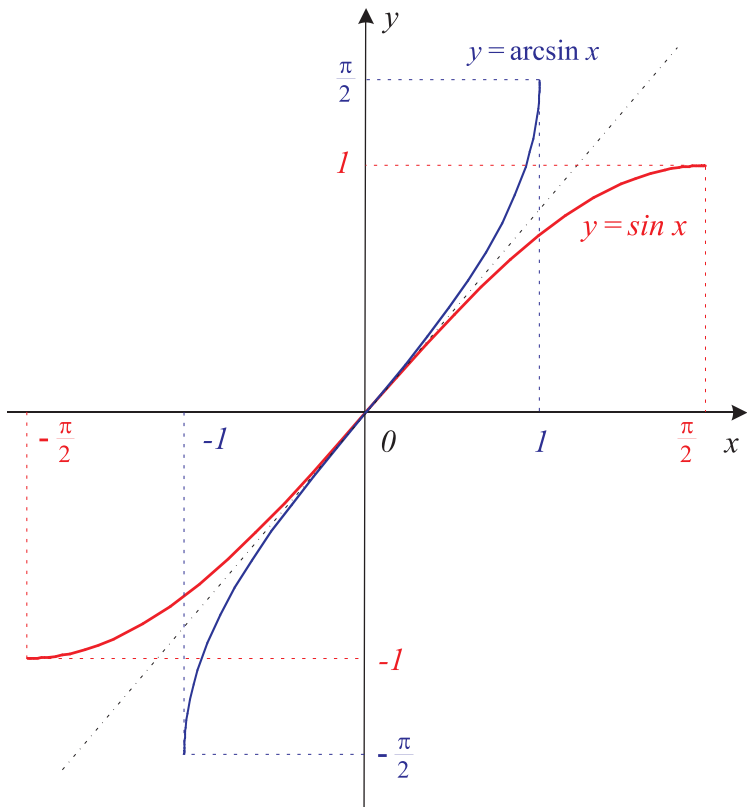
je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\sin x$ na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Je tedy určena vztahem

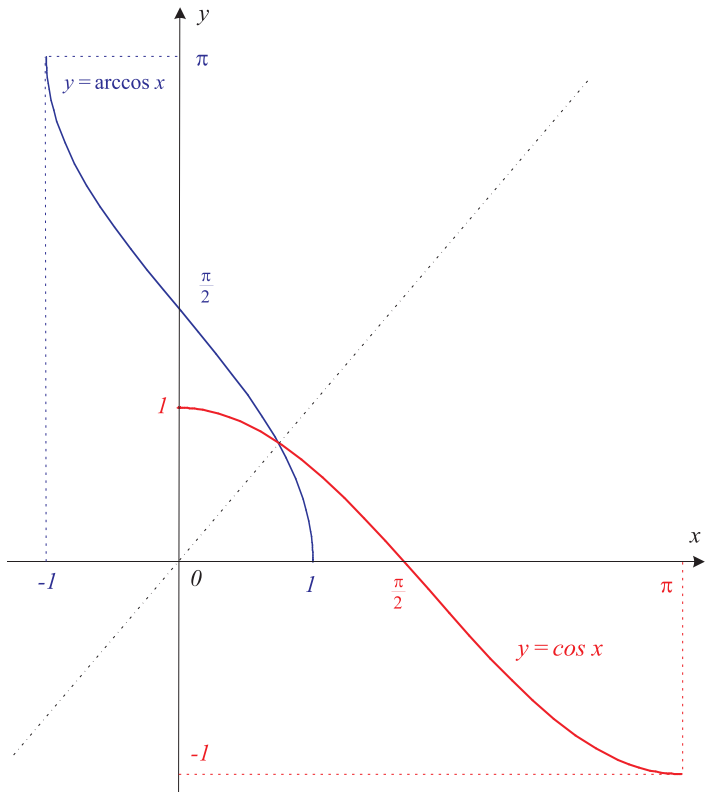
$$y = \arcsin x \iff x = \sin y, \quad y \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle.$$

Funkce arkuscósinus,

$$f : y = \arccos x, \quad \mathbf{D}(f) = \langle -1, 1 \rangle,$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\cos x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Je tedy určena vztahem: $y = \arccos x \iff x = \cos y, \quad y \in \langle 0, \pi \rangle$.





Funkce arkustangens,

$$f : y = \operatorname{arctg} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\operatorname{tg} x$ na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Je tedy určena vztahem

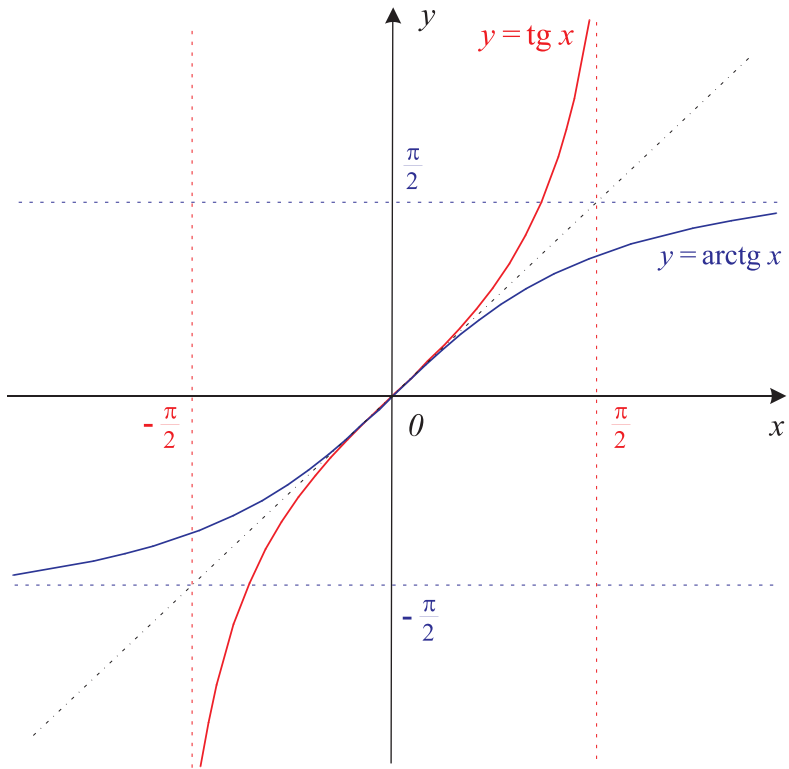
$$y = \operatorname{arctg} x \iff x = \operatorname{tg} y, \quad y \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle.$$

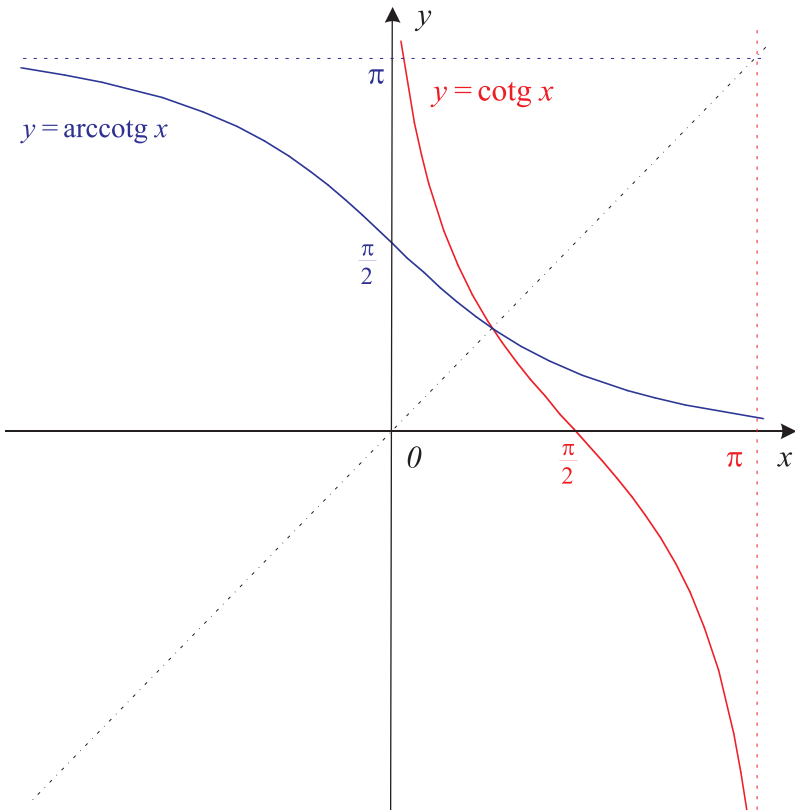
Funkce arkuskotangens,

$$f : y = \operatorname{arccotg} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\operatorname{cotg} x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Je tedy určena vztahem

$$y = \operatorname{arccotg} x \iff x = \operatorname{cotg} y, \quad y \in \langle 0, \pi \rangle.$$





Hyperbolické funkce

Funkce **sinus hyperbolický a kosinus hyperbolický**,

$$f : y = \sinh x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

$$f : y = \cosh x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

jsou definované vztahy

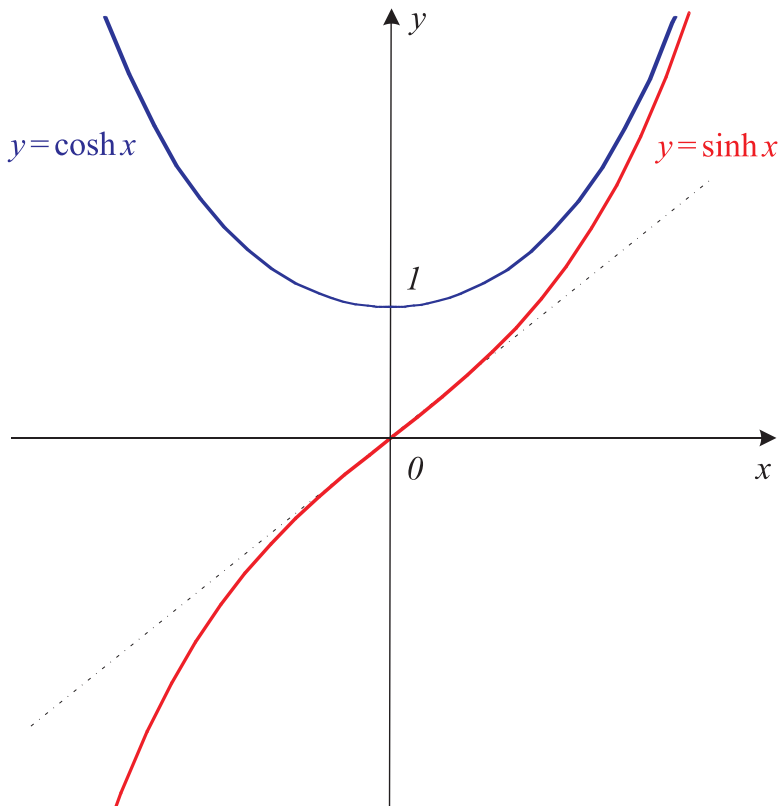
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Z definičních vztahů plyne, že pro $\sinh x$ a $\cosh x$ platí:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$$



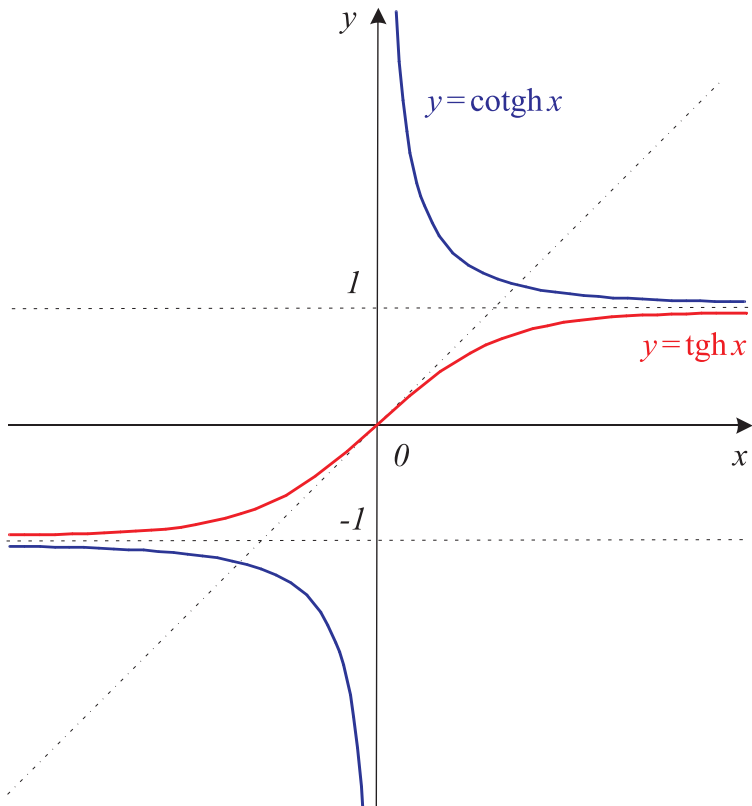
Funkce **tangens hyperbolický** a **kotangens hyperbolický**,

$$f : y = \operatorname{tgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

$$f : y = \operatorname{cotgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

jsou definované vztahy

$$\operatorname{tg} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



Hyperbolometrické funkce

Funkce **argument sinus hyperbolický**,

$$f : y = \operatorname{argsinh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci sinus hyperbolický:

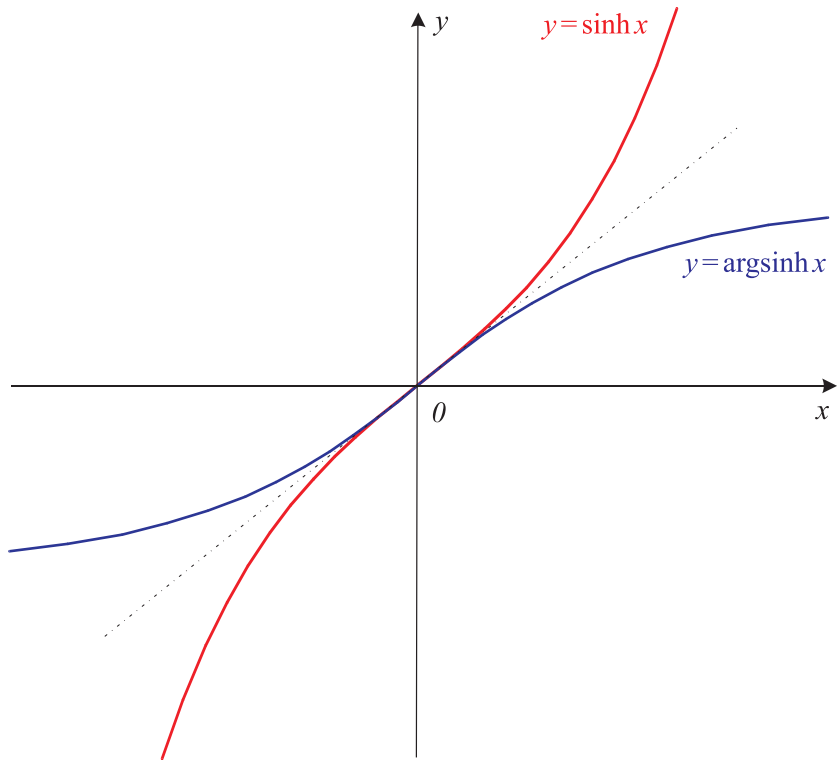
$$y = \operatorname{argsinh} x \iff x = \sinh y, \quad y \in \mathbb{R},$$

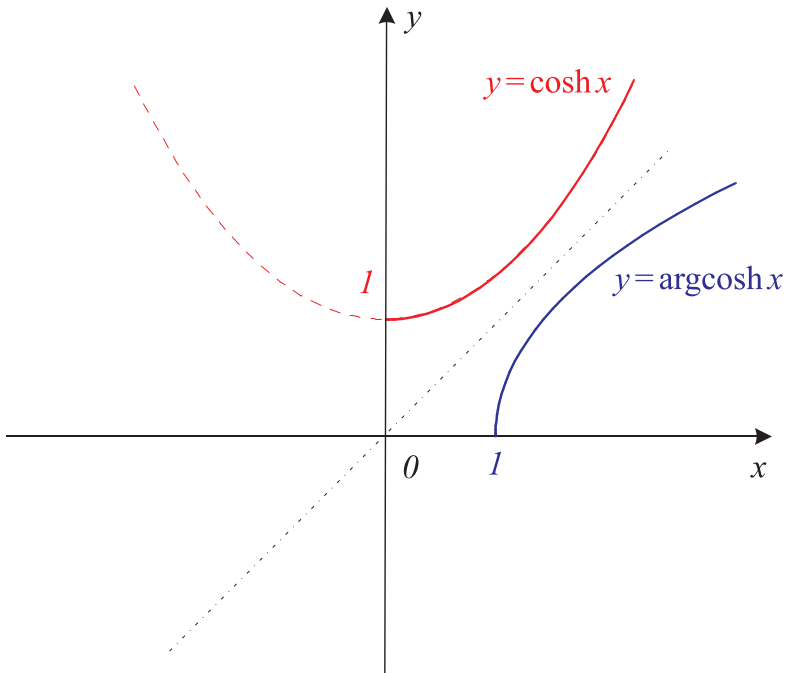
Funkce **argument kosinus hyperbolický**,

$$f : y = \operatorname{argcosh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \langle 1, \infty \rangle,$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci kosinus hyperbolický:

$$y = \operatorname{argcosh} x \iff x = \cosh y, \quad y \in \langle 0, \infty \rangle$$





Funkce **argument tangens hyperbolický**,

$$f : y = \operatorname{tgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = (-1, 1),$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci tangens hyperbolický:

$$y = \operatorname{argtgh} x \iff x = \operatorname{tgh} y, \quad y \in \mathbb{R}$$

Funkce **argument kotangens hyperbolický**,

$$f : y = \operatorname{cotgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$$

je definovaná vztahem

$$y = \operatorname{argcotgh} x \iff x = \operatorname{cotgh} y, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

