Některé elementární funkce

Určete existenční definiční obor funkce:

a) $f(x) = \arccos(1+2x)$ $\quad [D_f = \langle -1, 0\rangle]$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x} \operatorname{arctg} x$ $\quad [D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)]$

c) $f(x) = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ $\quad [D_f = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)]$

d) $f(x) = \sqrt[x]{1-2x}$ $\quad \left[D_f = (-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{1}{2}\right)\right]$

e) $f(x) = \operatorname{tgh}(\ln x)$ $\quad [D_f = (0, +\infty)]$

f) $f(x) = \operatorname{argcosh} \dfrac{x}{x-1}$ $\quad [D_f = (1, +\infty)]$

Sestrojte graf funkce:

$$\text{a)}\ f(x) = \arccos(1+2x)\,; \qquad \text{b)}\ f(x) = 2\operatorname{arctg}(x-1)\,;$$

$$\text{c)}\ f(x) = 1 + \cosh(x-2)\,; \qquad \text{d)}\ f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{argtgh}(x+1)\,.$$

Určete inverzní funkci k funkci $y = 2\sin 3x$ alespoň na jednom intervalu, na kterém je daná funkce prostá. $\quad \left[y = \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}\,,\ x \in \langle -2, 2\rangle\right]$

Přesvědčte se, že funkce $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ je inverzní sama k sobě.

Určete hodnoty cyklometrických funkcí:

$$\text{a)}\ \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\,; \qquad \text{b)}\ \arccos\frac{1}{2}\,; \qquad \text{c)}\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\,; \qquad \text{d)}\ \operatorname{arccotg} 1\,.$$

$\left[\text{a)}\ \dfrac{\pi}{3}\,;\ \text{b)}\ \dfrac{\pi}{3}\,;\ \text{c)}\ -\dfrac{\pi}{6}\,;\ \text{d)}\ \dfrac{\pi}{4}\right]$

Dokažte platnost vztahů:

a) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x\,; \quad -1 \le x \le 1$

b) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}\,; \quad 0 \le x \le 1$

Vyjádřete $\ln 5$ pomocí logaritmů při základu 8. $\quad \left[\ln 5 = \dfrac{\log_8 5}{\log_8 \mathrm{e}}\right]$

Dokažte, že platí vztahy

$$\text{a)}\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,; \qquad \text{b)}\ \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x\,.$$

Dokažte, že platí vztah $\operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Odvoďte vzorec pro derivování funkce $y = \operatorname{arctg} x$.

Určete derivaci funkce inverzní k funkci $f(x) = \operatorname{tgh} x$. $\quad \left[\dfrac{1}{1-x^2}\,;\ x \in (-1, 1)\right]$

Určete $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{tgh} x$. [1]

Určete definiční obor funkce:

a) $f(x) = \arcsin\sqrt{\dfrac{2x+1}{2}}$ $\left[D_f = \left\langle -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\rangle\right]$

b) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x}$ $\left[D_f = \left\langle -\dfrac{1}{3}, 1\right\rangle\right]$

c) $f(x) = \arcsin\sqrt{2x}$ $\left[D_f = \left\langle 0, \dfrac{1}{2}\right\rangle\right]$

d) $f(x) = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ $[D_f = \langle -1, 3\rangle]$

e) $f(x) = \arccos\dfrac{1-2x}{4}$ $\left[D_f = \left\langle -\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right\rangle\right]$

f) $f(x) = \arccos\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ $[D_f = \langle 0, 4\rangle]$

g) $f(x) = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ $[D_f = \langle 0, 1\rangle]$

h) $f(x) = \arccos\dfrac{2}{2+\sin x}$ $\left[D_f = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle\right]$

Určete definiční obor funkce:

a) $f(x) = 2^{-x^2}$ $[D_f = (-\infty, +\infty)]$

b) $f(x) = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x$ $[D_f = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)]$

c) $f(x) = \sqrt[x]{1+x}$ $[D_f = (-1, 0) \cup (0, +\infty)]$

d) $f(x) = \log_x 2$ $[D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)]$

e) $f(x) = \sqrt{\ln\dfrac{5x-x^2}{4}}$ $[D_f = \langle 1, 4\rangle]$

f) $f(x) = \ln\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}$ $[D_f = (4, 5) \cup (6, +\infty)]$

Určete definiční obor funkce:

a) $f(x) = \sinh\sqrt{1-x^2}$ $[D_f = \langle -1, 1\rangle]$

b) $f(x) = \sinh\big(\ln(1-x)\big)$ $[D_f = (-\infty, 1)]$

c) $f(x) = \operatorname{cotgh}\big(\arcsin(x+1)\big)$ $[D_f = \langle -2, -1) \cup (-1, 0\rangle]$

d) $f(x) = \operatorname{argcosh}(x+3)$ $[D_f = \langle -2, +\infty)]$

Určete limity:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{tgh} x\,;$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\,;$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}\,;$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\,.$

$\left[\text{a) } -1\,;\ \text{b) } 1\,;\ \text{c) } -\dfrac{\pi}{2}\,;\ \text{d) } 0\right]$

Na základě známých grafů cyklometrických funkcí sestrojte grafy funkcí:

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x-1}{2}\,;$ b) $f(x) = \arccos\dfrac{1-2x}{4}\,;$

c) $f(x) = 3\operatorname{arctg}(x+1)\,;$ d) $f(x) = 2\operatorname{arccotg}(x-1)\,.$

Na základě známých grafů funkcí $f(x) = \mathrm{e}^x$ a $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sestrojte grafy funkcí:

$$\text{a)}\ \ f(x) = \mathrm{e}^{|x-1|}\,; \qquad \text{b)}\ \ f(x) = |\mathrm{e}^x - 1|\,;$$
$$\text{c)}\ \ f(x) = \frac{2}{\mathrm{e}^{3x}}\,; \qquad \text{d)}\ \ f(x) = 2\mathrm{e}^{|x+2|}\,.$$

Na základě známého grafu funkce $f(x) = \ln x$ sestrojte grafy funkcí:

$$\text{a)}\ \ f(x) = \ln|x|\,; \qquad \text{b)}\ \ f(x) = \left|\ln x^2\right|\,;$$
$$\text{c)}\ \ f(x) = \ln\frac{1}{x-1}\,; \qquad \text{d)}\ \ f(x) = 2\ln 3x\,.$$

Sestrojte graf funkce:

$$\text{a)}\ \ f(x) = -2^x\,; \qquad \text{b)}\ \ f(x) = 2^{x+3}\,;$$
$$\text{c)}\ \ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}\,; \qquad \text{d)}\ \ f(x) = 2^{-x^2}\,.$$

Sestrojte graf funkce:

$$\text{a)}\ \ f(x) = 2\cosh(x-1)\,; \qquad \text{b)}\ \ f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tgh}(x+2)\,;$$
$$\text{c)}\ \ f(x) = \sinh(2x+3)\,; \qquad \text{d)}\ \ f(x) = \mathrm{cotgh}(x-1)\,;$$
$$\text{e)}\ \ f(x) = \mathrm{argcosh}(x-1)\,; \qquad \text{f)}\ \ f(x) = \mathrm{argtgh}(2x-1)\,;$$

Určete inverzní funkci k dané funkci $y = f(x)$ na základním intervalu prostoty:

a) $f(x) = 1 + 2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$ $\left[f^{-1}(x) = \dfrac{1 + \arcsin\frac{x-1}{2}}{1 - \arcsin\frac{x-1}{2}}\right]$

b) $f(x) = 4\arcsin\sqrt{1-x^2}$ $\left[f^{-1}(x) = \pm\cos\dfrac{x}{4}\,;\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle\right]$

c) $f(x) = 10^{x+1}$ $\left[f^{-1}(x) = \log\dfrac{x}{10}\right]$

d) $f(x) = 1 + \log(x+2)$ $\left[f^{-1}(x) = -2 + 10^{x-1}\right]$

Přesvědčte se o tom, že funkce $f(x) = \dfrac{ax-b}{cx-a}$ je inverzní sama k sobě.

Určete hodnoty cyklometrických funkcí:

$$\text{a)}\ \ \arcsin\frac{1}{2}\,; \qquad \text{b)}\ \ \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\,; \qquad \text{c)}\ \ \mathrm{arctg}\,\sqrt{3}\,; \qquad \text{d)}\ \ \mathrm{arccotg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

$\left[\text{a)}\ \dfrac{\pi}{6}\,;\ \text{b)}\ \dfrac{2\pi}{3}\,;\ \text{c)}\ \dfrac{\pi}{3}\,;\ \text{d)}\ \dfrac{\pi}{3}\right]$

Vyjádřete $f(x) = \log_{10}(5x+1)$ pomocí přirozených logaritmů. $\left[\dfrac{\ln(5x+1)}{\ln 10}\right]$

Pomocí dekadických logaritmů vyjádřete $\log_8 19.5$. $\left[\dfrac{\log_{10} 19.5}{\log_{10} 8}\right]$

Dokažte platnost vztahů:

$$
\begin{array}{lll}
\text{a)} & \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \dfrac{\pi}{2} & x \in \mathbb{R}\,; \\
\text{b)} & \arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2} & x \in \langle 0,1\rangle\,; \\
\text{c)} & 2\arcsin\sqrt{x} = \arccos(1-2x) & x \in \langle 0,1\rangle\,; \\
\text{d)} & \operatorname{arctg} x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} & x \in (-\infty,+\infty)\,; \\
\text{e)} & \arccos x = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & x \in (0,1)\,.
\end{array}
$$

Pro která x platí vztahy:

$$
\begin{array}{llll}
\text{a)} & \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}\,; & \text{b)} & \arccos\sqrt{x} + \arcsin\sqrt{x} = \dfrac{\pi}{2}\,; \\
\text{c)} & \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} \dfrac{1}{x}\,; & \text{d)} & \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x}\,.
\end{array}
$$

[a) $x \in \langle -1,1\rangle$; b) $x \in \langle 0,1\rangle$; c) $(0,+\infty)$; d) $x \in (-\infty,1)$]

Dokažte, že platí vztahy:

a) $2\sinh x \cdot \cosh x = \sinh 2x\,;$

b) $\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta \pm \sinh\beta\cosh\alpha\,;$

c) $\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta \pm \sinh\alpha\sinh\beta\,;$

d) $\cosh\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{\cosh x + 1}{2}}\,;$

e) $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}\,.$

Dokažte, že platí vztahy:

$$
\begin{array}{ll}
\text{a)} & \operatorname{argtgh} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\,, \qquad |x| < 1 \\
\text{b)} & \operatorname{argsinh} x_1 + \operatorname{argsinh} x_2 = \operatorname{argsinh}\left(x_1\sqrt{x_2^2+1} + x_2\sqrt{x_1^2+1}\right).
\end{array}
$$

Odvoďte vzorce pro derivování funkce $f(x)$:

$$
\begin{array}{llll}
\text{a)} & f(x) = \arcsin x\,; & \text{b)} & f(x) = \arccos x\,; \\
\text{c)} & f(x) = \operatorname{arccotg} x\,; & \text{d)} & f(x) = \sinh x\,; \\
\text{e)} & f(x) = \operatorname{tgh} x\,; & \text{f)} & f(x) = \operatorname{argsinh} x\,.
\end{array}
$$

$\left[\text{a)}\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;\ \text{b)}\ \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,;\ \text{c)}\ \dfrac{-1}{1+x^2}\,;\ \text{d)}\ \cosh x\,;\ \text{e)}\ \dfrac{1}{\cosh^2 x}\,;\ \text{f)}\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right]$

Vypočtěte první derivace funkce:

a) $f(x) = x\arcsin x$ $\left[f'(x) = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

b) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$ $\left[f'(x)=\dfrac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}\right]$

c) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left[f'(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\right]$

d) $f(x)=\dfrac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$ $\left[f'(x)=\dfrac{2x}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{x^2}{(1+x^2)(\operatorname{arctg} x)^2}\right]$

e) $f(x)=\arcsin(\sin x)$ $\left[f'(x)=\dfrac{\cos x}{|\cos x|}\right]$

f) $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$ $\left[f'(x)=\dfrac{1}{2\,(1+x^2)}\right]$

Vypočtěte první derivaci funkce:

a) $f(x)=2^x$ $[f'(x)=2^x\cdot\ln 2]$

b) $f(x)=\dfrac{1}{3^x}$ $\left[f'(x)=-\dfrac{\ln 3}{3^x}\right]$

c) $f(x)=x\cdot 10^x$ $[f'(x)=10^x(1+x\cdot\ln 10)]$

d) $f(x)=3^{\sin x}$ $\left[f'(x)=3^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\ln 3\right]$

e) $f(x)=10^{2x-3}$ $\left[f'(x)=2\cdot 10^{2x-3}\cdot\ln 10\right]$

f) $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{\ln x}}$ $\left[f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}\right]$
