

PŘEDNÁŠKA 8

PRŮBĚH

FUNKCE

8.1 Monotonie funkce

Nechť má funkce f derivaci v intervalu $I = (a, b)$.

Věta. *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce f rostoucí v intervalu I .*

Důkaz. Uvažujme $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Máme dokázat, že $f(x_1) < f(x_2)$. Z Lagrangeovy věty plyne existence bodu $\xi \in (x_1, x_2)$, pro který

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1). \quad (8.1)$$

Z předpokladů $x_2 > x_1$ a $f'(\xi) > 0$ plyne, že na pravé straně rovnosti (8.1) je kladné číslo. Platí tedy $f(x_2) > f(x_1)$.

Důsledek. *Je-li funkce f klesající nebo nerostoucí v intervalu I a má tam derivaci, pak $f'(x) \leq 0$.*

Analogicky lze dokázat:

Věta. *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce f neklesající v intervalu I .*

Věta. *Jestliže $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce f klesající v intervalu I .*

Důkaz. Necht' $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Máme dokázat, že pak je $f(x_1) > f(x_2)$. Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi \in (x_1, x_2)$, pro které platí (8.1). Protože $x_2 > x_1$ a $f'(\xi) < 0$, je na pravé straně rovnosti (8.1) záporné číslo, tj. $f(x_2) < f(x_1)$.

Důsledek. *Je-li funkce f rostoucí nebo neklesající v intervalu I a má tam derivaci, pak $f'(x) \geq 0$.*

Věta. *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce f nerostoucí v intervalu I .*

☛ **Příklad 8.1.**

Určete intervaly monotonie funkce

$$f(x) = 12x - 2x^2.$$

Řešení.

$$f'(x) = 12 - 4x = 4(3 - x) = 0 \quad \text{pro } x = 3;$$

$$f(x) > 0 \quad \text{pro } x < 3; \quad f(x) < 0 \quad \text{pro } x > 3.$$

Funkce je rostoucí v intervalu $(-\infty, 3)$, klesající v $(3, \infty)$.

8.2 Lokální extrémy funkce

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D_f$ **lokální maximum**, resp. **lokální minimum**, právě tehdy, když existuje prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$, resp. $f(x) \geq f(x_0)$.

Nahradíme-li neostré nerovnosti nerovnostmi ostrými, mluvíme o **ostrém lokálním maximu**, resp. **ostrém lokálním minimu**.

Lokální maxima a minima nazýváme **lokální extrémy**, ostrá maxima a minima **ostré lokálními extrémy** funkce f .

Věta. Necht' $x_0 \in D_f$ není hraničním bodem definičního oboru D_f funkce f . Je-li $f'(a) \neq 0$, nemá funkce f v bodě x_0 lokální extrém.

Důkaz. Necht' $f'(x_0) = A \neq 0$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ je

$$A - \varepsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < A + \varepsilon.$$

Předpokládejme například, že $A > 0$ a zvolme $\varepsilon = \frac{A}{2}$. Pak pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ platí:

$$0 < \frac{A}{2} < \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pro $x > a$ je $f(x) > f(a)$ a pro $x < a$ je $f(x) < f(a)$, funkce f tedy nemá v bodě x_0 lokální extrém.

Případ $A < 0$ vyřešíme obdobně. \square

Poznámka. Z toho, že $f'(x_0) > 0$ nebo $f'(x_0) < 0$, neplyne, že existuje okolí bodu x_0 takové, že je na něm funkce $f(x)$ rostoucí, resp. klesající.

☛ **Příklad 8.2.**

Uvažujme funkci $f(x) = x + \pi x^2 \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$; $f(0) = 0$.

Platí $f'(0) = 1$, ale funkce není na žádném okolí bodu $x = 0$ rostoucí, protože pro dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$ je

$$f\left(\frac{1}{(2n+1/2)\pi}\right) > f\left(\frac{1}{(2n-1/2)\pi}\right).$$

Věta. *Nechť f je diferencovatelná funkce, nechť $f'(x_0) = 0$.*

Existuje-li prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$, $x < x_0$, je $f'(x) > 0$ a pro $x > x_0$ je $f'(x) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Existuje-li prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$, $x < x_0$, je $f'(x) < 0$ a pro $x > x_0$ je $f'(x) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Existuje-li prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ je $f'(x) < 0$ nebo $f'(x) > 0$, nemá funkce f v bodě x_0 lokální extrém.

Důkaz. Je-li $f'(x) > 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, je funkce f na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ rostoucí, a tedy $f(x) < f(x_0)$, a na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ klesající, tedy $f(x) < f(x_0)$. To znamená, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 ostré lokální maximum. Případ, kdy $f'(x) < 0$ pro $x < x_0$ a $f'(x_0) > 0$ pro $x > x_0$, se dokáže podobně.

Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in P_\delta(x_0)$, je funkce f rostoucí v $P_\delta(x_0)$ a nemá v bodě x_0 lokální extrém. Podobně v případě, že $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$. \square

☛ **Příklad 8.3.**

Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x) = 12x - 2x^2 .$$

Řešení.

$$f'(x) = 12 - 4x = 4(3 - x) = 0 \quad \text{pro } x = 3 ;$$

$$f(x) > 0 \quad \text{pro } x < 3; \quad f(x) < 0 \quad \text{pro } x > 3.$$

Funkce je rostoucí v intervalu $(-\infty, 3)$, klesající v $(3, \infty)$, v bodě 3 proto má ostré lokální maximum, a to 18 .

8.3 Globální extrémy

Někdy je třeba nalézt **globální extrémy na kompaktní, tj. omezené a uzavřené množině** M . Jak již víme, je-li funkce $f(x)$ spojitá, existují v množině M body, ve kterých nabývá funkce $f(x)$ své největší a nejmenší hodnoty. Je zřejmé, že pokud není bod x hraničním bodem množiny M a existuje v tomto bodě nenulová derivace, nemá funkce $f(x)$ v tomto bodě globální extrém. Zbývá nám tedy vyšetřit ostatní body množiny M :

- hraniční body množiny M
- body, v nichž je derivace rovna nule
- body, ve kterých derivace neexistuje

Je-li těchto bodů pouze konečný počet, stačí pro nalezení extrémů vybrat body, ve kterých je největší a nejmenší hodnota funkce $f(x)$.

⇐ **Příklad 8.4.**

Nalezněte globální extrémy funkce

$$f(x) = |x^3 - 3x|, x \in \langle -2\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle.$$

Řešení. Funkce f je spojitá na kompaktním intervalu $\langle -2\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$, má proto na tomto intervalu globální maximum i minimum.

Podezřelé body:

- Krajní body intervalu, tj. $-2\sqrt{3}$ a $\sqrt{3}$
- $f'(x)$ neexistuje pro $-\sqrt{3}$, 0 a $\sqrt{3}$
- $f'(x) = 0$ pro -1 , 1

Nyní stačí nalézt funkční hodnoty v podezřelých bodech:

$$f(-2\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}, \quad f(\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}) = f(0) = 0,$$

$$f(-1) = f(1) = 2.$$

Funkce f nabývá globálního maxima $18\sqrt{3}$ v bodě $-2\sqrt{3}$ a globálního minima 0 v bodech $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ a 0 .

8.4 Konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body

Nechť funkce f má derivaci v bodě x_0 . Říkáme, že f je **konvexní**, resp. **konkávní v bodě** x_0 právě tehdy, když existuje takové okolí $U(x_0; \delta)$ bodu x_0 , že graf funkce f pro $x \in U(x_0; \delta)$ leží nad, resp. pod tečnou grafu v bodě x_0 .

Říkáme, že funkce f je **konvexní**, resp. **konkávní v intervalu** (a, b) právě tehdy, když je konvexní, resp. konkávní v každém bodě intervalu (a, b) .

Říkáme, že bod $x_0 \in D_f$ je **inflexním bodem** funkce f právě tehdy, když v bodě $(x_0, f(x_0))$ existuje tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ a funkce se v tomto bodě mění z konvexní na konkávní nebo obráceně.

Věta. Podmínky pro konvexnost a konkávnost funkce.

Nechť funkce $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ má derivaci v intervalu (a, b) . Pak platí:

- (i) Je-li f' rostoucí v intervalu (a, b) , je funkce f konvexní v intervalu (a, b) .*
- (ii) Je-li f' klesající v intervalu (a, b) , je funkce f konkávní v intervalu (a, b) .*
- (iii) Má-li funkce f' v bodě $x_0 \in (a, b)$ lokální extrém, je x_0 inflexním bodem funkce f .*

Odtud pak plyne:

Věta. *Nechť funkce $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ má druhou derivaci v intervalu (a, b) . Pak platí:*

- (i) Je-li $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, je funkce f konvexní v intervalu (a, b) .*
- (ii) Je-li $f''(x) < 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, je funkce f konkávní v intervalu (a, b) .*
- (iii) Je-li $f''(x_0) = 0$ a derivace f'' mění v bodě $x_0 \in (a, b)$ znaménko, má funkce f v bodě x_0 inflexní bod.*

↩ **Příklad 8.5.**

Nalezněte inflexní body funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

a určete intervaly konvexnosti a konkávnosti.

Řešení. $f''(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 1$.
Dále platí, že $f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ a $f''(x) < 0$ pro $x \in (-1, 1)$:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	\cup	inf. bod	\cap	inf. bod	\cup

Daná funkce je tedy konvexní v intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, konkávní v intervalu $(-1, 1)$. Druhá derivace mění znaménko v bodech $x = -1$ a $x = 1$, takže funkce má dva inflexní body, a to $x = -1$ a $x = 1$.

8.5 Asymptoty grafu funkce

Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **svislou (vertikální) asymptotu** $x = x_0$ právě tehdy, když alespoň jedna jednostranná limita je v tomto bodě nevlastní.

Říkáme, že funkce f má v bodě ∞ , resp. $-\infty$ **vodorovnou (horizontální) asymptotu** $y = b$ právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

Říkáme, že funkce f má v bodě ∞ , resp. $-\infty$ **šikmou asymptotu** $y = kx + q$, $k, q \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx - q) = 0, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - q) = 0.$$

Věta. Má-li funkce f v bodě ∞ šikmou asymptotu $y = kx + q$, pak platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = q.$$

Důkaz. Rovnost pro výpočet k plyne ze vztahu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = 0.$$

Rovnost pro výpočet q plyne přímo z definice šikmé asymptoty.

↩ **Příklad 8.6.**

Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Funkce f není definovaná v okolí bodu $x = 0$; Protože

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + x + 1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + x + 1}{x} = \infty,$$

je přímka $x = 0$ svislou asymptotou grafu funkce f .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^2} = 2 = k$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^2 + x + 1}{x} - 2x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 1 - 2x^2}{x} = 1 = q. \end{aligned}$$

Jelikož obě limity jsou vlastní, má graf dané funkce v bodě ∞ šikmou asymptotu $y = 2x + 1$. Stejná přímka je šikmou asymptotou grafu funkce f také v bodě $-\infty$.

⇐ **Příklad 8.7.**

Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty).$$

Řešení. Nejdříve vyšetříme chování funkce v okolí bodů $x = -1$ a $x = 1$, v nichž funkce není definovaná:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty.$$

Přímky o rovnicích $x = -1$ a $x = 1$ jsou tedy svislými asymptotami grafu dané funkce.

Dále je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0,$$

takže funkce f má v bodech $\pm\infty$ vodorovnou asymptotu

$$y = 0.$$

☛ **Příklad 8.8.**

Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce

$$f(x) = \ln x - 5x, \quad x \in (0, \infty).$$

Řešení. Nejdříve vyšetříme chování funkce v pravém okolí bodů $x = 0$, který leží na hranici definičního oboru. Platí $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, takže přímka o rovnici $x = 0$ je svislou asymptotou grafu dané funkce. Dále je $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, takže by funkce mohla mít v bodě ∞ šikmou asymptotu. Budeme tedy hledat limity:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x - 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} - 5 = -5.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - 5x + 5x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty.$$

Druhá limita je nevlastní, funkce proto šikmou asymptotu nemá.

8.6 Vyšetřování průběhu funkce

Při vyšetřování průběhu funkce postupně hledáme:

- Definiční obor funkce, body nespojitosti, nulové body funkce, intervaly, kde je funkce kladná a kde je záporná
- Zvláštní vlastnosti funkce, např. sudost, lichost, periodičnost, prostota, omezenost.
- Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti funkce a v krajních bodech definičního oboru.
- Intervaly monotonie
- Stacionární body, lokální extrémů funkce.
- Intervaly konvexnosti a konkávnosti, inflexní body.
- Asymptoty grafu funkce.
- Graf funkce sestrojujeme na základě takto získaných informací a pomocí dalších údajů jako jsou např.
 - hodnoty funkce v některých význačných bodech (nulové body první a druhé derivace dané funkce);
 - průsečíky grafu funkce s osami souřadnic;
 - tečny v inflexních bodech funkce.

☛ **Příklad 8.9.**

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

Řešení.

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Funkce není ani sudá, ani lichá, neboť neplatí žádná z rovností $f(-x) = f(x)$ nebo $f(-x) = -f(x)$ pro všechna $x \in D_f$. Dále pro žádné $c \neq 0$ neplatí rovnost $f(x+c) = f(x)$ pro všechna $x \in D_f$, funkce proto není ani periodická. Žádnou z takových speciálních vlastností tedy nebudeme moci při konstrukci grafu využít.

Bod $x = -1$ je bodem nespojitosti a pro jednostranné limity funkce v tomto bodě platí

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty.$$

Pro limity ve zbývajících dvou bodech hranice definičního oboru platí:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$ je funkce spojitá. Pro x záporná nabývá záporné hodnoty, pro x kladná kladné hodnoty. Graf protíná obě souřadnicové osy v počátku.

Derivace

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$

má dva nulové body $x = -3$ a $x = 0$, takže funkce má dva stacionární body $x = -3$ a $x = 0$. Je $f(0) = 0$ a $f(-3) = -27/8$. Derivace $f'(x)$ je kladná pro $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$ a záporná pro $x \in (-3, -1)$, takže funkce je v intervalech $(-\infty, -3)$ a $(-1, \infty)$ rostoucí, v intervalu $(-3, -1)$ klesající. Tedy v bodě $x = -3$ je lokální maximum $f(-3) = -27/8$.

Druhá derivace

$$f''(x) = \frac{3x}{(x+1)^4}$$

má jeden nulový bod $x = 0$. Pro x záporná nabývá záporné hodnoty, pro x kladná kladné hodnoty. Funkce f je tedy v intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$ konkávní a v intervalu $(0, \infty)$ konvexní. Bod $x = 0$ je inflexním bodem.

Z hodnot limit v bodě -1 plyne, že přímka $x = -1$ je svislou asymptotou grafu funkce f . Jelikož funkce má v nevlastních bodech limity $\pm\infty$, má smysl pokoušet se najít rovnici šikmé asymptoty. Vypočteme nejdříve limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2} = k$$

a limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x(x+1)^2}{2(x+1)^2} \right] = -1 = q.$$

Jelikož obě limity jsou vlastní, má graf dané funkce v bodě ∞ šikmou asymptotu o rovnici $y = x/2 - 1$. Stejná přímka je šikmou asymptotou grafu funkce f také v bodě $-\infty$.

Údaje o funkci, získané během výpočtu, můžeme zanást do tabulky, která může mít např. takovýto tvar:

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f(x)$	$-\infty \leftarrow$	$-\frac{27}{8}$	$\rightarrow -\infty$	N	$-\infty \leftarrow$	0	$\rightarrow \infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	lok. max	\searrow		\nearrow		\nearrow
$f''(x)$	$-$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	\frown		\frown		\frown	inf. bod	\smile
asym.	$y = \frac{x}{2} - 1$			$x = -1$			$y = \frac{x}{2} - 1$

