

PŘEDNÁŠKA 9

PRIMITIVNÍ

FUNKCE

9.1 Primitivní funkce – základní pojmy

Definice 1. Nechť je dána funkce f definovaná v otevřeném (omezeném nebo neomezeném) intervalu (a, b) . Každou funkci F , pro kterou platí:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro každé } x \in (a, b),$$

nazveme **primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b)** .

☛ **Příklad 9.1.**

- (a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = x^3$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$.
- (b) $F(x) = -x^{-1}$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = x^{-2}$ v intervalu $(-\infty, 0)$ a v intervalu $(0, +\infty)$, nikoli však např. v intervalu $(-1, 5)$, kde leží bod $0 \notin D_f$.

Poznámka. Je-li F primitivní funkce k funkci f v intervalu (a, b) , pak zřejmě i každá funkce tvaru $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je primitivní funkcí k funkci f v (a, b) . Následující věta říká, že tímto jsou již všechny primitivní funkce vyčerpány:

Věta. Jsou-li F, G dvě primitivní funkce k funkci f v intervalu (a, b) , pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$, že pro všechna $x \in (a, b)$ platí:

$$G(x) = F(x) + c .$$

Definice 2. Má-li funkce f nějakou primitivní funkci na intervalu (a, b) , pak množinu všech jejích primitivních funkcí v (a, b) nazýváme **neurčitým integrálem funkce f v intervalu (a, b)** . Pro neurčitý integrál funkce f používáme symbol $\int f$ nebo $\int f(x) dx$. Symbol \int se nazývá **integrační znak**, funkce f se nazývá **integrand**. Proměnná x se nazývá **integrační proměnná** (nezáleží na tom, jaký symbol použijeme k označení integrační proměnné).

Poznámka. Je-li funkce F primitivní k funkci f v intervalu (a, b) , pak píšeme

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Konstanta c se nazývá **integrační konstanta**. Chceme-li z integrálu získat jednu primitivní funkci, musíme pevně zvolit hodnotu integrační konstanty.

Věta (Aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru).

1. Má-li funkce f integrál v intervalu (a, b) a je-li I otevřený podinterval intervalu (a, b) , pak funkce f má integrál také v intervalu I .
2. Má-li funkce f integrál v intervalech I_1, I_2, \dots, I_m a je-li jejich sjednocení $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m$ interval, pak má funkce f integrál také v intervalu I .

Poznámka. Tvrzení 2 se používá i v případech, kdy sjednocení I integračních oborů I_n není interval. Tuto skutečnost ilustruje následující příklad.

☛ Příklad 9.2.

$$x \in (0, \infty) : (\ln x)' = 1/x;$$

$$x \in (-\infty, 0) : (\ln(-x))' = 1/x.$$

Je tedy

$$\int 1/x \, dx = \ln x + c \quad \text{v intervalu } (0, \infty);$$

$$\int 1/x \, dx = \ln(-x) + c \quad \text{v intervalu } (-\infty, 0).$$

Funkce $\ln|x|$ je tedy primitivní funkcí k funkci $1/x$ jak v intervalu $(-\infty, 0)$, tak i v intervalu $(0, \infty)$. Proto obvykle píšeme:

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c \quad \text{v } M = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Je třeba si uvědomit, že tento zápis není zcela korektní: množina M je sjednocením dvou disjunktních intervalů, integrační konstantu c proto může být zvolena libovolně na každém z obou intervalů.

Věta (Linearita integrálu).

1. *Nechť funkce F , resp. G je primitivní funkce k funkci f , resp. g v intervalu (a, b) a necht' r je číslo. Pak funkce $F + G$ je primitivní funkce k funkci $f + g$ a funkce rF je primitivní funkce k funkci rf v intervalu (a, b) .*
2. *Nechť funkce f, g mají neurčité integrály v intervalu (a, b) a necht' r je číslo. Pak také funkce $f + g$ a funkce rf má neurčitý integrál v intervalu (a, b) a platí:*

$$\begin{aligned}\int (f(x) + g(x)) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx, \\ \int r f(x) dx &= r \int f(x) dx.\end{aligned}$$

3. *Nechť funkce f_1, f_2, \dots, f_m mají neurčité integrály v (a, b) a necht' r_1, r_2, \dots, r_m jsou konstanty. Pak také funkce $r_1 f_1 + r_2 f_2 + \dots + r_m f_m$ má integrál v intervalu (a, b) a platí:*

$$\begin{aligned}\int (r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x) + \dots + r_n f_n(x)) dx &= \\ &= r_1 \int f_1(x) dx + r_2 \int f_2(x) dx + \dots + r_n \int f_n(x) dx.\end{aligned}$$

9.2 Základní integrační vzorce

Známé vzorce z diferenciálního počtu nám dávají následující výsledky (c je integrační konstanta):

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \text{ pro } n \in \mathbb{Z}, n > 0; \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ pro } n \in \mathbb{Z}, n < -1, \\ x > 0 \text{ pro } n \in \mathbb{R}, n \notin \mathbb{Z}. \end{array}$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$3) \int e^x dx = e^x + c; \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1.$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$7) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c, \\ x \in ((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}.$$

$$8) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c, \\ x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$9) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + c, \\ -\arccos x + c, \end{cases} \quad x \in (-1, 1).$$

$$10) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c, \\ -\operatorname{arccotg} x + c, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$11) \int \cosh x dx = \sinh x + c; \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$12) \int \sinh x dx = \cosh x + c; \quad x \in \mathbb{R}.$$

➡ **Příklad 9.3.**

Vypočítejte následující integrály:

$$(a) \quad I = \int (5x^4 - 2x^3 - 3x + 7) dx$$

Řešení. Podle věty o linearitě integrálu lze psát:

$$\begin{aligned} I &= \int (5x^4 - 2x^3 - 3x + 7) dx = \\ &= 5 \int x^4 dx - 2 \int x^3 dx - 3 \int x dx + 7 \int 1 dx = \\ &= 5 \left(\frac{x^5}{5} + c_1 \right) - 2 \left(\frac{x^4}{4} + c_2 \right) - 3 \left(\frac{x^2}{2} + c_4 \right) + 7(x + c_5) = \\ &= x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7x + c, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$(b) \quad I = \int \frac{2x^3 - 3\sqrt{x} + 5}{x} dx$$

Řešení. Po vydělení čitatele integrandu jmenovatelem stačí opět využít základní vzorce:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x^3 - 3\sqrt{x} + 5}{x} dx = \int (2x^2 - 3x^{-\frac{1}{2}} + 5x^{-1}) dx = \\ &= 2 \int x^2 dx - 3 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + 5 \int x^{-1} dx = \\ &= 2 \left(\frac{x^3}{3} + c_1 \right) - 3 \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c_2 \right) + 5 (\ln |x| + c_3) = \\ &= \frac{2}{3}x^3 - 6\sqrt{x} + \ln |x| + c, \quad x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

(c) $I = \int e^{4x} dx$

Řešení. Uvědomme si, že $(e^{4x})' = 4e^{4x}$, proto abychom při zpětné derivaci primitivní funkce získali funkci zadanou, musí být:

$$I = \int e^{4x} dx = \frac{e^{4x}}{4} + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(d) $I = \int \cos(3x - 2) dx$

Řešení. Protože $(\cos(3x - 2))' = -3 \sin(3x - 2)$, bude:

$$I = \int \cos(3x - 2) dx = \frac{\sin(3x - 2)}{3} + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

9.3 Metoda integrace per partes

Věta (Integrace per partes). *Nechť funkce u, v jsou spojitě diferencovatelné v intervalu (a, b) . Pak platí:*

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx. \quad (9.1)$$

Důkaz. Z věty o derivování součinu plyne:

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{v intervalu } (a, b),$$

proto v intervalu (a, b) platí:

$$\begin{aligned} \int (uv)' &= \int (u'v + uv') \\ uv + c &= \int u'v + \int uv' \\ \int u'v &= uv - \int uv' + c \end{aligned}$$

Poslední rovnost je ekvivalentní s dokazovaným vztahem.

Využití metody per partes ke zjednodušení integrované funkce

⇐ **Příklad 9.4.**

Vypočítejte integrál $\int x \cos x \, dx$.

Řešení. Abychom integrovanou funkci skutečně zjednodušili, je dobré zvolit pro derivování funkci x (v opačném případě by v se integrandu objevilo x^2 , což by bylo ještě komplikovanější):

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u' = \cos x, \quad u = \sin x \\ v = x, \quad v' = 1 \end{array} \right| = \\ &= x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

☛ **Příklad 9.5.**

Vypočítejte integrál $\int x^2 \sin x \, dx$.

Řešení. Postupným derivováním funkce x^2 zjednodušíme integrand na jedinou goniometrickou funkci:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u' = \sin x, \quad u = -\cos x \\ v = x^2, \quad v' = 2x \end{array} \right| = \\ &= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u' = \cos x, \quad u = \sin x \\ v = x, \quad v' = 1 \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x \, dx) = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

↩ **Příklad 9.6.**

Vypočítejte integrál $\int x^3 e^{5x} dx$.

Řešení. Integrand postupně zjednodušíme:

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{5x} dx &= \left| \begin{array}{l} u' = e^{5x}, \quad u = \frac{1}{5} e^{5x} \\ v = x^3, \quad v' = 3x^2 \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{5} x^3 e^{5x} - \frac{3}{5} \int x^2 e^{5x} dx = \left| \begin{array}{l} u' = e^{5x}, \quad u = \frac{1}{5} e^{5x} \\ v = x^2, \quad v' = 2x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{5} x^3 e^{5x} - \frac{3}{5} \left(\frac{1}{5} x^2 e^{5x} - \frac{2}{5} \int x e^{5x} dx \right) = \left| \begin{array}{l} u' = e^{5x}, \quad u = \frac{1}{5} e^{5x} \\ v = x, \quad v' = 1 \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{5} x^3 e^{5x} - \frac{3}{25} x^2 e^{5x} + \frac{6}{25} \left(\frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{5} \int e^{5x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{5} x^3 e^{5x} - \frac{3}{25} x^2 e^{5x} + \frac{6}{125} x e^{5x} - \frac{6}{125} e^{5x} + c, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

☛ **Příklad 9.7.**

Vypočítejte integrál $\int x^5 \ln x \, dx$.

Řešení. Tentokrát si uvědomíme, že ke zjednodušení dojde, budeme-li derivovat funkci $\ln x$:

$$\int x^5 \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} u' = x^5, \quad u = \frac{x^6}{6} \\ v = \ln x, \quad v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{6} \int \frac{x^6}{x} \, dx =$$

$$= \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{6} \int x^5 \, dx = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{36}x^6 + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

⇐ **Příklad 9.8.**

Vypočítejte integrál $\int \ln x \, dx$.

Řešení. Na první pohled integrand není součinem dvou funkcí, přesto lze metodu per partes s úspěchem použít. Při integraci by nám velmi pomohlo, kdybychom mohli funkci $\ln x$ nahradit její derivací $1/x$. K tomu si stačí zadaný integrand představit jako součin $1 \ln x$:

$$\int 1 \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1, & u = x \\ v = \ln x, & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= x \ln x - \int \frac{x}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nepřímé nalezení neurčitého integrálu: per partes vedoucí na řešení rovnice

V některých situacích se přímé integraci vyhneme tím, že opakováním metody per partes dospějeme k rovnici obsahující na obou stranách hledaný neurčitý integrál. Rovnici pak stačí vyřešit, aniž bychom prováděli integraci celého integrandu (typickým příkladem je součin funkcí e^x , $\sin x$, $\cos x$, které se při derivování či integrování buď nemění, nebo se po určité době opakují):

$$I = h(x) + kI.$$

V následujícím příkladu aplikujeme metodu per partes dvakrát, čímž obdržíme na pravé straně opět původní integrál.

☛ Příklad 9.9.

Vypočítejte integrál $\int e^x \cos x \, dx$.

Řešení.

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u' = e^x, & u = e^x \\ v = \cos x, & v' = -\sin x \end{array} \right| = \\ &= e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = e^x, & u = e^x \\ v = \sin x, & v' = \cos x \end{array} \right| = \\ &= e^x \cos x + (e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx)\end{aligned}$$

Tím jsme získali rovnici, kterou snadno vyřešíme:

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\ 2 \int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x + e^x \sin x \\ \int e^x \cos x \, dx &= \frac{1}{2} (e^x \cos x + e^x \sin x)\end{aligned}$$

9.4 Substituční metoda integrování

Věta (První věta o substituci v neurčitém integrálu) *Nechť v intervalu J existuje integrál na levé straně rovnosti*

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \quad (9.2)$$

a rovná se $F(x)$. Nechť funkce $x = \varphi(t)$ je diferencovatelná v intervalu I takovém, že $\varphi(I) \subset J$. Pak v intervalu I existuje integrál na pravé straně rovnosti (9.2) a rovná se $F(\varphi(t))$.

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k funkci f v intervalu J . Protože funkce φ zobrazuje interval I do intervalu J , jsou složené funkce $F(\varphi(t))$ a $f(\varphi(t))$ definované v intervalu I a podle věty o derivaci složené funkce platí

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in I.$$

Odtud plyne dokazované tvrzení.

Poznámka. První věta o substituci je užitečná v případech, kdy je integrál „připravený“ ve tvaru

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Pak stačí ověřit, že jsou splněny předpoklady věty.

☛ **Příklad 9.10.**

Vypočítejte integrál $\int e^{5t+3} dt$.

Řešení. Integrand je spojitý v \mathbb{R} , integrál proto existuje. Označme:

$$x = \varphi(t) = 5t + 3, \quad dx = \varphi'(t) dt = 5 dt.$$

Všechny předpoklady věty jsou splněny a lze psát:

$$\begin{aligned} \int e^{5t+3} dt &= \frac{1}{5} \int e^{5t+3} 5 dt = \frac{1}{5} \int e^x dx = \frac{1}{5} e^x + c = \\ &= \frac{1}{5} e^{5t+3} + c, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

☛ **Příklad 9.11.**

Vypočítejte integrál $\int \frac{e^t}{(e^t + 2)^3} dt$.

Řešení. Integrand je spojitý v \mathbb{R} , integrál proto existuje v \mathbb{R} .
Postupujme podobně jako v předchozím příkladu:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^t}{(e^t + 2)^3} dt &= \left| \begin{array}{l} x = e^t + 2 \\ dx = e^t dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \\ &= \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c = -\frac{1}{4(e^t + 2)^4} + c, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Poznámka. Samozřejmě nezáleží na tom, jakými písmeny jsou jednotlivé proměnné označeny.

➡ **Příklad 9.12.**

Vypočítejte integrál $\int \frac{(\ln x)\sqrt{(5 + \ln^2 x)^3}}{x} dx$ v intervalu $I = (0, +\infty)$.

Řešení.

$$\begin{aligned} \int \frac{(\ln x)\sqrt{(5 + \ln^2 x)^3}}{x} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(5 + \ln^2 x)^3}} (\ln x) \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{(5 + \ln^2 x)^3}} (2 \ln x) \frac{1}{x} dx = \left| \begin{array}{l} t = 5 + \ln^2 x \\ dt = (2 \ln x) \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t^3}} dt = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{3}{2}} dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -2\sqrt{t} + c = \\ &= -2\sqrt{5 + \ln^2 x} + c, \quad x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Věta (Druhá věta o substituci v neurčitém integrálu) *Nechť v intervalu I existuje integrál na levé straně rovnosti*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int f(x) dx \quad (9.3)$$

a rovná se $F(t)$, nechť funkce $x = \varphi(t)$ má nenulovou derivaci v každém bodě intervalu I a nechť zobrazuje interval I na interval $J = \varphi(I)$. Pak v intervalu J existuje integrál na pravé straně rovnosti (9.3) a rovná se $F(\psi(x))$, kde $\psi(x)$ je inverzní funkce k funkci $x = \varphi(t)$.

Důkaz. Funkce φ je podle předpokladu prostá v intervalu I . Označme $t = \psi(x)$ funkci inverzní k funkci φ . Tato funkce zobrazuje interval J na interval I .

Podle předpokladu existuje funkce G , diferencovatelná v I taková, že $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $t \in I$. Označme

$$F(x) = G(\psi(x)).$$

Podle věty o derivaci složené funkce existuje v intervalu J derivace F' a platí $F'(x) = G'(\psi(x))\psi'(x) = G'(t)\psi'(x) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \cdot 1/\varphi'(t) = f(x)$, $x \in J$.

Poznámka. Místo předpokladu $\varphi'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in I$ stačí požadovat, aby funkce φ byla ryze monotónní a aby bylo $\varphi'(t) = 0$ pro nejvýše konečný počet bodů $t \in I$.

☛ **Příklad 9.13.**

Vypočítejte integrál $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} dx, x \in (-1, 1)$.

Řešení. Integrand je spojitý v intervalu $J = (-1, 1)$, takže integrál v tomto intervalu existuje. Abychom odstranili odmocninu v integrandu, využijeme identitu $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ a substituci:

$$\begin{aligned}x &= \varphi(t) = \sin t; & \varphi(t) & \text{zobrazuje } (-\pi/2, \pi/2) \text{ na } (-1, 1); \\dx &= \cos t dt; & \varphi'(t) &= (\sin t)' = \cos t \neq 0; \\ \sqrt{1-x^2} &= |\cos t| = \cos t > 0; \\t &= \arcsin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{5}{\cos t} \cos t dt = 5 \int 1 dt = 5t + c = \\ &= 5 \arcsin x + t, \quad x \in (-1, 1).\end{aligned}$$

9.5 Integrace racionálních funkcí

Věta (Rozkladu na součet parciálních zlomků)

Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální lomená funkce a nechť jmenovatel $Q(x)$ lze psát ve tvaru

$$Q(x) = a(x-x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x-x_r)^{k_r} \cdot (x^2+2p_1x+q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2+2p_sx+q_s)^{l_s},$$

kde polynomy $x^2 + 2p_i x + q_i$, $i = 1, \dots, s$, jsou v reálném oboru nerozložitelné. Potom lze $R(x)$ vyjádřit – až na pořadí sčítanců – právě jedním způsobem ve tvaru

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{l_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + 2p_i x + q_i)^j},$$

kde $p(x)$ je polynom, A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} jsou reálné konstanty; rovnost platí pro všechna $x \in D_R$, tj. pro všechna reálná x různá od kořenů polynomu $Q(x)$ ve jmenovateli.

☛ **Příklad 9.14.**

Rozložte funkci na součet parciálních zlomků:

$$R(x) = \frac{3x + 5}{x^2 - 3x + 2}$$

Řešení. Polynom ve jmenovateli má kořeny 1 a 2, proto:

$$R(x) = \frac{3x + 5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{3x + 5}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}.$$

Při hledání koeficientů A, B převedme oba zlomky vpravo na společného jmenovatele. Aby byl výsledek identický s původní zadanou funkcí, musí být v čitateli identické funkce, tj. koeficienty u všech mocnin proměnné x musí být shodné.

$$\frac{3x + 5}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A(x - 2) + B(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)}$$

$$3x + 5 = (A + B)x + (-2A - B)$$

$$x^1 \dots 3 = A + B$$

$$x^0 \dots 5 = -2A - B$$

$$A = -8, \quad B = 11$$

Celkem je tedy

$$R(x) = \frac{3x + 5}{x^2 - 3x + 2} = -\frac{8}{x - 1} + \frac{11}{x - 2}.$$

☛ **Příklad 9.15.**

Rozložte funkci na součet parciálních zlomků:

$$R(x) = \frac{3x + 5}{(x - 1)^2(x - 2)}$$

Řešení.

$$R(x) = \frac{3x + 5}{(x - 1)^2(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 2}$$

$$\frac{3x + 5}{(x - 1)^2(x - 2)} = \frac{A(x - 1)(x - 2) + B(x - 2) + C(x - 1)^2}{(x - 1)(x - 2)}$$

$$3x + 5 = A(x^2 - 3x + 2) + B(x - 2) + C(x^2 - 2x + 1)$$

$$3x + 5 = (A + C)x^2 + (-3A + B - 2C)x + (2A - 2B + C)$$

Aby byly funkce na obou stranách rovnice identické, musí platit:

$$x^2 \dots 0 = A + C \quad (\rightarrow A = -C)$$

$$x^1 \dots 3 = -3A + B - 2C$$

$$x^0 \dots 5 = 2A - 2B + C$$

$$3 = -A + B$$

$$5 = A - 2B$$

$$B = -8, \quad A = -11, \quad C = 11$$

Celkem je tedy

$$R(x) = \frac{3x + 5}{(x - 1)^2(x - 2)} = -\frac{11}{x - 1} - \frac{8}{(x - 1)^2} + \frac{11}{x - 2}.$$

Poznámka. Uvědomme si, že pokud bychom hledali rozklad pouze ve tvaru

$$R(x) = \frac{3x + 5}{(x - 1)^2(x - 2)} = \frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x - 2},$$

získali bychom podmínku

$$3x + 5 = A(x - 2) + B(x - 1)^2$$

$$3x + 5 = A(x - 2) + B(x^2 - 2x + 1)$$

$$3x + 5 = Bx^2 + (A - 2B)x + (-2A + B)$$

a příslušnou soustavu rovnic, která nemá řešení (máme jen dvě proměnné a tři rovnice, z nichž žádná není lineární kombinací ostatních):

$$x^2 \dots 0 = B$$

$$x^1 \dots 3 = A - 2B$$

$$x^0 \dots 5 = -2A + B$$

$$B = 0, \quad A = 3 \wedge A = -\frac{5}{2}$$

Výpočet integrálu racionální funkce

Danou racionální funkci nejprve rozložíme na součet parciálních zlomků. Není-li stupeň polynomu v čitateli menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, provedeme nejprve částečné dělení polynomů. Poté stačí zintegrovat jednotlivé zlomky.

☛ **Příklad 9.16.**

Vypočítejte integrál $\int \frac{dx}{2-3x}$.

Řešení.

$$\int \frac{dx}{2-3x} = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{2-3x} (-3) dx = -\frac{1}{3} \ln |2-3x| + c.$$

☛ **Příklad 9.17.**

Vypočítejte integrál $\int \frac{dx}{(2x + 5)^3}$.

Řešení.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(2x + 5)^3} &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(2x + 5)^3} 2 dx = \frac{1}{2} \int (2x + 5)^{-3} 2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x + 5)^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{4(2x + 5)^2} + c.\end{aligned}$$

☛ **Příklad 9.18.**

Vypočítejte integrál $I = \int \frac{3x + 5}{(x - 1)^2(x - 2)} dx$.

Řešení. Po rozkladu na parciální zlomky obdržíme:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(-\frac{11}{x - 1} - \frac{8}{(x - 1)^2} + \frac{11}{x - 2} \right) dx = \\ &= -11 \ln |x - 1| - 8 \frac{(x - 1)^{-1}}{-1} + 11 \ln |x - 2| + c = \\ &= 11 \ln \left| \frac{x - 2}{x - 1} \right| + \frac{8}{x - 1} + c. \end{aligned}$$

➡ **Příklad 9.19.**

Vypočítejte integrál $I = \int \frac{dx}{2+x^2}$.

Řešení. Polynom ve jmenovateli je v reálném oboru nerozložitelný. Integrace povede na arctg:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^2+2} = \int \frac{dx}{2\left(\frac{x^2}{2}+1\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c. \end{aligned}$$

☛ **Příklad 9.20.**

Vypočítejte integrál $I = \int \frac{dx}{3x^2 + 2}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{3x^2 + 2} = \int \frac{dx}{2 \left(\frac{3x^2}{2} + 1 \right)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left(x \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 + 1} \sqrt{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left(x \sqrt{\frac{3}{2}} \right) + c. \end{aligned}$$

➡ **Příklad 9.21.**

Vypočítejte integrál $I = \int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 6}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 6} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{3}{2}x + 3} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{16}} = \\ &= \frac{16}{2 \cdot 39} \frac{\sqrt{39}}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{39}}\left(x - \frac{3}{4}\right)\right)^2 + 1} \frac{4}{\sqrt{39}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{4}{\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{4}{\sqrt{39}} \left(x - \frac{3}{4}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{4x - 3}{\sqrt{39}} + c. \end{aligned}$$

9.6 Převedení integrandu na racionální funkci

Pomocí druhé věty o substituci lze řadu integrálů převést na integrály racionální funkce. Přehled substitucí užitečných v jednotlivých případech je uveden ve skriptech na str. 103–110.