Kurzy celoživotního vzdělávání

Fakulta dopravní ČVUT

MATEMATIKA PRO LETECKÉ OBORY I

PŘEHLED LÁTKY

PŘEDNÁŠKA 1

ČÍSELNÉ OBORY

1.1 Základní poznatky o množinách

Množinou budeme rozumět souhrn libovolných objektů. Množinu považujeme za **určenou**, je-li možno o každém objektu jednoznačně rozhodnout, zda do ní patří, či nikoli. Každý z objektů, který patří do dané množiny, se nazývá jejím **prvkem (elementem)**. Množiny budeme značit velkými písmeny latinské abecedy, např. **A**, **B**, **M**, apod., prvky množin budeme značit malými písmeny, např. $a, b, x,$ apod. Skutečnost, že a **je prvkem (elementem) množiny** **A**, vyjadřujeme zápisem $a \in$ **A**. Není-li určitý objekt b prvkem množiny **A**, píšeme $b \notin$ **A**.

Obsahuje-li daná množina alespoň jeden prvek, nazývá se **neprázdná množina**; neobsahuje-li žádný prvek, nazývá se **prázdná množina** a značí se symbolem $\emptyset$. Množina, která má konečný počet prvků (tj. množina, která je prázdná, nebo je počet jejích prvků dán přirozeným číslem - viz část 1.1.2), se nazývá **konečná množina**; každá množina, která není konečná, se nazývá **nekonečná**.

Je-li množina **A** konečná, můžeme ji určit **výčtem** jejích prvků, které bez ohledu na pořadí vypíšeme a uzavřeme do složených závorek $\{\ \}$, například **A** $= \{1, 3, 5, 7\}$.

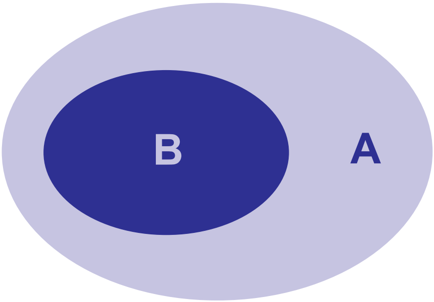
Konečnou i nekonečnou množinu můžeme dále určit **charakteristickou vlastností**, tj. takovou vlastností, kterou mají právě jen prvky zadávané množiny. Zjišťování uvažované vlastnosti se přitom provádí v tzv. **základní (univerzální) množině U**, která obsahuje všechny objekty, které nás v dané situaci zajímají. Budeme například psát:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U};\ V(x)\}$$

a říkat: „**A** je množina všech x z množiny **U**, pro která platí (která mají vlastnost) $V(x)$.“

Množinové vztahy a operace

Množina **B** se nazývá **podmnožinou** množiny **A**, je-li každý prvek množiny **B** prvkem množiny **A**; píšeme **B** $\subset$ **A**.

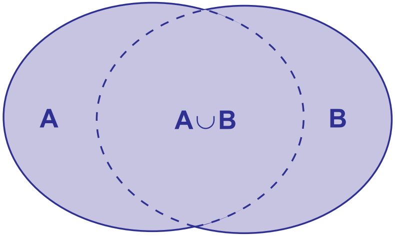


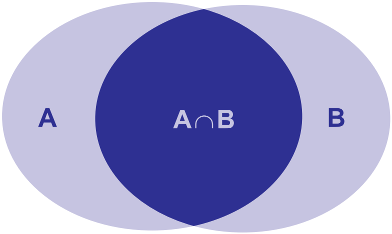
Například množina **B** $= \{3, 5, 7, 9\}$ je podmnožinou množiny **A** $= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$; množina *všech pravoúhlých* trojúhelníků je podmnožinou množiny *všech* trojúhelníků, apod.
Uvědomme si, že **každá množina je podmnožinou sebe sama**, tj. pro každou množinu **A** platí **A** $\subset$ **A**. Rovněž platí, že **prázdná množina je podmnožinou každé množiny**, tj. pro každou množinu **A** platí: $\emptyset \subset$ **A**.

Množiny **A**, **B** považujeme za **sobě rovné** (píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$), právě když $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ **a zároveň** $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, tj. skládají-li se z týchž prvků.

Sjednocení $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ množin **A**, **B** je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin **A**, **B**. Z definice ihned plyne, že sjednocení libovolné množiny **A** s prázdnou množinou je množina **A**, tj. $\mathbf{A} \cup \emptyset = \mathbf{A}$.

Průnik $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ množin **A**, **B** je množina všech prvků, které patří zároveň do obou množin. Průnik každé množiny **A** s prázdnou množinou je zřejmě prázdná množina, $\mathbf{A} \cap \emptyset = \emptyset$. Množiny **A**, **B**, pro které platí $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$, se nazývají **disjunktní**.



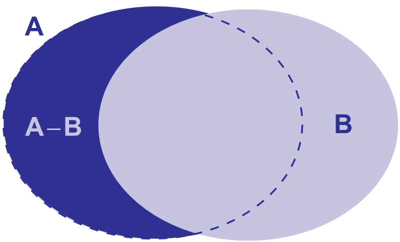


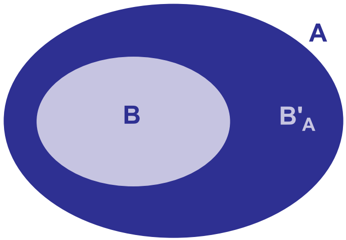
☛ ***Příklad***

- *Sjednocení množin*:
$\{2,3,4,5,6,7,8\} \cup \{1,3,5,7,9,11,13\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,13\}$

- *Průnik množin*: $\{2,\mathbf{3},4,\mathbf{5},6,\mathbf{7},8\} \cap \{1,\mathbf{3},\mathbf{5},\mathbf{7},9,11,13\} = \{\mathbf{3},\mathbf{5},\mathbf{7}\}$

Rozdíl **A** $\setminus$ **B** množin **A**, **B** je množina všech prvků množiny **A**, které nejsou prvky množiny **B**. Je-li speciálně **B** $\subset$ **A**, hovoříme o **doplňku množiny B v množině A** a píšeme $\mathbf{B}'_{\mathbf{A}}$.





Home
Obsah
Strana 6
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

☛ *Příklad*

- *Rozdíl množin*:

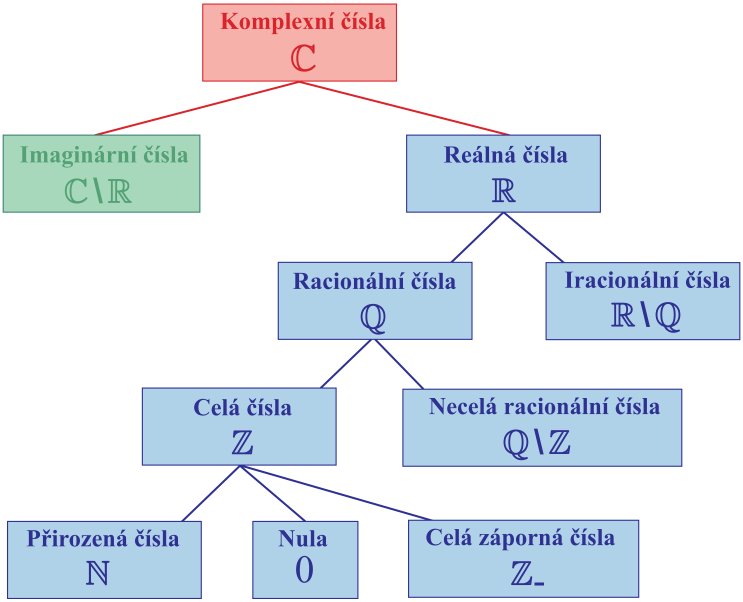
$$\{2,3,4,5,6,7,8\} \setminus \{1,3,5,7,9,11,13\} = \{2,4,6,8\}$$

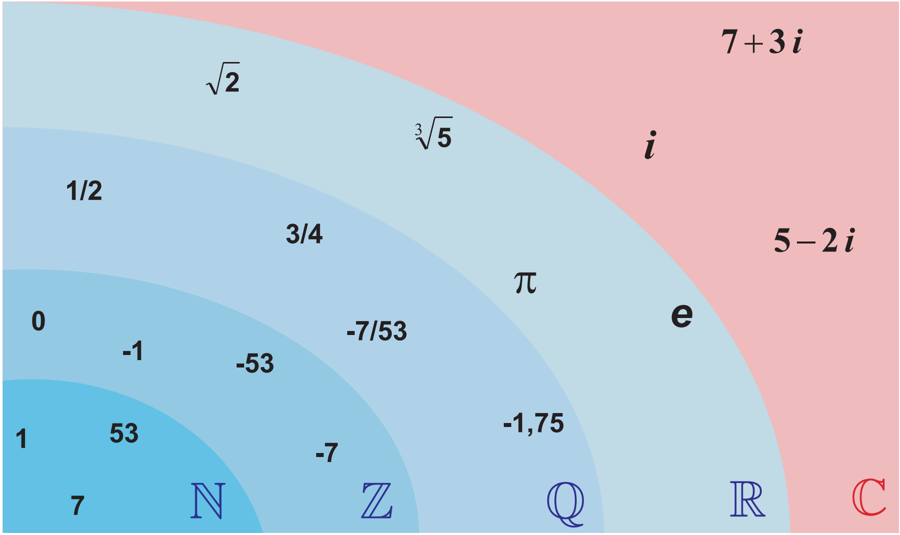
- *Doplněk množiny*
  $\boldsymbol{B} = \{3,5,7,9\}$ *v množině* $\boldsymbol{A} = \{1,3,5,7,9,11,13\}$:

$$\mathbf{B}'_{\mathbf{A}} = \{1,11,13\}.$$

1.2 Druhy čísel

Zopakujme si, že jsme se již setkali s následujícími druhy čísel:



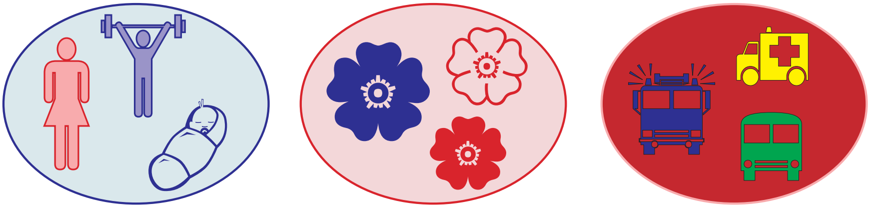


$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

1.2.1 Množina přirozených čísel

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \dots\}, \qquad \mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\}$$

Přirozená čísla slouží k vyjádření počtu osob, zvířat, předmětů aj., obecněji počtu prvků konečných neprázdných množin. Přirozené číslo - uvažujme například číslo 3 - můžeme chápat jako společnou vlastnost následujících množin:



Obor přirozených čísel je **uzavřený na sčítání a násobení**, není však **uzavřený na odčítání** (ne vždy je rozdíl dvou přirozených čísel přirozené číslo, např. $2 - 5 = -3$) ani na dělení (např. $2 : 5 = 0,40$ není přirozené číslo). V oboru přirozených čísel **k žádnému číslu neexistuje číslo opačné ani převrácené**.

Home
Obsah
Strana 10
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Přirozená čísla jsme zvyklí zapisovat v **poziční číselné soustavě o základu deset**, neboli v **desítkové soustavě**. K tomu používáme deset číslic: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jejichž význam závisí na jejich umístění či pozici. Číslice zapisujeme za sebe v pořadí zprava doleva a postupně tak udáváme, kolik dané číslo obsahuje jednotek, desítek, stovek, tisíců, desetitisíců, statisíců, milionů, . . . , tedy nultých, prvních, druhých, . . . , šestých, . . . mocnin čísla 10. Jistě víte, že například skupina číslic

$$87\,956$$

vyjadřuje číslo obsahující 6 jednotek, 5 desítek, 9 stovek, 7 tisíc a 8 desetitisíc:

$$\begin{aligned} & 8 \cdot 10\,000 + 7 \cdot 1\,000 + 9 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ = {} & 8 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 \,. \end{aligned}$$

Právě uvedený výraz se nazývá **rozvinutý zápis daného čísla v desítkové soustavě**, zápis 387 956 se nazývá **zkrácený**.

Obecně lze každé přirozené číslo a vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \,,$$

neboli ve zkráceném zápisu

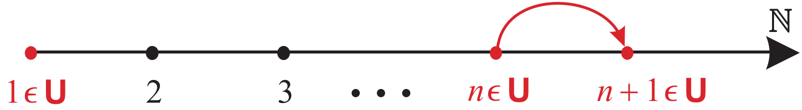
$$a = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \,,$$

kde n je přirozené číslo nebo nula, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ jsou některá z čísel 0, 1, . . . , 9, přičemž $a_n \neq 0$. Číslo a_i se nazývá **číslice (cifra) řádu i čísla a**, číslo 10^i se nazývá **jednotka řádu** i.

Kromě desítkové soustavy se často setkáváme i se soustavou šedesátkovou, dvojkovou a příležitostně i s některými dalšími.

Axiom matematické indukce.

Nechť je $U \subset \mathbb{N}$ taková, že $1 \in U$.
Jestliže z vlastnosti $n \in U$ plyne $(n+1) \in U$, pak $U = \mathbb{N}$.



Home
Obsah
Strana 13
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

☛ Příklad 1.1.

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,. \qquad (1.1)$$

Řešení. Označme $U = \{n \in N \mid \text{pro } n \text{ platí } (1.1)\}$.

1. krok: $1 \in U: \quad 1^2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$

2. krok: $n \in U \Rightarrow (n+1) \in U:$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\,,$$

to je právě vztah (1.1) pro $n = n+1$. $\square$

1.2.2 Množina celých čísel

$$\mathbb{Z} = \{\dots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$$

Množina celých čísel je rozšířením množiny $\mathbb{N}_0$ o množinu všech řešení rovnic tvaru

$$n_1 + x = n_2\,, \quad \text{kde} \quad n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}\,.$$

1.2.3 Množina racionálních čísel

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n},\ \text{kde } z \in \mathbb{Z}\,,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Množina racionálních čísel je rozšířením množiny $\mathbb{Z}$ o množinu všech řešení rovnic tvaru

$$z_1 x = z_2\,, \quad \text{kde} \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{Z}\,.$$

1.2.4 Množina reálných čísel

$$\mathbb{R} = \{a_0.a_1a_2\ldots a_n\ldots,\ a_0 \in \mathbb{Z}\,, a_k \in \{0,\ldots,9\} \text{ pro } k \geq 1\}\ ,$$

kde ke každému $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $n > n_0$ takové, že $a_n \neq 9$.

Množina reálných čísel je tedy zavedena jako množina všech desetinných rozvojů, které nejsou zakončeny samými devítkami – jinak by např. číslo 1 mělo dva různé rozvoje,

$$1.000\ldots \qquad \text{a} \qquad 0.999\ldots\ ,$$

a jeho vyjádření by nebylo jednoznačné:

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = 1\,.$$

Racionální čísla představují pouze **periodické desetinné rozvoje**, kde existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n > n_0$ je $a_{n+k} = a_n$ (jistá skupina čísel se neustále opakuje). Čísla, která neodpovídají periodickým desetinným rozvojům, se nazývají **iracionální čísla**.

Uspořádání na množině $\mathbb{R}$.

Řekneme, že reálné číslo

$$x = x_0.x_1x_2 \dots x_{n-1}x_nx_{n+1} \dots$$

je menší než reálné číslo

$$y = y_0.y_1y_2 \dots y_{n-1}y_ny_{n+1} \dots ,$$

píšeme $x < y$, právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že $x_k = y_k$ pro $k < n$ a $x_n < y_n$.

Chceme-li vyjádřit, že $a < b$ nebo $a = b$, píšeme $a \leq b$; je-li $a > b$ nebo $a = b$, píšeme $a \geq b$.

Reálná čísla $a > 0$ se nazývají **kladná čísla**, $a < 0$ **záporná čísla**, $a \geq 0$ **nezáporná čísla** a $a \leq 0$ **nekladná čísla**.

Vlastnosti uspořádání

➥ Pro každá dvě reálná čísla a, b platí právě jeden ze vztahů:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b.$$

➥ Pro každá tři reálná čísla $a,\ b,\ c$ platí:

- Je-li $a < b$ a zároveň $b < c$, pak $a < c$.
- Je-li $a < b$, pak $a + c < b + c$.
- Je-li $a < b$ a zároveň $c > 0$, pak $ac < bc$.

➥ Pro každá čtyři reálná čísla a, b, c, d platí:

- Je-li $a < b$ a zároveň $c < 0$, pak $ac > bc$.
- Je-li $a < b$ a zároveň $c < d$, pak $a + c > b + d$.
- Je-li $0 < a < b$ a zároveň $0 < c < d$, pak $ac < bd$.
- Je-li $0 < a < b$, pak $1/a < 1/b$.

Geometrická reprezentace množiny reálných čísel

Reálná čísla jsme zvyklí znázorňovat pomocí **číselné osy**. To nám umožňuje následující tvrzení:

Tvrzení 1. *Existuje zobrazení množiny* ***R*** *na přímku, které má tyto vlastnosti:*

- *Je vzájemně jednoznačné, tj. obrazem každého reálného čísla je právě jeden bod přímky a naopak, každý bod přímky je obrazem právě jednoho reálného čísla.*
- *Jsou-li* a, b, c *libovolná reálná čísla, pro která platí* $a < b < c$, *pak obraz čísla* b *leží na přímce mezi obrazy čísel* a, c.

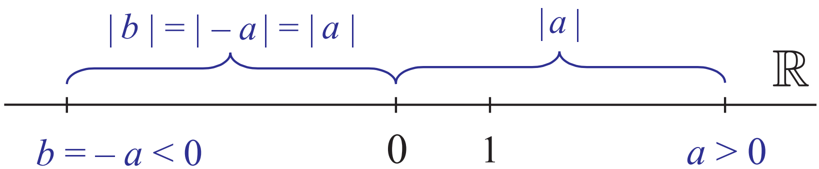
Grafické znázornění reálných čísel na číselné ose

Zvolme přímku x a na ní dva různé body, z nichž jeden prohlásíme za obraz čísla 0, označíme jej stejným symbolem a nazveme jej **počátkem**, druhý zvolíme za obraz čísla 1, označíme jej rovněž symbolem 1 a nazveme jej **jednotkovým bodem**. Přímce x se pak říká **číselná osa**; její poloha se obvykle volí vodorovná a bod 1 se na ní volí vpravo od počátku 0.

Každému reálnému číslu a se na číselné ose přiřazuje bod zvaný **obraz čísla** a, který budeme značit stejně. **Kladné číslo** a se přitom zobrazuje na polopřímku '01' tak, že vzdálenost obrazu od počátku je rovna číslu a (tj. a krát velikost jednotkové úsečky '01'), obraz **záporného čísla** b leží na polopřímce opačné k polopřímce '01' a jeho vzdálenost od počátku 0 je rovna číslu $-b$. Polopřímka '01' se proto nazývá **kladná poloosa** (obvykle je opatřena šipkou), polopřímka opačná k polopřímce '01' se nazývá **záporná poloosa**. Pro jednoduchost se o reálných číslech často hovoří přímo jako o **bodech číselné osy**.

Absolutní hodnota reálného čísla a je definována takto:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{je-li} \quad a \geq 0, \\ -a, & \text{je-li} \quad a < 0. \end{cases}$$



Absolutní hodnota nezáporného čísla je tedy dané číslo samo, absolutní hodnota záporného čísla je číslo k němu opačné.

Home
Obsah
Strana 21
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Vzdálenost reálných čísel

Uvědomme si, že pro libovolná $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

1. $|x - y| \geq 0$,
2. $|x - y| = 0 \iff x = y$,
3. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ (trojúhelníková nerovnost).

V grafickém znázornění reálných čísel na číselné ose představuje absolutní hodnota $|\,a\,|$ **vzdálenost obrazu čísla a od počátku**; $|\,a - b\,|$ pak představuje **vzdálenost obrazů čísel $a,\ b$.**

Obecně bychom mohli **vzdálenost** dvou reálných čísel zavést jako libovolnou funkci $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující podmínky 1.–3. Nebude-li však řečeno jinak, budeme vzdáleností rozumět absolutní hodnotu.

Rozšíření množiny reálných čísel o $+\infty$ a $-\infty$

Mnohdy je výhodné rozšířit množinu reálných čísel o dva symboly, $+\infty$ a $-\infty$, pro které platí: $-\infty < x < +\infty$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Takto rozšířenou množinu budeme značit jako $\mathbb{R}^*$ a přirozeně na ni rozšíříme některé algebraické operace:

$$\left|\pm\infty\right| = +\infty\,, \qquad \pm\infty + x = \pm\infty \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}\,,$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty\,, \qquad -\infty - (-\infty) = -\infty\,,$$

$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \text{ pro každé } x > 0\,,$$

$$x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \text{ pro každé } x < 0\,,$$

$$\frac{\pm\infty}{x} = \pm\infty \text{ pro } x > 0\,, \qquad \frac{\pm\infty}{x} = \mp\infty \text{ pro } x < 0\,,$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R}\,.$$

Nelze definovat: $+\infty + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad 0/0, \quad \pm\infty/\pm\infty\,.$

Interval je podmnožina množiny všech reálných čísel, která se na číselné ose zobrazí jako úsečka, polopřímka nebo přímka, přičemž krajní body úsečky a počáteční bod polopřímky k ní mohou, ale nemusí patřit.

➥ **Interval omezený** (na číselné ose znázorněn **úsečkou**)

➥ **Uzavřený:** $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$

➥ **Polouzavřený:**

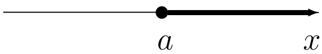
$$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}\,, \quad (a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$$

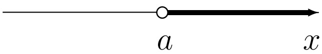
➥ **Otevřený:** $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

- **Neomezený** (znázorněn přímkou nebo polopřímkou)

- **Neomezený zprava:**

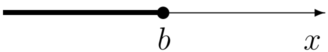
$$\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}\,, \;\; (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$$

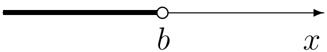




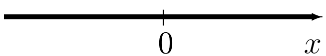
- **Neomezený zleva:**

$$(-\infty, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}\,, \;\; (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$$





- **Oboustranně neomezený:** $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$



Home
Obsah
Strana 25
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

1.2.5 Množina komplexních čísel

$$\mathbb{C} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá v množině $\mathbb{R}$ řešení. Snaha o vytvoření takového oboru čísel, v němž by každá algebraická rovnice měla řešení, vedla k vytvoření množiny komplexních čísel, kterou budeme značit symbolem $\mathbb{C}$.

Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšíříme na množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$ takto. Nejdříve přidáme k množině $\mathbb{R}$ číslo, které budeme značit i a které definujeme požadavkem, aby splňovalo rovnost $i^2 = -1$. Číslo i budeme nazývat **imaginární jednotkou**. Pak přidáme všechna čísla tvaru $x + iy$, kde x, y jsou reálná čísla a i je imaginární jednotka. Takto utvořená čísla budeme nazývat **komplexními čísly**. Číslo x nazýváme **reálnou částí** komplexního čísla $z = x + iy$ a značíme je $\Re z$; číslo y nazýváme **imaginární částí** komplexního čísla $z = x + iy$ a značíme je $\Im z$. Komplexní číslo, jehož reálná část je rovna nule, nazýváme **ryze imaginárním číslem**. **Číslem komplexně sdruženým** ke komplexnímu číslu $z = x + iy$ nazýváme číslo $\overline{z} = x - iy$. (Reálné části obou čísel jsou si rovny, imaginární se liší ve znaménku.)

Rovnost dvou komplexních čísel se definuje tak, že dvě komplexní čísla jsou si **rovna** právě tehdy, když se rovnají jejich reálné i jejich imaginární části.

Pro imaginární jednotku zřejmě platí rovnosti

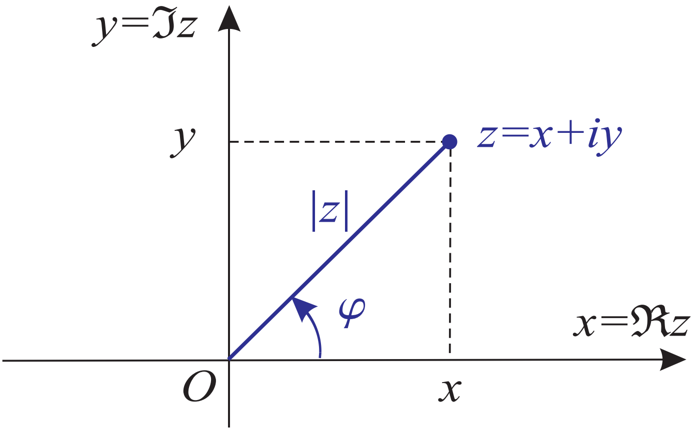
$$i^{4k} = 1\,, \; i^{4k+1} = i\,, \; i^{4k+2} = -1\,, \; i^{4k+3} = -i\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.2}$$

Každé komplexní číslo $z = x + iy$ je jednoznačně určeno uspořádanou dvojicí reálných čísel (x, y). Tato dvojice určuje v rovině $\mathbb{R}^2$ s kartézskou soustavou souřadnic právě jeden bod, který má souřadnice (x, y). Také obráceně, každé uspořádané dvojici (x, y) souřadnic nějakého bodu roviny $\mathbb{R}^2$ můžeme přiřadit právě jedno komplexní číslo $z = x + iy$. Dostali jsme tak vzájemně jednoznačný vztah mezi rovinou $\mathbb{R}^2$ a množinou komplexních čísel $\mathbb{C}$. Budeme proto i komplexní čísla chápat jako body v rovině a tuto rovinu budeme nazývat **rovinou komplexních čísel**, nebo také

komplexní rovinou C. Přímku

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z = 0\}, \quad \text{resp.} \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z = 0\}$$

nazýváme **reálnou**, resp. **imaginární osou** komplexní roviny **C**.



Modul komplexního čísla

Číslo

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.3}$$

je tzv. **modul (absolutní hodnota)** komplexního čísla $z = x + iy$. Zřejmě je $|z| \in \langle 0, \infty)$. Každé komplexní číslo, jehož modul je roven 1, se nazývá **komplexní jednotka**.

Hlavní hodnota argumentu

Důležitou roli v celé analýze komplexní proměnné má velikost orientovaného úhlu, který svírá kladná reálná poloosa a průvodič bodu $z \neq 0$ v komplexní rovině. Toto číslo se obvykle značí symbolem φ a zpravidla se požaduje, aby leželo v intervalu $\langle -\pi, \pi)$. Tento úhel φ, který je přiřazen každému nenulovému komplexnímu číslu z, nazýváme **hlavní hodnota argumentu** komplexního čísla z. Někdy se místo intervalu $\langle -\pi, \pi)$ volí interval $\langle 0, 2\pi)$. Pro hlavní hodnotu φ argumentu komplexního čísla z se používá označení $\arg z$. Jelikož každému nenulovému komplexnímu číslu z je přiřazena právě jedna hlavní hodnota argumentu $\arg z$, můžeme $\arg z$ chápat jako reálnou funkci komplexní proměnné, definovanou na množině $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, nebo také jako reálnou funkci dvou reálných proměnných. Explicitně ji můžeme definovat před-pisem:

$$\arg z = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro všechna} \quad x < 0\,, y > 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro všechna} \quad x = 0\,, y > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro všechna} \quad x > 0\,, y \in \mathbb{R}, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pro všechna} \quad x = 0\,, y < 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro všechna} \quad x < 0\,, y \leq 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Pomocí hlavní hodnoty $\arg z$ nenulového komplexního čísla můžeme definovat nekonečně mnoho dalších hodnot argumentu tohoto čísla z, a to předpisem

$$\text{Arg}_{\,k} z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.5}$$

Zřejmě $\operatorname{Arg}_k z \in \langle (2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ a $\operatorname{Arg}_0 z = \arg z$. Takto definované funkce $\operatorname{Arg}_k z$, jejichž definičním oborem je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, nazýváme **jednoznačnými větvemi argumentu**. Funkce $\arg z$ se nazývá **hlavní větev argumentu**.

Zápis komplexních čísel

Každé komplexní číslo $z \neq 0$ lze zapsat právě jedním způsobem v jeho tzv. **kartézském (algebraickém) tvaru**

$$z = x + iy \tag{1.6}$$

nebo v tzv. **goniometrickém (polárním) tvaru**

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi\,. \tag{1.7}$$

Z goniometrického tvaru komplexního čísla z plynou rovnosti

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \tag{1.8}$$

Uvedeme ještě třetí, tzv. **exponenciální tvar** komplexního čísla

$$z = |z| e^{i\varphi}\,, \tag{1.9}$$

kde komplexní funkci reálné proměnné $e^{i\varphi}$ definujeme pomocí tzv. **Eulerova vztahu**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, \quad \varphi \in \mathbb{R}\,. \tag{1.10}$$

☛ *Příklad*

Vyjádřeme komplexní číslo $z = 1 + i\sqrt{3}$ v goniometrickém a exponenciálním tvaru.

Řešení. Nejdříve vypočteme modul $|z|$ a hlavní hodnotu argumentu $\varphi = \arg z$. Podle (1.3) je $|z| = \sqrt{1+3} = 2$. Pro hodnotu φ podle (1.8) musí platit

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\pi \le \varphi < \pi .$$

Odtud dostáváme $\varphi = \pi/3$. Podle (1.7) goniometrický tvar komplexního čísla z je

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) .$$

Podobně podle (1.9) pro exponenciální tvar komplexního čísla z platí

$$z = 2e^{i\pi/3} .$$

Početní operace s komplexními čísly

Nechť $z = x + iy$ a $w = u + iv$ jsou dvě komplexní čísla. Pak jejich **součet, rozdíl, součin a podíl** definujeme vztahy:

$$
\begin{aligned}
z + w &= (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v) \\
z - w &= (x + iy) - (u + iv) = (x - u) + i(y - v) \\
zw &= (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) \\
\frac{z}{w} &= \frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i\frac{yu - xv}{u^2 + v^2}\,.
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Slovy můžeme operace s komplexními čísly popsat takto.
Sčítání a **odčítání** je nejvýhodnější ve tvaru kartézském. Sečteme, resp. odečteme reálné části a sečteme, resp. odečteme imaginární části.

Násobení komplexních čísel v kartézském tvaru provádíme jako násobení dvojčlenu dvojčlenem, v goniometrickém a exponenciálním tvaru se vynásobí moduly a sčítají argumenty:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}, \quad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) = |w|e^{i\psi}$$

$$zw = |z|e^{i\varphi}|w|e^{i\psi} = |z||w|e^{i\varphi}e^{i\psi} = |z||w|(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi+i\sin\psi) =$$

$$= |z||w|\big[(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)\big] =$$

Tedy

$$zw = |z||w|\big[\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big] = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)}\,. \tag{1.12}$$

Současně jsme ukázali, že platí rovnost

$$e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}. \tag{1.13}$$

Odtud indukcí pro každé přirozené n plyne

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}. \tag{1.14}$$

Dělení komplexních čísel v kartézském tvaru pro $w \neq 0$ provádíme tak, že zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli. V goniometrickém a exponenciálním tvaru se dělí moduly a argumenty se odečítají:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}, \quad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) = |w|e^{i\psi},$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{|w|(\cos\psi + i\sin\psi)} = \frac{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi - i\sin\psi)}{|w|(\cos\psi + i\sin\psi)(\cos\psi - i\sin\psi)} =$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\left(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)\right) = \frac{|z|}{|w|}\, e^{i(\varphi-\psi)}\,. \tag{1.15}$$

Moivreova věta

Z Eulerova vztahu

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, \quad \varphi \in \mathbb{R}\,, \tag{1.16}$$

plyne

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)\,; \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)\,. \tag{1.17}$$

Umocníme-li obě strany rovnosti (1.16) na číslo n, dostaneme rovnost

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (e^{i\varphi})^n.$$

Protože $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$, platí tzv. **Moivreova věta:**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi\,, \tag{1.18}$$

Jestliže

$$z = |z|\,e^{i(\varphi+2k\pi)} = |z|(\cos(\varphi+2k\pi) + i\sin(\varphi+2k\pi)),$$

pak pomocí Moivreovy věty dostáváme:

$$\left(\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right)^n =$$

$$= |z|(\cos(\varphi+2k\pi) + i\sin(\varphi+2k\pi)) = z$$

pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,.$

Je tedy přirozené prohlásit každé z n čísel

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\,, \qquad k = 0,\dots,n-1\,, \tag{1.19}$$

za n**-tou odmocninu komplexního čísla** z**.** Povšimněte si, že pro $n = 2$ a reálná $z > 0$ odpovídá $\left(\sqrt[2]{z}\right)_0 = \left(\sqrt{z}\right)_0$ obvyklé definici druhé odmocniny v oboru reálných čísel. Podrobnější rozbor a zdůvodnění definice n-té odmocniny bude dáno ve druhé kapitole při studiu zobrazení v komplexní rovině.

☛ ***Příklad***. Máme najít všechna řešení algebraické rovnice $z^6 - 8 = 0$.

Řešení. Úloha je ekvivalentní s úlohou najít hodnoty všech šestých odmocnin čísla 8. Podle (1.19) je

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_k = \left(\sqrt[6]{8(\cos 0 + i \sin 0)}\right)_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 .$$

Odtud dostáváme hledané odmocniny

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[6]{8}\right)_0 &= \sqrt{2}(\cos 0 &&+ i\sin 0) &&= \sqrt{2},\\
\left(\sqrt[6]{8}\right)_1 &= \sqrt{2}(\cos(\pi/3) &&+ i\sin(\pi/3)) &&= \sqrt{2}(1/2 + i\sqrt{3}/2),\\
\left(\sqrt[6]{8}\right)_2 &= \sqrt{2}(\cos(2\pi/3) &&+ i\sin(2\pi/3)) &&= \sqrt{2}(-1/2 + i\sqrt{3}/2),\\
\left(\sqrt[6]{8}\right)_3 &= \sqrt{2}(\cos\pi &&+ i\sin\pi) &&= -\sqrt{2},\\
\left(\sqrt[6]{8}\right)_4 &= \sqrt{2}(\cos(4\pi/3) &&+ i\sin(4\pi/3)) &&= -\sqrt{2}(1/2 + i\sqrt{3}/2),\\
\left(\sqrt[6]{8}\right)_5 &= \sqrt{2}(\cos(5\pi/3) &&+ i\sin(5\pi/3)) &&= \sqrt{2}(1/2 - i\sqrt{3}/2).
\end{aligned}$$

Řešeními dané rovnice je tedy množina komplexních čísel

$$\left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}.$$

Home
Obsah
Strana 39
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Pro komplexní čísla platí užitečné nerovnosti, které budeme používat v dalším textu. Z definice modulu komplexního čísla plynou nerovnosti

$$-|z| \le \Re z \le |z|, \quad -|z| \le \Im z \le |z|. \tag{1.20}$$

Zřejmě platí

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re(z_1\overline{z}_2), \tag{1.21}$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\Re(z_1\overline{z}_2). \tag{1.22}$$

Z nerovností (1.20) plyne $\Re(z_1\overline{z}_2) \le |z_1||\overline{z}_2|$ a z předchozích dvou nerovností plynou nerovnosti

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||. \tag{1.23}$$

V geometrické interpretaci představují nerovnosti (1.23) známé podmínky pro konstrukci trojúhelníka ze tří zadaných úseček: součet délek dvou stran nemůže být menší než strana třetí a velikost rozdílu délek dvou stran nemůže být větší než strana třetí.

1.2.6 Množiny reálných čísel a jejich vlastnosti

Definice 1. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá

- **shora omezená**, jestliže existuje $H \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí nerovnost $x \leq H$;
- **zdola omezená**, jestliže existuje $D \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí nerovnost $x \geq D$;
- **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

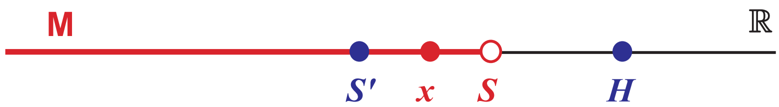
Číslo H se nazývá **horní odhad množiny** M, číslo D se nazývá **dolní odhad množiny** M.

Definice 2. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $S \in \mathbb{R}$, pro které platí:

1. pro každé $x \in M$ je $x \leq S$,
2. pro každé $S' < S$ existuje $x \in M$ takové, že $x > S'$,

se nazývá **supremum množiny** M.

Supremum množiny je tedy její **nejmenší horní odhad.**



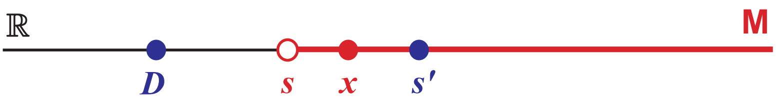
Poznámka. První podmínka říká, že S je horní odhad, druhá podmínka říká, že je ze všech horních odhadů nejmenší, tj. žádné číslo S' menší než supremum není horním odhadem. Supremum S nemusí být prvkem množiny M.

Definice 3. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $s \in \mathbb{R}$, pro které platí

1. pro každé $x \in M$ je $x \geq s$,
2. pro každé $s' > s$ existuje $x \in M$ takové, že $x < s'$,

se nazývá **infimum množiny M.**

Infimum množiny je tedy její **nejmenší horní odhad.**



Poznámka. První podmínka říká, že s je dolní odhad, druhá podmínka říká, že je ze všech dolních odhadů největší, tj. žádné číslo s' větší než infimum není dolním odhadem. Infimum s nemusí být prvkem množiny M.

Věta o supremu a infimu v $\mathbb{R}$

1. Pro každou neprázdnou shora omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ existuje právě jedno supremum $S \in \mathbb{R}$.

2. Pro každou neprázdnou zdola omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ existuje právě jedno infimum $s \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Povšimněme si, že v množině racionálních čísel uvedená věta neplatí. Stačí uvažovat

$$M = \left\{q \in \mathbb{Q}\,;\; q^2 < 2\right\} .$$

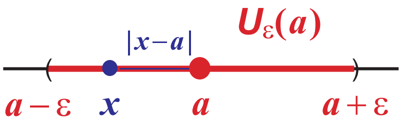
V reálném oboru by bylo supremum $\sqrt{2}$, infimum $-\sqrt{2}$, tato čísla však nejsou racionální.

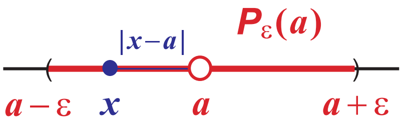
Definice 4. Nechť $\varepsilon > 0$. **Okolím bodu** $a \in \mathbb{R}$ se nazývá množina $U_\varepsilon(a)$ všech bodů $x \in \mathbb{R}$, jejichž vzdálenost od bodu a je menší než ε, tj.

$$U_\varepsilon(a) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ |x - a| < \varepsilon\right\}.$$

Definice 5. Prstencovým okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ se nazývá množina $P_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, tj.

$$P_\varepsilon(a) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ 0 < |x - a| < \varepsilon\right\}.$$





Pro $\varepsilon > 0$ definujeme **okolí bodu** $+\infty$ jako

$$U_\varepsilon(+\infty) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\; x > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{+\infty\}$$

a **okolí bodu** $-\infty$ jako

$$U_\varepsilon(-\infty) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\; x < -\frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{-\infty\}\,.$$

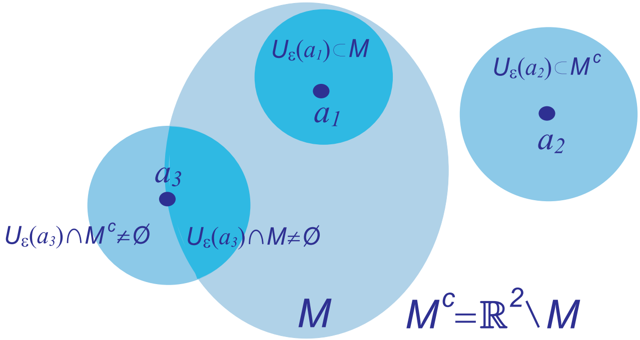
Prstencová okolí se definují bez bodů $\pm\infty$:

$$P_\varepsilon(+\infty) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\; x > \frac{1}{\varepsilon}\right\}\,,$$

$$P_\varepsilon(-\infty) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\; x < -\frac{1}{\varepsilon}\right\}\,.$$

Definice 6. Uvažujme množinu $M \subset \mathbb{R}$. Bod a se nazývá

- **vnitřní bod množiny** M, existuje-li okolí $U_\varepsilon(a) \subset M$.
- **vnější bod množiny** M, existuje-li okolí $U_\varepsilon(a)$ takové, že $U_\varepsilon(a) \cap M = \emptyset$.
- **hraniční bod množiny** M má-li každé jeho okolí $U_\varepsilon(a)$ neprázdný průnik jak s množinou M tak jejím doplňkem $M^C = \mathbb{R} \setminus M$.

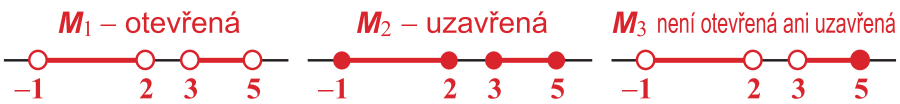


Definice 7. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá

- **otevřená** právě tehdy, když je každý její bod jejím vnitřním bodem.
- **uzavřená** právě tehdy, když je její doplněk $M^C = \mathbb{R} \setminus M$ otevřená množina.

Příklad 1.2.

- $M = (-1, 2) \cup (3, 5)$ je otevřená množina.
- $M = \langle -1, 2\rangle \cup \langle 3, 5\rangle$ je uzavřená množina.
- $M = (-1, 2) \cup (3, 5\rangle$ není otevřená ani uzavřená.



Home
Obsah
Strana 48
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Definice 8. Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá **vnitřek množiny** M a značí se M°.

Definice 9. Uzávěrem množiny M nazýváme doplněk ke vnitřku doplňku množiny M a značíme jej $\overline{M}$, tj. $\overline{M} = \mathbb{R} \setminus \left(\mathbb{R} \setminus M\right)^\circ$.

Definice 10. Hranicí množiny M nazýváme množinu všech jejích hraničních bodů a značíme ji ∂M.

☛ ***Příklad 1.3.***

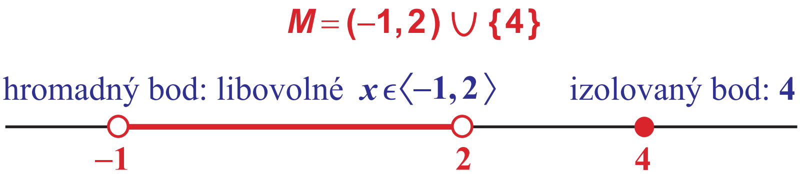
Uvažujme $M = (-1, 2) \cup (3, 5\rangle$.

- $M^\circ = (-1, 2) \cup (3, 5)$,
- $\overline{M} = \langle -1, 2\rangle \cup \langle 3, 5\rangle$,
- $\partial M = \{-1, 2, 3, 5\}$.

Definice 11. Bod x se nazývá

- ➥ **hromadný bod** množiny M právě tehdy, když pro každé jeho prstencové okolí $P_\varepsilon(x)$ je $M \cap P_\varepsilon(x) \neq \emptyset$.
- ➥ **izolovaný bod** množiny M právě tehdy, když existuje prstencové okolí $P_\varepsilon(x)$ takové, že $M \cap P_\varepsilon(x) = \emptyset$.

✒ ***Příklad 1.4.***



Definice 12. Uzavřená a omezená množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá **kompaktní**.

Home
Obsah
Strana 50
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

PŘEDNÁŠKA 2

MATICE

A DETERMINANTY

2.1 Matice – základní pojmy

Matice $\mathbf{A}$ reálných nebo komplexních čísel je zadána tím, že je zadáno $m \times n$ reálných nebo komplexních čísel a_{rs}, kde index r, resp. s probíhá přirozená čísla od 1 do m, resp. od 1 do n. Čísla a_{rs} se nazývají **prvky** matice $\mathbf{A}$. Matici $\mathbf{A}$ s prvky a_{rs} zapisujeme ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

nebo stručněji

$$\mathbf{A} = (a_{rs})_{s=1,\ldots,n}^{r=1,\ldots,m}.$$

Je-li z kontextu jasné, jakých hodnot nabývají indexy r a s, používáme také zápis (a_{rs}). Zápis (2.1) vede k tomu, nazývat index r, resp. s **řádkovým**, resp. **sloupcovým indexem** matice $\mathbf{A}$.

Uspořádanou n-tici, resp. uspořádanou m-tici čísel a_{rs} s konstantním řádkovým indexem r, resp. sloupcovým indexem s nazýváme **r-tým řádkem**, resp. **s-tým sloupcem** matice $\mathbf{A}$.

Uspořádanou dvojici přirozených čísel (m, n), kde m je počet řádků a n je počet sloupců matice $\mathbf{A}$, nazýváme **typem** matice $\mathbf{A}$. Je-li $m = n$, říkáme, že matice $\mathbf{A}$ je **čtvercová**. Je-li $m \neq n$, říkáme, že matice $\mathbf{A}$ je **obdélníková**.

Řádky, resp. sloupce matice $\mathbf{A}$ typu (m, n) můžeme považovat za n-složkové, resp. m složkové aritmetické vektory. Mluvíme proto o nich jako o **řádkových**, resp. **sloupcových vektorech** matice $\mathbf{A}$ a chápeme je jako prvky příslušných vektorových prostorů aritmetických vektorů.

Prvky a_{rr}, $r = 1, 2, \ldots, k$, kde $k = \min\{m, n\}$, nazýváme **diagonálními prvky** matice $\mathbf{A}$. Uspořádanou k-tici čísel $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk})$ nazýváme **diagonálou** matice $\mathbf{A}$. Prvky a_{rs} pro $r < s$ nazýváme **naddiagonálními** a pro $r > s$ **poddiagonálními** prvky matice $\mathbf{A}$.

Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou si **rovny** právě tehdy, když mají obě stejný typ a na stejných místech stejné prvky.

Jsou-li všechny prvky matice $\mathbf{A} = (a_{rs})$ typu (m, n) nulové, pak říkáme, že $\mathbf{A}$ je **nulová matice** a značíme ji $\mathbf{0}_{mn}$, nebo prostě **0**.
Jsou-li všechny nediagonální prvky matice $\mathbf{A}$ nulové, tj. $a_{rs} = 0$ pro $r \neq s$, pak říkáme, že $\mathbf{A}$ je **diagonální matice**. Uvědomme si, že diagonální matice nemusí být čtvercová. Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová diagonální matice a všechny diagonální prvky jsou 1, pak říkáme, že $\mathbf{A}$ je jednotková matice a značíme ji $\mathbf{E}_n$, nebo prostě **E**.
Jsou-li všechny naddiagonální, resp. poddiagonální prvky matice $\mathbf{A}$ nulové, pak říkáme, že matice $\mathbf{A}$ je **dolní**, resp. **horní trojúhelníková**.
Je-li $\mathbf{A} = (a_{rs})$, pak matice $-\mathbf{A} = (-a_{rs})$ se nazývá matice **opačná** k matici $\mathbf{A}$.
Je-li $\mathbf{A} = (a_{rs})$ matice typu (m, n), pak matici $\mathbf{B} = (b_{rs})$ typu (n, m), pro jejíž prvky platí

$$b_{rs} = a_{sr}\,, \quad r = 1, 2, \ldots, n\,,\ s = 1, 2, \ldots, m\,, \tag{2.2}$$

nazýváme **maticí transponovanou** k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $\mathbf{A}^T$.
Matice transponovaná k matici $\mathbf{A}$ tedy vznikne ”překlopením” ma-

tice $\mathbf{A}$ kolem její diagonály. Např. matice transponovaná k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 3, & 1 \\ 5, & 8, & -2 \end{pmatrix}$$

je matice

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2, & 5 \\ 3, & 8 \\ 1, & -2 \end{pmatrix}.$$

Z definičního vztahu (2.2) je vidět, že pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ platí

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}\,.$$

Čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{rs})$ se nazývá **symetrická** právě tehdy, když $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, tj. právě tehdy, když $a_{rs} = a_{sr}$ pro všechna r, s. Příkladem symetrické matice je např. matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 3, & 2 \\ 3, & 0, & -1 \\ 2, & -1, & 5 \end{pmatrix}.$$

Čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{rs})$ se nazývá **antisymetrická** právě tehdy, když $a_{rs} = -a_{sr}$ pro všechna r, s. Pro diagonální prvky pak platí $a_{rr} = -a_{rr}$, a tedy všechny diagonální prvky musí být nulové. Příkladem antisymetrické matice je např.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0, & 3, & 2 \\ -3, & 0, & -1 \\ -2, & 1, & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.1 Lineární operace s maticemi

Definice 1. Sčítání matic. Nechť $\mathbf{A} = (a_{rs}), \mathbf{B} = (b_{rs})$ jsou matice téhož typu (m, n). **Součtem** matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ nazýváme matici $\mathbf{C} = (c_{rs})$ typu (m, n), definovanou vztahem

$$c_{rs} = a_{rs} + b_{rs}\,, \quad r = 1, 2, \ldots, m\,,\; s = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2.3}$$

Součet matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ zapisujeme $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Zřejmě pro

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 3 \\ -1, & 1, & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 1, & -2, & -3 \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3, & 1, & 3 \\ 0, & -1, & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože součet matic je definován vztahem (2.3) pomocí jejich prvků, a tedy čísel, plyne z komutativnosti a asociativnosti sčítání čísel také tatáž vlastnost pro sčítání matic. Tedy, jsou-li $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ matice téhož typu, pak platí rovnosti

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}\,, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}\,. \tag{2.5}$$

Je-li $\mathbf{A}$ libovolná matice typu (m, n), **0** nulová matice téhož typu a $-\mathbf{A}$ matice opačná k matici $\mathbf{A}$, pak platí

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}\,, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{0}\,. \tag{2.7}$$

Snadno se rovněž ověří, že

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T. \tag{2.8}$$

Definice 2. Násobení matice číslem. Je-li $\mathbf{A} = (a_{rs})$ matice typu (m, n) a k je číslo, pak k-**násobkem matice** $\mathbf{A}$ nazýváme matici $\mathbf{C} = (c_{rs})$ téhož typu, pro jejíž prvky platí

$$c_{rs} = k a_{rs}\,, \quad r = 1, 2, \ldots, m\,, \; s = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2.9}$$

Zřejmě pro každou matici $\mathbf{A}$ platí

$$0\mathbf{A} = \mathbf{0}\,, \tag{2.10}$$

$$(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}\,. \tag{2.11}$$

Jsou-li $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ matice téhož typu, k, h čísla, pak

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}\,, \tag{2.12}$$

$$(k + h)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + h\mathbf{A}\,, \tag{2.13}$$

$$k(h\mathbf{A}) = (kh)\mathbf{A}\,, \tag{2.14}$$

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A}\,, \tag{2.15}$$

$$(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T\,. \tag{2.16}$$

2.1.2 Příklad

Ukážeme si použití uvedených rovností při práci s maticemi.

$$36\begin{pmatrix}1, & -1\\ 2, & 4\\ 3, & -6\end{pmatrix} + 18\begin{pmatrix}-2, & 2\\ -4, & -8\\ -6, & 14\end{pmatrix} =$$

$$18\left[2\begin{pmatrix}1, & -1\\ 2, & 4\\ 3, & -6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2, & 2\\ -4, & -8\\ -6, & 14\end{pmatrix}\right] =$$

$$= 18\left[\begin{pmatrix}2, & -2\\ 4, & 8\\ 6, & -12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2, & 2\\ -4, & -8\\ -6, & 14\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0, & 0\\ 0, & 0\\ 0, & 36\end{pmatrix}.$$

2.1.3 Násobení matic

Definice 3. Jsou dány matice $\mathbf{A} = (a_{rs})$ typu (m, p), $\mathbf{B} = (b_{rs})$ typu (p, n). **Součinem matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$** (v tomto pořadí) je matice $\mathbf{C} = (c_{rs})$ typu (m, n), definovaná předpisem

$$c_{rs} = a_{r1}b_{1s} + a_{r2}b_{2s} + \ldots + a_{rp}b_{ps} = \sum_{k=1}^{p} a_{rk}b_{ks} \qquad (2.17)$$

pro všechna $r = 1, 2, \ldots, m$, $s = 1, 2, \ldots, n$. Součin matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ zapisujeme symbolem $\mathbf{AB}$.

Připomeneme-li si definiční vztah skalárního součinu dvou vektorů, vidíme, že prvek c_{rs} součinu $\mathbf{AB}$ dostaneme jako skalární součin r-tého řádku matice $\mathbf{A}$ a s-tého sloupce matice $\mathbf{B}$. Tím je rovněž objasněna podmínka na typy matic, která musí být splněna, aby součin byl definován.

Vlastnosti součinu matic. Je-li **E** jednotková matice a $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ libovolné matice, pak platí

$$\mathbf{E}\mathbf{A} = \mathbf{A}\,, \quad \mathbf{B}\mathbf{E} = \mathbf{B}\,, \tag{2.18}$$

jakmile jsou součiny na levých stranách rovností definovány.

Násobení matic je asociativní, tj. pro každé tři matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ platí

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}\,, \tag{2.19}$$

jakmile je součin definován.

Násobení matic není komutativní. Pro nulovou matici **0** a libovolné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ platí

$$\mathbf{0}\mathbf{A} = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}\,, \tag{2.20}$$

jakmile je součin na levé straně definován.

Jsou-li $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ matice a k číslo, pak platí

$$k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B}\,, \tag{2.21}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}\,, \tag{2.22}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}\,, \tag{2.23}$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\,, \tag{2.24}$$

kdykoliv je alespoň jedna strana rovnosti definována.

Důkazy prvních tří rovností jsou zcela elementární. K důkazu čtvrté rovnosti stačí si zapsat jednotlivé prvky součinů na levé a pravě straně a pak je porovnat.
Součin $\mathbf{AB}$ dvou matic může být nulová matice i když obě matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou nenulové:

☛ ***Příklad***. Máme najít součin matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2, & 1 \\ 2, & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2, & 1 \\ 2, & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Součin dvou nenulových matic tedy může být nulová matice.

☛ ***Příklad***. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 2, & 0 \\ -3, & 4 \end{pmatrix}.$$

Pak součin $\mathbf{AB}$ není definován, protože typ $\mathbf{A}$ je $(2,2)$ a typ $\mathbf{B}$ je $(3,2)$.
Je však definován součin **BA** a platí

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 2, & 0 \\ -3, & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot 3, & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 4 \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 3, & 2\cdot 2 + 0\cdot 4 \\ (-3)\cdot 1 + 4\cdot 3, & (-3)\cdot 2 + 4\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2, & -2 \\ 2, & 4 \\ 9, & 10 \end{pmatrix}.$$

☛ ***Příklad***. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos x, & \sin x \\ \sin x, & -\cos x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\cos x, & \sin x \\ \sin x, & \cos x \end{pmatrix},$$

pro libovolné reálné x. Pak jsou definovány oba součiny $\mathbf{AB}$ i **BA** a platí

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -\cos^2 x + \sin^2 x, & \cos x \sin x + \sin x \cos x \\ -\sin x \cos x - \sin x \cos x, & \sin^2 x - \cos^2 x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos 2x, & \sin 2x \\ -\sin 2x, & -\cos 2x \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -\cos 2x, & -\sin 2x \\ \sin 2x, & -\cos 2x \end{pmatrix}.$$

2.2 Determinanty

2.2.1 Determinant a jeho vlastnosti

Předpokládejme, že **A** je čtvercová matice. Ukážeme, jak lze každé takové matici přiřadit jisté reálné číslo, které budeme nazývat **determinantem** matice **A**. Nejdříve popíšeme základní myšlenku na maticích typu $(2,2)$.

Definice determinantu matice typu (2,2).

Budeme se zabývat soustavou dvou lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 = b_1\,, \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 = b_2\,. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Předpokládejme, že matice této soustavy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}$$

je regulární, tj. že její řádky jsou lineárně nezávislé. Pak můžeme neznámou x_2 vyloučit tak, že násobíme 1. rovnici číslem a_{22}, druhou číslem $(-a_{12})$ a takto upravené obě rovnice sečteme. Dostaneme rovnici

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \,.$$

Protože matice $\mathbf{A}$ je regulární, je číslo $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Můžeme tedy psát

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \,. \tag{2.26}$$

Analogicky vyloučíme-li ze soustavy (2.25) neznámou x_1, dostaneme

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \,. \tag{2.27}$$

Označíme-li

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \,, \tag{2.28}$$

pak zřejmě

$$\det\begin{pmatrix} b_1, & a_{12} \\ b_2, & a_{22} \end{pmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \,,$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}, & b_1 \\ a_{21}, & b_2 \end{pmatrix} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1$$

a vztahy (2.26), (2.27) můžeme psát ve tvaru

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1, & a_{12} \\ b_2, & a_{22} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11}, & b_1 \\ a_{21}, & b_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}}. \tag{2.29}$$

Číslo

$$\det \mathbf{A} = \det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \tag{2.30}$$

nazýváme **determinantem matice A**.

Vlastnosti determinantu matice typu (2,2).

Uvedeme si některé vlastnosti determinantu, jejichž platnost si čtenář snadno ověří sám pomocí definičního vztahu (2.30).

1. **Jestliže matice B vznikla z matice A záměnou řádků nebo sloupců, je** $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

$$\det \begin{pmatrix} a_{21}, & a_{22} \\ a_{11}, & a_{12} \end{pmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$$

$$-\det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}.$$

   Analogicky pro záměnu sloupců.

2. **Má-li matice A obě řádky stejné, je** $\det \mathbf{A} = 0$.

3. **Jestliže matice B vznikla z matice A vynásobením jednoho řádku číslem α, je $\det \mathbf{B} = \alpha \det \mathbf{A}$.**

$$\det \begin{pmatrix} \alpha a_{11}, & \alpha a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} = \alpha a_{11} a_{22} - \alpha a_{21} a_{12} =$$

$$= \alpha(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \alpha \det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}.$$

4. **Má-li matice A jeden řádek nulový, je $\det \mathbf{A} = 0$.**

5. **Platí**

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}, & a_{12} + b_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11}+b_{11})a_{22} - a_{21}(a_{12}+b_{12}) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + (b_{11}a_{22} - a_{21}b_{12}) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}.$$

6. **Jestliže matice B vznikla z matice A přičtením α-násobku jednoho řádku ke druhému, pak $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$.**
Skutečně, podle vlastností 5, 3 a 2 platí

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha a_{21}, & a_{12} + \alpha a_{22} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} + \alpha \det \begin{pmatrix} a_{21}, & a_{22} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} .$$

7. **Determinant součinu matic je součin determinantů těchto matic, tj.** $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$.

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}, & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11}, & a_{21}b_{12} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}, & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}, & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} +$$

$$+ \det\begin{pmatrix} a_{12}b_{21}, & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21}, & a_{21}b_{12} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{12}b_{21}, & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21}, & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= b_{11}b_{12}\det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{11} \\ a_{21}, & a_{21} \end{pmatrix} + b_{11}b_{22}\det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} -$$

$$- b_{12}b_{21}\det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} + b_{21}b_{22}\det\begin{pmatrix} a_{12}, & a_{12} \\ a_{22}, & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Determinant matice typu (3,3).

Než zavedeme determinant libovolné čtvercové matice typu (n, n), podívejme se na determinant matice typu $(3, 3)$. Definujeme

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} = \tag{2.31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \,.$$

Vidíme, že definiční vztah (2.31) obsahuje $3! = 6$ sčítanců, z nichž každý je součinem tří prvků matice, ležících v různých řádkách a různých sloupcích. Když si zapíšeme uspořádané trojice řádkových a sloupcových indexů jednotlivých sčítanců v (2.31), dostaneme 6 permutací základního pořadí $(1, 2, 3)$, a to

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 1, & 2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 2, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 3, & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Je vidět, že k vytvoření 2. a 3. permutace potřebujeme dvě transposice (např. u 2. permutace přesunout 1 za 2 a pak ještě 1 za 3), k vytvoření 4. permutace potřebujeme 3 transposice (přesunout 1 za 2, pak 1 za 3 a pak ještě 2 za 3), k vytvoření posledních dvou permutací stačí vždy jedna transposice. Je-li počet transposic, potřebný k vytvoření příslušné permutace sudý, resp. lichý, mluvíme o sudé, resp. liché permutaci. Pro zápis permutace budeme používat symboliku obvyklou u funkcí. Značí-li např. π druhou permutaci v (2.32), pak je $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 1$, tj. $\pi(j)$ značí číslo, které je v této permutaci π na j-tém místě. Symbolem $\operatorname{zn}(\pi)$ značíme tzv. **znaménko** permutace π, což je 1, když je permutace π sudá, nebo -1, když je permutace π lichá.

Podíváme-li se nyní na znaménka sčítanců v definičním vztahu (2.31), vidíme, že jsou to právě znaménka permutací příslušných sloupcových indexů, jak jsou zapsány v (2.32). Této vlastnosti determinantu matice typu $(3, 3)$ využijeme při definici determinantu libovolné čtvercové matice typu (n, n).

Dříve, než to učiníme, uvedeme ještě jednu mechanickou pomůcky pro výpočet determinantu matice typu $(3, 3)$. Abychom si zapamatovali volbu znaménka u jednotlivých součinů v (2.31), rozepíšeme matici **A** na matici typu $(5, 3)$, resp. $(3, 5)$ tak, že pod ní, resp. za ní připíšeme ještě první a druhý řádek, resp. první a druhý sloupec matice **A**. Dostaneme matice

$$
\left(\begin{array}{ccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\
 & \times & & \times & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \\
 & \times & & \times & \\
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23}
\end{array}\right), \text{resp.} \quad
\left(\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\
 & \searrow & & \times & & \times & & \swarrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\
 & \swarrow & & \times & & \times & & \searrow & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32}
\end{array}\right),
$$

v nichž součiny vytvářené postupem zleva doprava mají znaménko $+$, při postupu zprava doleva znaménko $-$. Tento postup se nazývá **Sarrusovo pravidlo**.

Přerovnáním sčítanců ve vztahu (2.31) a vhodným vytknutím před závorku dostaneme

$$\det \mathbf{A} = a_{11}(a_{22}a_{23} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $\det \mathbf{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$, kde A_{1j} je determinant matice, která vznikne z matice **A** tak, že vynecháme 1. řádku a j-tý sloupec, přičemž takto získaný determinant násobíme ještě číslem $(-1)^{1+j}$. Tuto vlastnost determinantu matice typu $(3, 3)$ nyní zobecníme.

Definice determinantu libovolné čtvercové matice.

Definice 4. Nechť **A** je libovolná čtvercová matice typu (n, n). Pak **determinantem matice A** nazýváme číslo

$$\det \mathbf{A} = \sum \text{zn}\,(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)}\,,$$

kde sčítáme přes všechny permutace π n-tice $(1, 2, \ldots, n)$.

Rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce.

Zvolme pevně řádkový index r a označme $\mathbf{A}_{r1}, \mathbf{A}_{r2}, \ldots, \mathbf{A}_{rn}$ matice, které dostaneme z matice **A** tak, že vynecháme v ní r-tý řádek a postupně $1, 2, \ldots, n$-tý sloupec. Označme nyní

$$A_{rs} = (-1)^{r+s} \det \mathbf{A}_{rs}\,.$$

Toto číslo nazveme **algebraickým doplňkem prvku** a_{rs}. Pak platí

$$\det \mathbf{A} = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \ldots + a_{rn}A_{rn}\,, \quad r = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Říkáme, že jsme **determinant matice A rozvinuli podle r-tého řádku**.

Analogicky se vytváří **rozvoj determinantu matice A podle s-tého sloupce**

$$\det \mathbf{A} = a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + \ldots + a_{ns}A_{ns}\,, \quad s = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Vlastnosti determinantu.

Dá se ukázat, že takto definovaný determinant má všechny vlastnosti 1 až 7, uvedené pro determinant matice typu $(2, 2)$, samozřejmě s formulacemi příslušně modifikovanými.
Snadno se rovněž ukáže, že pro determinant transponované matice $\mathbf{A}^T$ platí

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}\,.$$

Všimněme si ještě, že determinant diagonální, nebo obecněji trojúhelníkové matice je roven součinu diagonálních prvků. Odtud bezprostředně plyne, že **matice A je regulární právě tehdy, když její determinant je nenulový**.

Výpočet determinantu pomocí Gaussovy eliminace.

Vzhledem k tomu, že výpočet determinantu trojúhelníkové matice je velice jednoduchý, používá se i k výpočtu determinantu Gaussova eliminační metoda. Musíme si však uvědomit, že každá výměna řádků představuje změnu znaménka determinantu a každé násobení řádku nenulovým číslem znamená vynásobení determinantu tímto číslem. Používáme-li tedy Gaussovu eliminaci k výpočtu determinantu, musíme si poznamenávat počet výměn řádků a všechny koeficienty, jimiž jsme násobili řádky. Součin diagonálních členů trojúhelníkové matice, kterou jsme Gaussovou eliminací získali, musíme nyní násobit číslem 1 nebo -1 podle toho, zda počet výměn řádků byl sudý nebo lichý, a pak vydělit součinem všech koeficientů, jimiž jsme násobili během eliminace řádky. Takto získané číslo je pak determinant příslušné matice.

Čtenář si jistě uvědomil, že přičtení k danému řádku libovolné lineární kombinace ostatních řádků nemá na hodnotu determinantu žádný vliv, takže tyto úpravy si nemusíme poznamenávat.

☛ ***Příklad***. Vypočítejte determinant matice **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4, & 3, & -3 \\ 3, & 2, & -2 \\ 2, & -1, & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení.
Použijeme Sarrusovo pravidlo.

$$\det \mathbf{A} = 4{\cdot}2{\cdot}5+3{\cdot}(-2){\cdot}2+(-3){\cdot}3{\cdot}(-1)-(-3){\cdot}2{\cdot}2-3{\cdot}3{\cdot}5-4{\cdot}(-2){\cdot}(-1) = -4\,.$$

☛ ***Příklad***.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & 1, & 0, & 0 \\ -1, & 0, & 4, & 0 \\ 0, & 7, & 1, & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení.
Matice je trojúhelníková, takže determinant je součin diagonálních prvků

$$\det \mathbf{A} = 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 = 24\,.$$

☛ ***Příklad***.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0, & -1 \\ 2, & 4, & 0, & -2 \\ 3, & 0, & 1, & 4 \\ -1, & 5, & 0, & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\det \mathbf{A} = 2 \det \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0, & -1 \\ 1, & 2, & 0, & -1 \\ 3, & 0, & 1, & 4 \\ -1, & 5, & 0, & 2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

protože matice má dva stejné řádky.

☛ ***Příklad.***

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\det \mathbf{A} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,.$$

☛ ***Příklad.***

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi\cos\vartheta, & \sin\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\varphi, & \cos\varphi\cos\vartheta, & \cos\varphi\sin\vartheta \\ 0, & -\sin\vartheta, & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Řešení.
Použijeme Sarussovo pravidlo.

$$\det \mathbf{A} = \cos^2\varphi\cos^2\vartheta + \sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \sin^2\varphi\cos^2\vartheta =$$

$$= \cos^2\varphi(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta)+\sin^2\varphi(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta) = \cos^2\varphi+\sin^2\varphi = 1\,.$$

☛ *Příklad*.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 3 & a_1, & 0, & 0, & 0 \\ 4 & 1, & a_2, & 0, & 0 \\ 5 & 0, & 1, & a_3, & 0 \\ 6 & 0, & 0, & 1, & a_4 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

Budeme postupně používat rozvoj podle 1. a posledního řádku

$$\det \mathbf{A} = 2\cdot(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} a_1, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & a_2, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & a_3, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & a_4 \end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+5} \det \begin{pmatrix} 3, & a_1, & 0, & 0 \\ 4, & 1, & a_2, & 0 \\ 5, & 0, & 1, & a_3 \\ 6, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2a_1a_2a_3a_4 + 6\cdot(-1)^{1+4} \det \begin{pmatrix} a_1, & 0, & 0 \\ 1, & a_2, & 0 \\ 0, & 1, & a_3 \end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{4+4} \det \begin{pmatrix} 3, & a_1, & 0 \\ 4, & 1, & a_2 \\ 5, & 0, & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2a_1a_2a_3a_4 - 6a_1a_2a_3 + 5\cdot(-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} a_1, & 0 \\ 1, & a_2 \end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 3, & a_1 \\ 4, & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2a_1a_2a_3a_4 - 6a_1a_2a_3 + 5a_1a_2 - 4a_1 + 3\,.$$

PŘEDNÁŠKA 3

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

3.1 Gaussova eliminační metoda

Připomeňme si nejdříve, jak jsme na střední škole řešili eliminační metodou soustavy lineárních algebraických rovnic.

Budeme řešit soustavu tří rovnic

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0\,, \\
x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 0\,, \\
3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1\,.
\end{array}
\tag{3.1}
$$

Nejdříve vyloučíme ze dvou rovnic neznámou x_1. Nejsnáze to učiníme tak, že (-2) násobek druhé rovnice přičteme k první rovnici a (-3) násobek druhé rovnice přičteme ke třetí rovnici. Dostaneme tak ekvivalentní soustavu

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
 & - & x_2 & - & 7x_3 & = & 0\,, \\
x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 0\,, \\
 & - & x_2 & - & 11x_3 & = & 1\,.
\end{array}
$$

Vyměníme-li první a druhou rovnici, dostaneme

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 0\,, \\ & - & x_2 & - & 7x_3 & = & 0\,, \\ & - & x_2 & - & 11x_3 & = & 1\,. \end{array}$$

Nyní násobíme druhou rovnici číslem -1 a přičteme ke třetí rovnici. Dostaneme ekvivalentní soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 0\,, \\ & & x_2 & + & 7x_3 & = & 0\,, \\ & & & - & 4x_3 & = & 1\,, \end{array} \tag{3.2}$$

jejíž řešení již snadno nalezneme. Je to $x_1 = -3/4, x_2 = 7/4, x_3 = -1/4$. Vzhledem k tomu, že jsme prováděli jen ekvivalentní úpravy soustavy rovnic, mají obě ekvivalentní soustavy (3.1) a (3.2) stejná řešení. Nalezli jsme tedy i řešení zadané soustavy.

Označíme-li

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 4 \\ 3, & 2, & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

můžeme soustavu (3.1) zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,.$$

Matice **A** se nazývá **matice soustavy** (3.1) a vektor **b** se nazývá **vektor pravých stran** soustavy (3.1). Přidáme-li k matici soustavy **A** jako poslední sloupec vektor **b**, dostaneme tzv. **rozšířenou matici soustavy**. Rozšířená matice soustavy (3.1), resp. (3.2) je

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & 4, & 0 \\ 3, & 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{resp.} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 4, & 0 \\ 0, & 1, & 7, & 0 \\ 0, & 0, & -4, & 1 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že matice **C** je horní trojúhelníková matice, kterou dostaneme z matice **B**, provedeme-li na její řádky stejné úpravy jako jsme prováděli na rovnice vyšetřované soustavy. Lze tedy matici **B** převést na horní trojúhelníkovou matici **C** pomocí tří typů elementárních úprav řádek, a to:

- záměna libovolných dvou řádků;
- vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem;
- přičtení libovolného násobku kteréhokoli řádku k jinému řádku.

Analogicky lze provádět tyto tři typy elementárních úprav na sloupcích matice **B** a převést ji tak na dolní trojúhelníkovou matici. Metoda, kterou jsme použili k převodu soustavy (3.1) na (3.2), nebo analogicky matice **B** na matici **C**, je speciálním případem tzv. **Gaussovy eliminační metody**, kterou nyní popíšeme.

Gaussova eliminační metoda

Našim cílem je ukázat, jak lze pomocí elementárních úprav matice $\mathbf{A} = (a_{rs})$ převést tuto matici na horní trojúhelníkovou matici $\mathbf{B} = (b_{rs})$ téhož typu takovou, že jakmile je diagonální prvek $b_{kk} = 0$, pak je $b_{rs} = 0$ pro všechny indexy $r \geq k$ a všechny s. Takto získaná matice má jeden z těchto tří tvarů:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12}, & \cdots, & b_{1m}, & \cdots, & b_{1n} \\ 0, & b_{22}, & \cdots, & b_{2m}, & \cdots, & b_{2n} \\ \cdots & & & & & \\ 0, & 0, & \cdots, & b_{mm}, & \cdots, & b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12}, & \cdots, & b_{1n} \\ 0, & b_{22}, & \cdots, & b_{2n} \\ \cdots & & & \\ 0, & 0, & \cdots, & b_{nn} \\ 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ \cdots & & & \\ 0, & 0, & \cdots, & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12}, & \cdots, & b_{1k}, & \cdots, & b_{1n} \\ 0, & b_{22}, & \cdots, & b_{2k}, & \cdots, & b_{2n} \\ \ldots & & & & & \\ 0, & 0, & \cdots, & b_{kk}, & \cdots, & b_{kn} \\ 0, & 0, & \cdots, & 0, & \cdots, & 0 \\ \ldots & & & & & \\ 0, & 0, & \cdots, & 0, & \cdots, & 0 \end{pmatrix},$$

kde všechny vypsané diagonální prvky jsou nenulové.

Je-li matice **A** nulová, má již požadovaný tvar. Předpokládáme tedy, že matice **A** má alespoň jeden nenulový prvek. Označme jej a_{rs}. Pak výměnou prvního a r-tého řádku a prvního a s-tého sloupce dostaneme matici, která má na místě $(1,1)$ nenulový prvek a_{rs}. Můžeme tedy předpokládat, že upravujeme matici **A** takovou, že $a_{11} \neq 0$.

V prvním kroku vynulujeme všechny prvky prvního sloupce ležící pod a_{11}. Je-li např. $a_{i1} \neq 0\,,\ i = 2, 3, \ldots, m$, pak přičtením $(-a_{i1}/a_{11})$-násobku prvního řádku k i-tému řádku dostaneme na místě $(i,1)$ nulu.

V druhém kroku stejným postupem vynulujeme všechny prvky druhého sloupce počínaje prvkem s řádkovým indexem 3.
Opakováním tohoto postupu dospějeme k matici mající jeden z uvedených tří tvaru.
Prvek, který používáme k nulování části sloupce pod diagonálou, se nazývá **klíčový prvek**.
Musíme si uvědomit, že výsledná matice závisí na volbě pořadí, v němž jsme aplikovali jednotlivé elementární úpravy, a tedy není zadanou maticí **A** jednoznačně určena.

☛ ***Příklad***. Gaussovou eliminační metodou převedeme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & -4, & 3, & 1, & 0 \\ 1, & -2, & 1, & -4, & 2 \\ 0, & 1, & -1, & 3, & 1 \\ 4, & -7, & 4, & -4, & 5 \end{pmatrix}$$

na horní trojúhelníkovou matici.

Řešení. Prvek na místě $(1, 1)$ je nenulový, takže bychom mohli začít eliminaci rovnou. Avšak pro nulování prvku $a_{21} = 1$ bychom museli první řádek násobit zlomkem $-\frac{1}{2}$, a tomu se můžeme vyhnout tím, že vyměníme první a druhý řádek, čímž dostaneme klíčový prvek 1. V takto získané matici

$$\begin{pmatrix} 1, & -2, & 1, & -4, & 2 \\ 2, & -4, & 3, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & -1, & 3, & 1 \\ 4, & -7, & 4, & -4, & 5 \end{pmatrix}$$

vynulujeme první prvek druhého, resp. čtvrtého řádku tak, že k němu přičteme (-2)-násobek, resp. (-4)-násobek prvního řádku.

Dostaneme tak matici

$$\begin{pmatrix} 1, & -2, & 1, & -4, & 2 \\ 0, & 0, & 1, & 9, & -4 \\ 0, & 1, & -1, & 3, & 1 \\ 0, & 1, & 0, & 12, & -3 \end{pmatrix},$$

jejíž 1. sloupce má již požadovaný tvar. Tato matice má na místě $(2, 2)$ nulu, takže vyměníme 2. a 3. řádek. V takto získané matici stačí ke 4. řádku přičíst (-1)-násobek 2. řádku, abychom dostali matici

$$\begin{pmatrix} 1, & -2, & 1, & -4, & 2 \\ 0, & 1, & -1, & 3, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 9, & -4 \\ 0, & 0, & 1, & 9, & -4 \end{pmatrix},$$

s upravenými dvěma sloupci. Přičteme-li ještě (-1)-násobek třetího řádku ke čtvrtému řádku, dostaneme hledanou horní trojúhelníkovou matici

$$
\begin{pmatrix}
1, & -2, & 1, & -4, & 2 \\
0, & 1, & -1, & 3, & 1 \\
0, & 0, & 1, & 9, & -4 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0
\end{pmatrix}.
$$

Je to matice typu B_3, jak jsme je popsali v předchozím odstavci.

☛ ***Příklad***. Gaussovou eliminační metodou převedeme matici

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
1, & 2, & 3, & 4, & 2 \\
3, & 6, & 2, & 11, & 3 \\
3, & 6, & 3, & 4, & 8 \\
1, & 4, & 5, & 1, & 4
\end{pmatrix}
$$

na horní trojúhelníkovou matici.

Řešení. Ke 2. a 3. řádku přičteme (-3)-násobek 1. řádku a ke čtvrtému řádku přičteme (-1)-násobek 1. řádku. Dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 2 \\ 0, & 0, & -7, & -1, & -3 \\ 0, & 0, & -6, & -8, & 2 \\ 0, & 2, & 2, & -3, & 2 \end{pmatrix}.$$

V ní stačí nyní vyměnit 2. a 4. řádek, abychom dostali matici se dvěma upravenými sloupci

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 2 \\ 0, & 2, & 2, & -3, & 2 \\ 0, & 0, & -6, & -8, & 2 \\ 0, & 0, & -7, & -1, & -3 \end{pmatrix}.$$

Abychom se – podobně jako v předchozím příkladě – vyhnuli počítání se zlomky, zvolíme za klíčový prvek číslo -1, ležící v místě $(4,4)$. Musíme proto vyměnit 3. a 4. sloupec a 3. a 4. řádek. V této matici

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 4, & 3, & 2 \\ 0, & 2, & -3, & 2, & 2 \\ 0, & 0, & -1, & -7, & -3 \\ 0, & 0, & -8, & -6, & 2 \end{pmatrix}$$

přičteme ke 4. řádku (-8)-násobek třetího řádku a dostaneme hledanou horní trojúhelníkovou matici

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 4, & 3, & 2 \\ 0, & 2, & -3, & 2, & 2 \\ 0, & 0, & -1, & -7, & -3 \\ 0, & 0, & 0, & 50, & 26 \end{pmatrix}$$

typu $\mathbf{B}_2$.

3.2 Soustavy lineárních rovnic – teorie

Nechť a_{rs}, b_r pro $r = 1, 2, \ldots, m$, $s = 1, 2, \ldots, n$ jsou reálná nebo komplexní čísla. Budeme se zabývat **soustavou** m **lineárních algebraických rovnic o** n **neznámých**

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1\,, \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2\,, \\
\ldots & & & & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\,.
\end{array}
\tag{3.3}
$$

Řešením soustavy (3.3) budeme nazývat každou uspořádanou n-tici $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ čísel takovou, že po dosazení u_i za x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, do soustavy (3.3) dostaneme identity.

Soustavu (3.3) zapisujeme obvykle v maticovém tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{3.4}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matice **A** se nazývá **matice soustavy** (3.3), vektor **b** se nazývá **vektorem pravých stran** a vektor **x** se nazývá **vektorem neznámých**, nebo také značně nepřesně, ale výstižně **vektorem řešení** soustavy (3.3). Říkáme, že soustava (3.3) je **homogenní** právě tehdy, když vektor **b** jejich pravých stran je nulový. V opačném případě říkáme, že soustava (3.3) je **nehomogenní**. Matice $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ se nazývá **rozšířená matice soustavy** (3.3).

Aritmetické vektory **x** a **b** zde zapisujeme někdy jako řádkové vektory, jindy jako sloupcové vektory a chápeme je jako matice typu $(1, n)$ nebo typu $(n, 1)$. Rozdíl mezi interpretací aritmetického vektoru jako řádkového nebo sloupcového hraje roli pouze v případě, kdy jím násobíme jinou matici. Ze souvislosti bude vždy patrné, o který typ vektoru v dané situaci jde.

Říkáme, že dvě soustavy lineárních algebraických rovnic jsou **ekvivalentní** právě tehdy, když mají obě stejné množiny řešení. Příkladem ekvivalentních soustav lineárních rovnic jsou např. soustavy

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 1\,, \\ x_1 & - & 2x_2 & = & 4\,, \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & x_2 & = & 5\,, \\ x_1 & + & 3x_2 & = & -3\,, \end{array}$$

mající právě jedno řešení $(6/5, -7/5)$, nebo soustavy

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 1\,, \\ 4x_1 & + & 2x_2 & = & 2\,, \end{array} \qquad 2x_1 + x_2 = 1\,,$$

jejichž řešením je každá uspořádaná dvojice $(r, 1 - 2r)$ pro každé číslo r.

Každé dvě soustavy lineárních rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{3.6}$$

takové, že rozšířená matice $(\mathbf{C}, \mathbf{d})$ vznikla z rozšířené matice $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ nějakými elementárními řádkovými úpravami, jsou ekvivalentní. Při řádkových úpravách totiž měníme v podstatě jen pořadí rovnic a to nemá na řešení vliv. Zcela jiná situace nastane, zaměníme-li sloupce matice **A**. Každá záměna sloupců totiž představuje záměnu příslušných složek řešení. Vyměníme-li např. 1. a 2. sloupec matice **A**, změní se vektor řešení tak, že se v něm vymění 1. a 2. složka. Násobení s-tého sloupce číslem k znamená dělení s-té složky řešení číslem k. To znamená, že při přechodu od soustavy (3.5) k soustavě (3.6) pomocí sloupcových elementárních úprav se obecně množina řešení nezachovává.

☛ ***Příklad***. Máme ukázat, že dané dvě soustavy jsou ekvivalentní:

1.

$$\begin{aligned} 3x + y &= -1, \\ 2x + y &= 2. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 13, \\ x + y &= 5. \end{aligned}$$

Řešení. Obě soustavy mají právě jedno řešení $(-3, 8)$.

2.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 4, \\ 6x - 4y &= 7. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 12x + 4y &= 3, \\ 9x + 3y &= 2. \end{aligned}$$

Řešení. Obě soustavy mají prázdnou množinu řešení.

3.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 10, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 10, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Řešení. Obě soustavy se liší pouze pořadím 2. a 3. rovnice. (Jiná argumentace: obě soustavy mají prázdnou množinu řešení.)

3.3 Homogenní soustava lineárních rovnic

3.3.1 Vlastnosti řešení homogenní soustavy

Budeme se zabývat homogenní soustavou m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n &= 0\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n &= 0\,, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots \ + a_{mn}x_n &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Tuto soustavu budeme zapisovat ve tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}\,. \tag{3.8}$$

Homogenní soustava (3.7) má vždy alespoň jedno řešení, a to tzv. **triviální řešení** $\mathbf{o} = (0, 0, \dots, 0)$. Je-li matice **A** regulární, pak soustava (3.7) nemá kromě triviálního řešení žádné jiné řešení.

Skutečně, je-li **u** libovolné řešení, tj. $\mathbf{Au} = \mathbf{o}$, pak

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Au} = \mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{o} = \mathbf{o}\,,$$

a tedy **u** musí být triviální.

Je-li matice **A** singulární, pak soustava (3.7) má nekonečně mnoho řešení. Označíme-li h hodnost matice **A**, pak soustavu (3.7) můžeme Gaussovou eliminací převést na tvar

$$\begin{aligned} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \;\dots\; + c_{1h}y_h + c_{1h+1}y_{h+1} + \;\dots\; + c_{1n}y_n &= 0\,,\\ c_{22}y_2 + \;\dots\; + c_{2h}y_h + c_{2h+1}y_{h+1} + \;\dots\; + c_{2n}y_n &= 0\,,\\ &\dots\\ c_{mh}y_h + c_{mh+1}y_{h+1} + \;\dots\; + c_{mn}y_n &= 0\,, \end{aligned} \tag{3.9}$$

kde vektor $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ je vhodnou permutací vektoru neznámých $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, vzniklou případnými výměnami sloupců matice **A** během Gaussovy eliminace.

Je-li $h = n$, má soustava (3.7) pouze triviální řešení, jak jsme ukázali již výše.

Je-li $h < n$, pak za neznámé $y_{h+1}, y_{h+2}, \dots, y_n$ můžeme dosadit libovolných $n-h$ čísel $r_{h+1}, r_{h+2}, \dots, r_n$. Soustava (3.9) pak přejde v nehomogenní soustavu

$$\begin{aligned} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ \dots \ + c_{1h}y_h &= \ -c_{1h+1}y_{h+1} - \ \dots \ - c_{1n}y_n \,, \\ c_{22}y_2 + \ \dots \ + c_{2h}y_h &= -c_{2h+1}y_{h+1} - \ \dots \ - c_{2n}y_n \,, \\ \dots \\ c_{mh}y_h &= -c_{mh+1}y_{h+1} - \ \dots \ - c_{mn}y_n \,, \end{aligned} \tag{3.10}$$

s trojúhelníkovou maticí. Tato soustava je ekvivalentní se soustavou (3.7) (až případně na pořadí složek vektorů řešení, vyvolaných výměnami sloupců při Gaussově eliminaci) a její řešení nalezneme již snadno tzv. **zpětným chodem**. Z poslední rovnice vypočítáme y_h, dosadíme do předposlední a vypočítáme y_{h-1}, atd., až z 1. rovnice vypočítáme y_1.
Snadno se ověří, že množina všech řešení homogenní soustavy tvoří vektorový prostor, podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$ nebo **C**^{n}. Skutečně, jsou-li **u**, **v** dvě řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$, tj. $\mathbf{Au} = \mathbf{o}$, $\mathbf{Av} = \mathbf{o}$, pak pro každou jejich lineární kombinaci $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ platí

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \mathbf{A}\alpha\mathbf{u} + \mathbf{A}\beta\mathbf{v} = \alpha\mathbf{A}\mathbf{u} + \beta\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{o} \,,$$

a tedy i vektor $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ je řešením soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$.

Snadno se ukáže, že tento vektorový prostor všech řešení soustavy má dimenzi $n-h$, kde n je počet neznámých a h je hodnost matice **A**. Za jeho bázi můžeme zvolit $n-h$ lineárně nezávislých řešení soustavy (3.10), které dostaneme tak, že za čísla $r_{h+1}, r_{h+2}, \ldots, r_n$ zvolíme složky vektorů standardní báze prostoru $\mathbb{R}^{n-h}$ (nebo $\mathbf{C}^{n-h}$)

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)\,,\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)\,,\ \ldots\,,\ \mathbf{e}_{n-h} = (0, 0, \ldots, 1)\,.$$

3.4 Nehomogenní soustava lineárních rovnic

Budeme se zabývat nehomogenní soustavou m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1\,, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2\,, \\ & & & \dots & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m\,, \end{array} \tag{3.11}$$

kde alespoň jedno z čísel b_j je nenulové. Tuto soustavu můžeme zapsat ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,. \tag{3.12}$$

Nehomogenní soustava (3.12) na rozdíl od homogenní soustavy

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o} \tag{3.13}$$

nemusí mít vždy řešení. Nutnou a postačující podmínku existence řešení soustavy (3.11) udává následující tvrzení, známé pod názvem **Frobeniova věta**.

Věta (Frobeniova) *Soustava (3.11) má řešení právě tehdy, když její matice* **A** *a rozšířená matice* $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ *mají stejnou hodnost.*

Důkaz. Důkaz této věty je celkem názorný. Označíme-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ sloupce matice **A**, pak soustavu (3.11) můžeme psát ve tvaru

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}\,.$$

Podle definice řešení je vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ řešením soustavy (3.11) právě tehdy, když po dosazení u_i za $x_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$, dostaneme identitu, tj. právě tehdy, když platí

$$u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + \ldots + u_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}\,.$$

To však nastává právě tehdy, když vektor **b** je lineární kombinací sloupců matice **A**, tj. právě tehdy, když matice **A** a $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ mají stejnou hodnost.

3.4.1 Nehomogenní soustavy s regulární maticí, Cramerovo pravidlo

Je-li matice **A** nehomogenní soustavy

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.14}$$

regulární, pak homogenní soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$ má pouze triviální řešení, a tedy nehomogenní soustava má právě jedno řešení **u**. Pro toto řešení platí

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}\,.$$

Vynásobíme-li tuto rovnost inverzní maticí $\mathbf{A}^{-1}$ zleva, dostaneme

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\,. \tag{3.15}$$

Vyjádříme-li inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ pomocí algebraických doplňků, dostaneme

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{21}, & \cdots, & A_{n1} \\ A_{12}, & A_{22}, & \cdots, & A_{n2} \\ & \cdots & & \\ A_{1n}, & A_{2n}, & \cdots, & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Odtud pro r-tou složku u_r, $r = 1, 2, \ldots, n$, dostáváme

$$u_r = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(b_1 A_{1r} + b_2 A_{2r} + \ldots + b_n A_{nr}), \quad r = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.17}$$

Součet v závorce je však rozvoj determinantu matice $\mathbf{B}_r$ podle r-tého sloupce, kde matice $\mathbf{B}_r$ vznikne z matice **A** tak, že její r-tý sloupce nehradíme vektorem **b** pravých stran. Můžeme tedy rovnost (3.17) psát ve tvaru

$$u_r = \frac{\det \mathbf{B}_r}{\det \mathbf{A}}, \quad r = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.18}$$

Rovnost (3.18) je známá pod názvem **Cramerovo pravidlo**.

PŘEDNÁŠKA 4

POSLOUPNOSTI

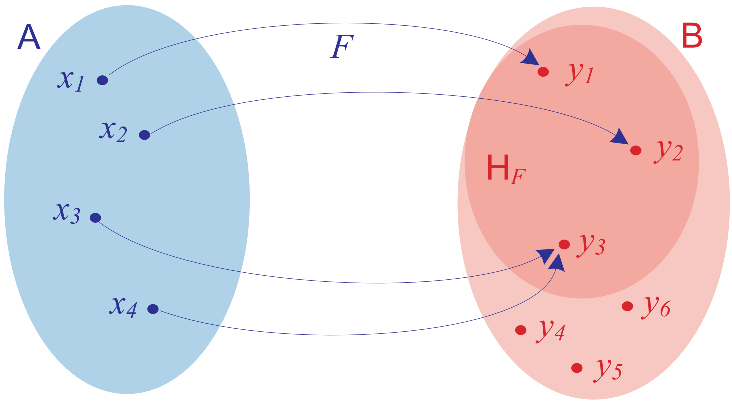
4.1 Zobrazení

Definice 1. Uvažujme libovolné neprázdné množiny A, B. **Zobrazení množiny A do množiny B** je definováno jako množina F uspořádaných dvojic $(x, y) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, kde ke každému prvku $x \in \mathbf{A}$ existuje **právě jeden** prvek $y \in \mathbf{B}$, pro který je $(x, y) \in F$.

Prvku x se říká **vzor** prvku y, prvku y se říká **obraz** prvku x v zobrazení F; rovněž se používá vyjádření, že y je **hodnota zobrazení** F v bodě x a píše se $y = F(x)$ nebo $x \mapsto F(x)$. Množina **A** se nazývá **definiční obor zobrazení** F a označuje také symbolem $\mathbf{D}(F)$ či $\mathbf{D}_F$. Množina všech obrazů v zobrazení F se nazývá **obor hodnot zobrazení** F a označuje se $\mathbf{H}(F)$ či $\mathbf{H}_F$; platí: $\mathbf{H}(F) \subset \mathbf{B}$.

Symbolicky se zobrazení F množiny **A** do množiny **B** zapisuje takto:

$$F: \mathbf{A} \to \mathbf{B}, \quad \mathbf{D}(F) = \mathbf{A}$$

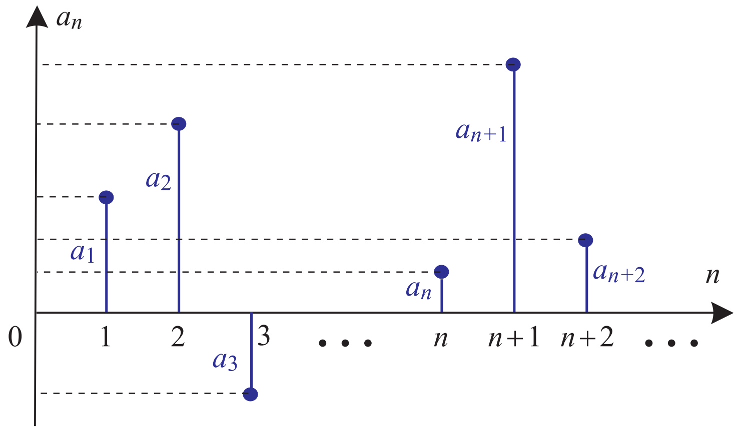


4.2 Posloupnost reálných čísel

4.2.1 Pojem posloupnosti

Definice 2. Posloupností nazýváme zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$.

Posloupnost tedy přiřazuje každému $n \in \mathbb{N}$ právě jeden prvek $f(n) \in \mathbb{R}$, který se nazývá **člen posloupnosti** a obvykle se značí a_n. Celou posloupnost budeme značit (a_n). Grafem posloupnosti jsou izolované body:



☛ *Příklad 4.1.*

Aritmetická posloupnost je definována předpisem

$$a_1 \in \mathbb{R}\,, \qquad a_n = a_1 + (n-1)d\,,$$

kde $a_1\,, d$ jsou daná reálná čísla.

Pro členy aritmetické posloupnosti platí: $a_{n+1} - a_n = d\,.$
Číslo d se nazývá **diference aritmetické posloupnosti.**

Matematickou indukcí lze dokázat, že pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti platí:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\,d\,.$$

Také lze uvažovat:

$$\begin{array}{rcl}
s_n & = & a_1 \quad + (a_1 + d) \ + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) \\
s_n & = & a_n \quad + (a_n - d) \ + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d) \\
\hline
2s_n & = & (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)
\end{array}$$

$$\Longrightarrow 2s_n = n(a_1 + a_n) \Longrightarrow s_n = \tfrac{1}{2}n(a_1 + a_n)$$

☛ *Příklad 4.2.*

Geometrická posloupnost je definována předpisem

$$a_1 \in \mathbb{R}\,, \qquad a_n = a_1 q^{n-1}\,,$$

kde a_1 , q jsou daná reálná čísla.

Je-li $a_1 q \neq 0$, platí mezi dvěma po sobě jdoucími členy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q\,.$$

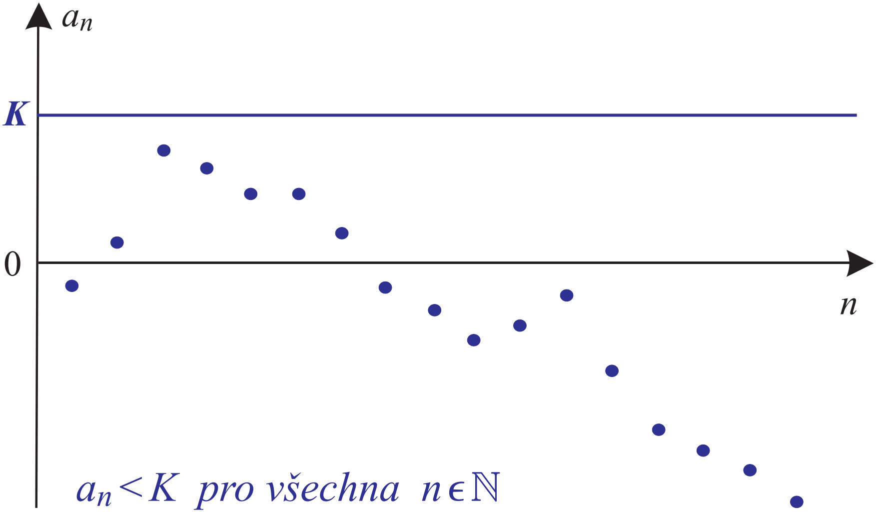
Tento poměr se nazývá **kvocient geometrické posloupnosti.**

Matematickou indukcí lze dokázat, že pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti platí:

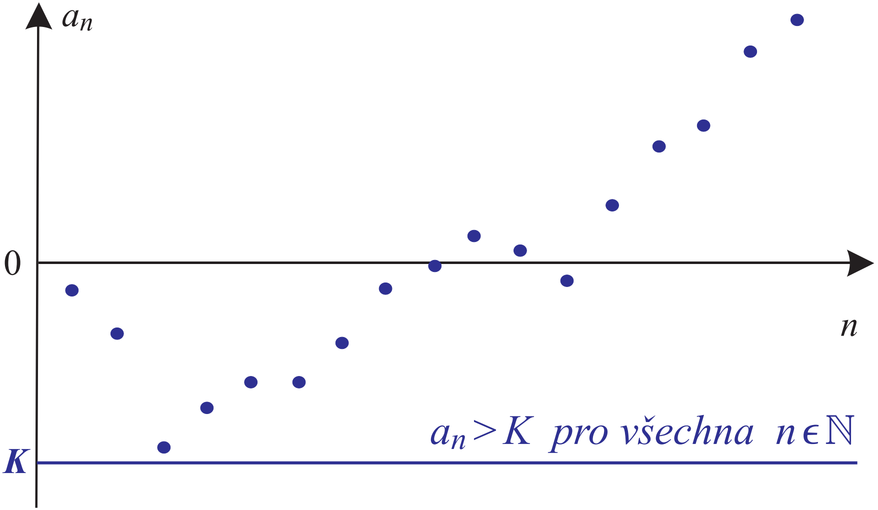
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right) = \begin{cases} a_1\,\dfrac{q^n - 1}{q - 1} & \text{pro } \; q \neq 1, \\[2ex] n a_1 & \text{pro } \; q = 1. \end{cases}$$

4.2.2 Vlastnosti posloupností

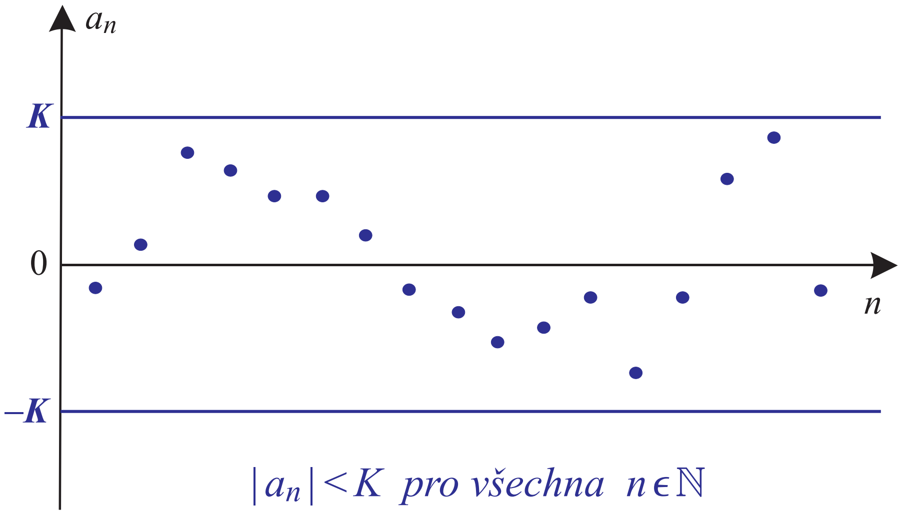
Definice 3. Řekneme, že posloupnost (a_n) je **shora omezená**, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leq K$.



Definice 4. Řekneme, že posloupnost (a_n) je **zdola omezená**, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geq K$.



Definice 5. Řekneme, že posloupnost (a_n) je **omezená**, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $|a_n| \leq K$.



Home
Obsah
Strana 119
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

☛ *Příklad 4.3.*

Pro $d > 0$ je aritmetická posloupnost zdola omezená číslem a_1, ale není omezená shora, a tedy není ani omezená

☛ *Příklad 4.4.*

Pro $a_1 \neq 0$ a $q < -1$ není geometrická posloupnost omezená ani shora, ani zdola. Pro $|q| \leq 1$ je geometrická posloupnost omezená. Stačí zvolit $K = \left|a_1\right|$.

Definice 6. Posloupnost (a_n) se nazývá

- **rostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n < a_{n+1}$,
- **klesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n > a_{n+1}$,
- **neklesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leq a_{n+1}$,
- **nerostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geq a_{n+1}$.

Posloupnost, která splňuje jednu z výše uvedených podmínek, se nazývá **monotónní.** Je-li rostoucí nebo klesající, nazývá se též **ryze monotónní.**

Příklad 4.5.

Nechť je dána posloupnost (a_n), kde $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Členy posloupnosti: $1\,,\ -\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ -\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ -\frac{1}{6}\,,\ \dots$.
Posloupnost není monotonní, je omezená např. číslem 1.

Definice 7. Nechť je dána posloupnost (a_n) a rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n), tj.

$$k_n \in \mathbb{N} \qquad \text{a} \qquad k_n < k_{n+1}\,.$$

Posloupnost (b_n), pro jejíž členy platí $b_n = a_{k_n}$, nazveme **vybranou posloupností** z posloupnosti (a_n).

☛ *Příklad 4.6.*

Posloupnost (b_n) definovaná vztahem

$$b_n = \frac{(-1)^{n^2+1}}{n^2}$$

je vybraná z posloupnosti (a_n), kde

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

V tomto případě je $k_n = n^2$ $(b_1 = 1 = a_1;\ b_2 = -\frac{1}{4} = a_4\ \ldots)$.

☛ *Příklad 4.7.*

Posloupnost (c_n), kde $c_n = \dfrac{1}{n^2}$, není vybraná z posloupnosti (a_n), kde

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

protože neexistuje rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n) tak, aby $a_{k_n} = c_n = \frac{1}{n^2} \quad (c_1 = 1 = a_1;\ c_2 = \frac{1}{4},\ a_4 = -\frac{1}{4})$.

☛ *Příklad 4.8.*

Posloupnost (d_n), jejíž členy jsou postupně

$$1\,,\ -\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ -\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{7}\,,\ \frac{1}{9}\,,\ -\frac{1}{6}\,,\ \frac{1}{11}\,,\ \dots$$

také není vybranou posloupností z posloupnosti (a_n), přestože množina členů obou těchto posloupností je stejná. Lze sice najít posloupnost přirozených čísel (k_n) tak, aby $d_n = a_{k_n}$, ale tato posloupnost není rostoucí.

4.2.3 Algebraické operace

Násobení posloupnosti (a_n) **reálným číslem** $c \in \mathbb{R}$ definujeme jako posloupnost, jejíž n–tý člen je ca_n, tj. jako posloupnost

$$c(a_n) = (ca_n) \, .$$

Součet posloupností (a_n) **a** (b_n) je definován předpisem

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \, .$$

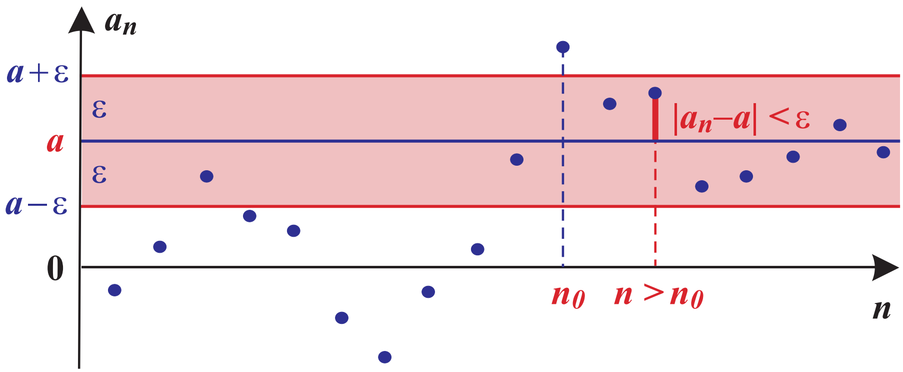
Součin posloupností (a_n) **a** (b_n) je definován předpisem

$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n) \, .$$

Je-li $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je **podíl posloupností** (a_n) **a** (b_n) definován jako

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n} \right) \, .$$

Definice 8. Řekneme, že posloupnost (a_n) má **limitu** $a \in \mathbb{R}$ (**vlastní limitu**), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n > n_0$ platí nerovnost $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$. Výrok posloupnost (a_n) má limitu a zapisujeme jako $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.



☛ *Příklad 4.9.*

Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+4}{n^3+n+1} = 0$.

Řešení. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Z nerovnosti

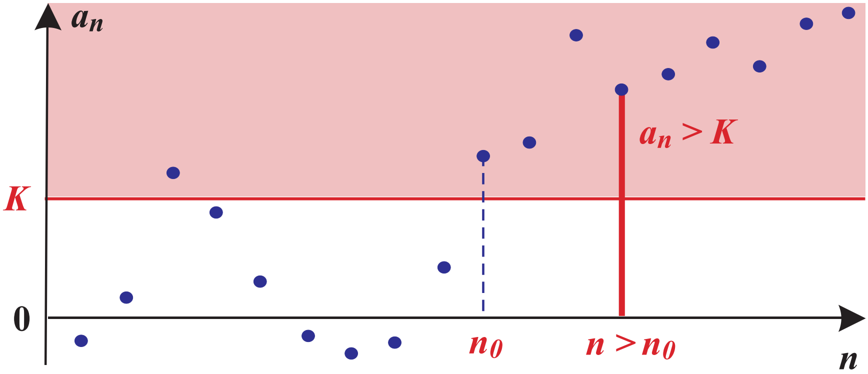
$$\frac{n+4}{n^3+n+1} < \frac{5n^2}{n^3} = \frac{5}{n}$$

plyne, že pokud zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\dfrac{5}{n_0} < \varepsilon$, bude pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, splněna nerovnost

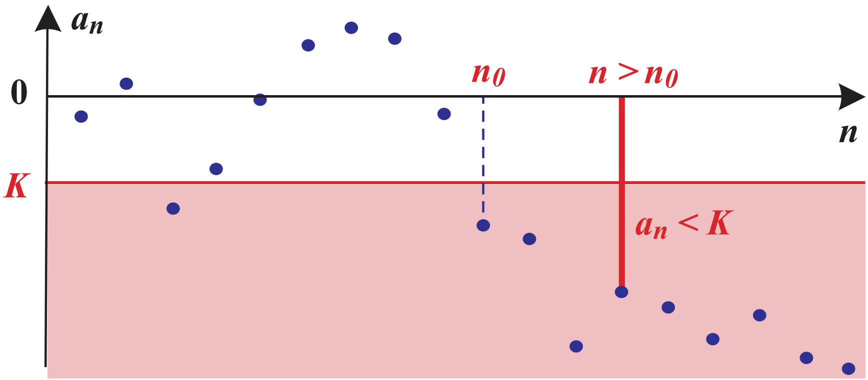
$$\left|\frac{n+4}{n^3+n+1} - 0\right| = \frac{n+4}{n^3+n+1} < \frac{5}{n} < \frac{5}{n_0} < \varepsilon\,.$$

Tedy stačí zvolit $n_0 = \left[\dfrac{5}{\varepsilon}\right] + 1$, kde $[x]$ je tzv. celá část reálného čísla x, která je pro každé $x \in \mathbb{R}$ definována jako jediné celé číslo, pro které platí nerovnosti $[x] \le x < [x] + 1$.

Definice 9. Řekneme, že posloupnost (a_n) má **nevlastní limitu** $+\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ je $a_n > K$.



Definice 10. Řekneme, že posloupnost (a_n) má **nevlastní limitu** $-\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ je $a_n < K$.



Věta. *Posloupnost (a_n) má limitu a (vlastní nebo nevlastní) právě tehdy, když mimo každé okolí $U_\varepsilon(a)$ leží pouze konečný počet členů posloupnosti (a_n).*

Důkaz. Nechť je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ a $U_\varepsilon(a)$ je libovolné okolí bodu a. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, existuje k tomuto $\varepsilon > 0$ index n_0 takový, že pro každé $n > n_0$ je $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$. Ale to je tvrzení, že pro každé $n > n_0$ leží všechny body a_n uvnitř okolí $U_\varepsilon(a)$. Tedy mimo množinu $U_\varepsilon(a)$ mohou ležet pouze body $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$, což je konečná množina.
Nechť naopak pro každé okolí $U_\varepsilon(a)$ leží mimo toto okolí pouze konečný počet členů posloupnosti (a_n). Je-li dáno $\varepsilon > 0$, leží podle předpokladu mimi okolí $U_\varepsilon(a)$ pouze konečná množina členů posloupnosti. Označme tuto množinu M a zvolme $n_0 = \max\limits_{a_n \in M} n$. Protože je množina M konečná, toto maximum existuje a pro každé $n > n_0$ je $a_n \in U_\varepsilon(a)$, což znamená, že $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$.
Případ nevlastních limit se dokáže obdobně. $\square$

Věta. *Posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Nechť má posloupnost (a_n) dvě limity a a b, $a \neq b$. Vyberme disjunktní okolí $U_{\varepsilon_1}(a)$ bodu a a $U_{\varepsilon_2}(b)$ bodu b, tj. $U_{\varepsilon_1}(a) \cap U_{\varepsilon_2}(b) = \emptyset$. Jestliže $a \neq b$, taková okolí vždy existují. Například pro $a,\ b \in \mathbb{R}$ lze zvolit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{|a-b|}{3} > 0$. Protože a je limitou posloupnosti (a_n) existuje index n_1 takový, že pro všechna $n > n_1$ je $a_n \in U_{\varepsilon_1}(a)$. Podobně protože b je limitou posloupnosti (a_n) existuje index n_2 takový, že pro všechna $n > n_2$ je $a_n \in U_{\varepsilon_2}(b)$. Nechť $n > \max(n_1, n_2)$. Pak je $a_n \in U_{\varepsilon_1}(a)$ a také $a_n \in U_{\varepsilon_2}(b)$. Ale z toho plyne, že $a_n \in U_{\varepsilon_1}(a) \cap U_{\varepsilon_2}(b) = \emptyset$. Ale to je spor. Tedy předpoklad $a \neq b$ vede ke sporu. Proto musí pro každé dvě limity posloupnosti (a_n) platit $a = b$. $\square$

Definice 11. Jestliže posloupnost (a_n) má vlastní limitu, nazýváme ji **konvergentní**. Jestliže posloupnost (a_n) má nevlastní limitu nebo limitu nemá, nazýváme ji **divergentní**.

Věta. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Důkaz. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon = 1$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $a - 1 < a_n < a + 1$. Označme $K = \max\bigl(a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, a + 1\bigr)$ a $L = \min\bigl(a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, a - 1\bigr)$. Protože se jedná o konečné množiny, taková K a L existují. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $L \leq a_n \leq K$. $\square$

Věta. *Nechť posloupnosti* (a_n) *a* (b_n) *konvergují,* $c \in \mathbb{R}$*. Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$*.*

Pak konvergují také posloupnosti

$$(ca_n)\,,\ (a_n + b_n)\,,\ (a_n \cdot b_n)$$

a platí

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = ca\,,\quad (a_n + b_n) = a + b\,,\quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = ab\,.$$

Jestliže je navíc $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$*, pak konverguje i posloupnost* $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ *a platí*

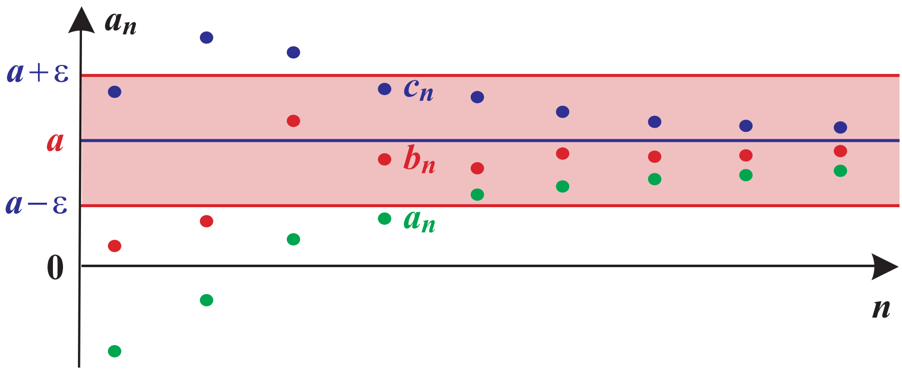
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}\,.$$

Věta. *Jsou-li posloupnosti* (a_n) *a* (b_n) *konvergentní a pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \le b_n$*, je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$*.*

Důkaz. Nechť je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ a $a > b$. Pak je $\dfrac{a-b}{2} > 0$. K tomuto ε existují n_a a n_b taková, že pro každé $n > n_a$ je $a - \varepsilon = \dfrac{a+b}{2} < a_n$ a pro každé $n > n_b$ je $b_n < b + \varepsilon = \dfrac{a+b}{2}$. Tedy pro $n > \max(n_a, n_b)$ platí $b_n < \dfrac{a+b}{2} < a_n$, což je spor. $\square$

Poznámka: Pro limity a a b může platit $a = b$ i v případě, kdy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < b_n$; například $a_n = 0$ a $b_n = \dfrac{1}{n}$.

Věta. *Nechť pro členy posloupností (a_n), (b_n) a (c_n) platí $a_n \le b_n \le c_n$ a existují limity $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. Pak existuje také limita posloupnosti (b_n) a platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.*



Důkaz. V případě, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$, je tvrzení zřejmé. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existují n_a a n_c taková, že pro každé $n > n_a$ je $a - \varepsilon < a_n$ a pro všechna $n > n_b$ je $c_n < a + \varepsilon$. Tedy pro všechna $n > n_0 = \max(n_a, n_b)$ platí nerovnosti $a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon$. $\square$

Home
Obsah
Strana 134
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Věta. *Pro posloupnost* (a_n) *je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *právě tehdy, když* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$*.*

Důkaz. Tvrzení je zcela zřejmé z definice limity. $\square$

Věta. *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a posloupnost* (b_n) *je omezená. Pak je* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$*.*

Důkaz. Protože $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ je také $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Protože je posloupnost (b_n) omezená, existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $-K \leq b_n \leq K$. Tvrzení věty plyne ze zřejmé nerovnosti $-K|a_n| \leq |a_n b_n| \leq K|a_n|$ a z toho, že $\lim_{n\to\infty} K|a_n| = 0$. $\square$

☛ *Příklad 4.10.*

Najděte limitu posloupnosti $a_n = \dfrac{2^{\cos n}}{n + \sin n!}$.

Řešení: $a_n = b_n \cdot c_n$, kde $b_n = \dfrac{1}{n}$ a $c_n = \dfrac{2^{\cos n}}{1 + \bigl(\sin n!\bigr)/n}$. $\lim b_n = 0$; $|\cos n| \le 1 \Rightarrow 2^{\cos n} \le 2$; $\bigl|\sin n!\bigr| \le 1$, proto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n!}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{\sin n!}{n}\right) = 1$. Posloupnost $\left(c_n\right)$ je omezená a podle předchozí věty je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta. *Je-li posloupnost* (a_n) *neklesající, resp. nerostoucí, existuje její limita (vlastní nebo nevlastní) a platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n\,, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n\,.$$

Poznámka: Tvrzení této věty lze shrnout tak, že monotonní posloupnosti mají vždy limitu, která je rovna supremu pro neklesající posloupnosti a infimu pro posloupnosti nerostoucí.

Pomocí uvedené věty lze ukázat, že platí důležité vztahy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \quad \text{obecněji} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \mathrm{e}^k$$

Důkaz. Pro neklesající posloupnosti (pro nerostoucí anal.):
Nechť je (a_n) neklesající posloupnost, tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $a_n \leq a_{n+1}$. Jestliže není posloupnost (a_n) omezená, musíme dokázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Nechť je dáno $K \in \mathbb{R}$. Protože posloupnost (a_n) není shora omezená, existuje index n_0 takový, že $a_{n_0} > K$. Ale protože je posloupnost neklesající, platí pro každé $n > n_0$ nerovnost $K < a_{n_0} \leq a_n$.
Nyní předpokládejme, že je neklesající posloupnost (a_n) shora omezená. Pak existuje $\sup\{a_n\,;\ n \in \mathbb{N}\} = a \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že toto a je limitou posloupnosti (a_n). Z první vlastnosti suprema plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \leq a$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Z druhé vlastnosti suprema pak plyne, že existuje index n_0 takový, že $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$. Protože je posloupnost neklesající, platí pro každé $n > n_0$ nerovnost $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a$. $\square$

Definice 12. Posloupnost (a_n) se nazývá **cauchyovská**, jestliže splňuje **Cauchy–Bolzanovu podmínku**:
Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každá m, n, kde $m > n_0$ a $n > n_0$, platí $\left|a_m - a_n\right| < \varepsilon$.

Věta. *Posloupnost (a_n) konverguje právě tehdy, když je cauchyovská.*

Věta. *Nechť je (b_n) posloupnost vybraná z posloupnosti (a_n) a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pak je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.*

Důkaz. Pro každé $\varepsilon > 0$ (nebo $K \in \mathbb{R}$) stačí zvolit $n_0 = k_{n_0}$.

✒ *Příklad 4.11.*

Dokažte, že $a_n = (-1)^n$ nemá limitu.

Řešení. Pro $n = 2k$ dostaneme vybranou posloupnost $b_k = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ s limitou 1, pro $n = 2k + 1$ vybranou posloupnost $b_k = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$ s limitou -1.

☛ ***Příklad 4.12.***

Dokažte, že posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$ nemá limitu.

Řešení. Pro sudá $n = 2k$ dostaneme vybranou posloupnost $b_k = a_{2k} = (1 + \frac{1}{2k})^{2k}$. To je posloupnost vybraná z posloupnosti $(1 + \frac{1}{n})^n$. Proto je $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = e$. Pro lichá $n = 2k - 1$ dostaneme vybranou posloupnost

$$c_k = a_{2k-1} = \left(1 - \frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1},$$

což je vybraná posloupnost z posloupnosti $(1 - \frac{1}{n})^n$. Protože všechny členy této posloupnosti jsou menší než 1, nemůže být její limita rovna $e > 1$. Ve skutečnosti je $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = e^{-1}$. Protože posloupnost a_n obsahuje dvě posloupnosti, které nemají stejnou limitu, neexistuje ani limita posloupnosti (a_n).

Definice 13. Bod $a \in \mathbb{R}^*$ se nazývá **hromadným bodem** posloupnosti (a_n) právě tehdy, když existuje vybraná posloupnost (b_n) taková, že $a = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Věta. *Bod a je hromadným bodem posloupnosti (a_n) právě tehdy, když pro každé okolí $U_\varepsilon(a)$ existuje nekonečná množina indexů $N_a \subset \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in N_a$ je $a_n \in U_\varepsilon(a)$.*

Důkaz. Je to vlastně jen jinak přepsaná definice hromadného bodu posloupnosti. □

☛ ***Příklad 4.13.***

Pro posloupnost $a_n = (-1)^n$ jsou hromadné body 1 a -1, neboť

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1, \qquad \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} (-1) = -1.$$

☛ *Příklad 4.14.*

Najděte všechny hromadné body posloupnosti

$$a_n = \frac{(n+1)^2 + (-1)^n n^2}{n^2 + n + 1} \cdot \cos \frac{2\pi}{3}\, n\,.$$

Řešení. $a_n = b_n \cdot c_n$, kde

$$b_n = \frac{(n+1)^2 + (-1)^n n^2}{n^2 + n + 1}, \qquad c_n = \cos \tfrac{2}{\pi} 3\, n\,.$$

Ani jedna z těchto posloupností nemá limitu.

$$b_{2k} = \frac{8k^2 + 4k + 1}{4k^2 + 6k + 1} \to 2, \qquad b_{2k-1} = \frac{4k - 1}{4k^2 - 2k + 1} \to 0\,.$$

Protože posloupnost c_n je omezená, je $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = 0$.

Home
Obsah
Strana 142
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Uvažujme

$$a_{2k} = \frac{8k^2 + 4k + 1}{4k^2 + 6k + 1} \cdot \cos \tfrac{4\pi}{3}\, k;$$

$\cos \frac{4\pi}{3}\, k$ nabývá hodnot 1 pro $k = 3m$, $-\frac{1}{2}$ pro $k = 3m \pm 1$. Tedy z posloupnosti (a_{2k}) lze vybrat posloupnosti (a_{6k}), která má limitu 2 a $(a_{6k\pm 2})$, která má limitu -1. Hromadné body posloupnosti (a_n) jsou tedy -1, 0 a 2.

☛ *Příklad 4.15.*

Najděte všechny hromadné body posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}, \dots .$$

Řešení. Tato posloupnost obsahuje všechna racionální čísla z intervalu $(0, 1)$, tj. čísla $\dfrac{p}{q}$, kde $0 < p < q$ jsou přirozená nesoudělná čísla, a to každé dokonce nekonečně krát. Protože každé reálné číslo lze s libovolnou přesností aproximovat posloupností racionálních čísel, je množina hromadných bodů posloupnosti (a_n) celý interval $\langle 0, 1\rangle$.

Definice 14. Nechť je M množina všech hromadných bodů posloupnosti (a_n). Číslo $S = \sup M$, resp. $s = \inf M$ se nazývá **limes superior**, resp. **limes inferior**, posloupnosti (a_n) a značí se $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, resp. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

☛ ***Příklad 4.16.***

Pro posloupnost $a_n = (-1)^n$ je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-1)^n = 1, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}(-1)^n = -1$$

Věta. *Posloupnost (a_n) má limitu tehdy a jen tehdy, když*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n\,.$$

Věta. *Množina M je kompaktní právě tehdy, pokud lze z každé posloupnosti (a_n) takové, že $a_n \in M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, vybrat konvergentní posloupnost, jejíž limita leží v M.*

PŘEDNÁŠKA 5

ČÍSELNÉ ŘADY

5.1 Pojem číselné řady

Definice 1. Nechť je dána posloupnost (a_n). Posloupnost (s_n), kde $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, se nazývá **posloupnost částečných součtů** posloupnosti (a_n).

Existuje-li $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, pak s nazveme **součtem řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**.

Je-li (s_n) divergentní, nazýváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **divergentní**.

Je-li $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, říkáme, že řada **diverguje k** $\pm\infty$.

☛ ***Příklad 5.1.***

(a) Řada $1 + 1 + 1 + \cdots$ diverguje k $+\infty$, neboť

$$s_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-krát}} = n\,, \qquad \lim_{n\to\infty} n = +\infty\,.$$

(b) Řada $(-1) + (-1) + (-1) + \cdots$ diverguje k $-\infty$, neboť

$$s_n = \underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{n\text{-krát}} = -n, \qquad \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty.$$

(c) Řada $1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$ diverguje (v tomto případě se též říká, že osciluje), neboť částečné součty tvoří posloupnost $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots,$ která nemá limitu.

☛ Příklad 5.2.

Uvažujme geometrickou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} + \cdots \ , \qquad a_1 \neq 0\,, \quad q \neq 1\,.$$

Pro $q \neq 1$ je posloupnost částečných součtů dána vztahem:

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \ .$$

(a) Je-li $q > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$, řada diverguje k $\pm\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & \text{pro} \quad a_1 > 0\,, \\ -\infty & \text{pro} \quad a_1 < 0\,. \end{cases}$$

(b) Je-li $|q| < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = a_1 \dfrac{1}{1-q}$, řada konverguje.

(c) Je-li $q \leq -1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ neexistuje a řada diverguje.

☛ *Příklad 5.3.*

Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} .$$

Protože platí:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} ,$$

je

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} ,$$

tedy $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, řada konverguje.

☛ *Příklad 5.4.*

Řada

$$(1+(-1))+(1+(-1))+(1+(-1))+\cdots$$

konverguje, její součet je roven 0 $(a_n = (1+(-1)) = 0)$.

Vynecháme-li však závorky, získáme řadu divergentní:

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots$$

Neboli naopak, přidáním vhodných závorek jsme z divergentní řady získali řadu konvergentní.

Následující věta říká, že součet řady se přidáním závorek nezmění, je-li řada konvergentní či diverguje-li k $\pm\infty$.

Věta. *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, *kde* s *může být i* $+\infty$ *nebo* $-\infty$, *a* $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ *je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom je*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots \\ \cdots + (a_{k_2+1} + a_{k_2+2} + \cdots + a_{k_3}) = s\,.$$

Věta. *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ *jsou konvergentní řady,* $c, A, B \in \mathbb{R}$. *Potom je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cs\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (A a_n + B b_n) = As + Bt\,.$$

Nutná podmínka konvergence řady:

Věta. *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Důkaz. Označme $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Protože řada konverguje, existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Protože $a_n = s_n - s_{n-1}$, je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = s - s = 0\,.$$

Poznámka. Pozor, věta říká, že z konvergence řady plyne nulová limita posloupnosti jejích členů, avšak z nulové limity obecně neplyne konvergence řady!

☛ Příklad 5.5.

Vyšetřujme konvergenci tzv. harmonické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \cdots$$

$$s_2 \geq \tfrac{1}{2}\,, \quad s_{2^2} \geq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{2}\,, \quad s_{2^3} \geq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}\,,$$
$$s_{2^4} \geq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{2}\,, \ \ldots, s_{2^n} \geq \tfrac{n}{2}\,, \ \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = +\infty \ .$$

Vybraná posloupnost (s_{2^n}) z posloupnosti částečných součtů (s_n) diverguje k $+\infty$. Protože posloupnost (s_n) je rostoucí, $s_n = s_{n-1} + \frac{1}{n} > s_{n-1}$, její limita existuje, a to konečná nebo $+\infty$, a je rovna limitě jakékoli vybrané posloupnosti. Tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Řada tedy diverguje k $+\infty$, i když je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

☚ *Příklad 5.6.*

Vyšetřujme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Řešení. Zřejmě

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty \quad \text{pro} \quad n \to \infty,$$

takže $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Řada diverguje k $+\infty$.

☚ *Příklad 5.7.*

Vyšetřujme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n = 1-2+3-4+5-\cdots$.

Řešení. Máme $s_1 = 1, s_2 = -1, s_3 = 2, s_4 = -2, s_5 = 3, \cdots$.
Zřejmě $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, takže řada diverguje.

5.2 Řady s nezápornými členy

Věta (srovnávací kritérium konvergence řad).
Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí nerovnost $0 \leq a_n \leq b_n$, pak

- *z konvergence řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *plyne konvergence* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,
- *z divergence řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *plyne divergence* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

☛ ***Příklad 5.8.***

Vyšetřujme konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $(n+1)^2 > n(n+1)$, a tedy $0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$. Řada vpravo konverguje (viz výše), takže podle srovnávacího kritéria konverguje též vyšetřovaná řada.

Věta (odmocninové kritérium).
Jestliže existuje n_0 *takové, že pro všechna* $n > n_0$ *je*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1\,,$$

pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*
Jestliže pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ *existuje* $n > n_0$ *takové, že*

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1\,,$$

pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta (limitní odmocninové kritérium).
Nechť $a_n \geq 0$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = q$. *Je-li* $q < 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje;* *je-li* $q > 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta (podílové kritérium).

Nechť je $a_n > 0$*. Jestliže existuje* n_0 *takové, že pro všechna* $n > n_0$ *je*

$$0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1\,,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Jestliže existuje n_0 *takové, že pro všechna* $n > n_0$ *je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta (limitní podílové kritérium).

Nechť $a_n > 0$ *a existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Je-li $q < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, je-li* $q > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta (Raabeho kritérium).
Nechť $a_n > 0$ *a existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = s$. *Je-li* $s > 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, a je-li* $s < 1$ *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

5.3 Alternující řady

Věta (Leibnizovo kritérium pro alternující řady).
Nechť $a_n \geq 0$ *je monotonní posloupnost, pro kterou platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Pak je řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *konvergentní.*

☛ ***Příklad***

Podle Leibnizova kritéria konverguje například řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Věta. *Jestliže konverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

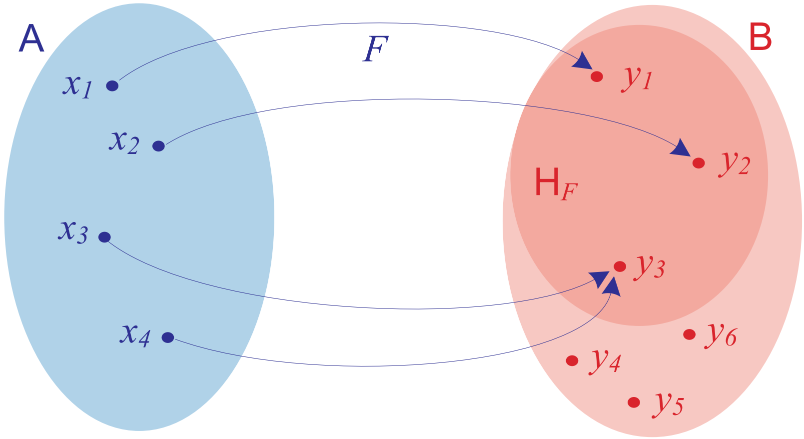
Definice 2. Jestliže je konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, nazývá se řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolutně konvergentní**.

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergentní, nazývá se řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **neabsolutně konvergentní**.

PŘEDNÁŠKA 6

FUNKCE

6.1 Pojem zobrazení a funkce



Uvažujme libovolné neprázdné množiny **A**, **B**. Přiřadíme-li každému prvku $x \in$ **A** **právě jeden** prvek $y \in$ **B**, dostáváme množinu F uspořádaných dvojic $(x, y) \in$ **A** $\times$ **B**, která se nazývá **zobrazení množiny A do množiny B**.

Prvku x se říká **vzor** prvku y, prvku y se říká **obraz** prvku x v zobrazení F; rovněž se používá vyjádření, že y je **hodnota zobrazení** F v bodě x a píše se $y = F(x)$ nebo $x \mapsto F(x)$. Množina **A** se nazývá **definiční obor zobrazení** F a označuje také symbolem $\mathbf{D}(F)$ či $\mathbf{D}_F$. Množina všech obrazů v zobrazení F se nazývá **obor hodnot zobrazení** F a označuje se $\mathbf{H}(F)$ či $\mathbf{H}_F$; platí: $\mathbf{H}(F) \subset \mathbf{B}$. Symbolicky se zobrazení F množiny **A** do množiny **B** zapisuje takto:

$$F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}, \quad \mathbf{D}(F) = \mathbf{A}$$

Speciální případy zobrazení F množiny A do množiny B

- **Zobrazení v množině A** nebo **zobrazení množiny A do sebe** je zobrazení F, kde **A** $=$ **B**.

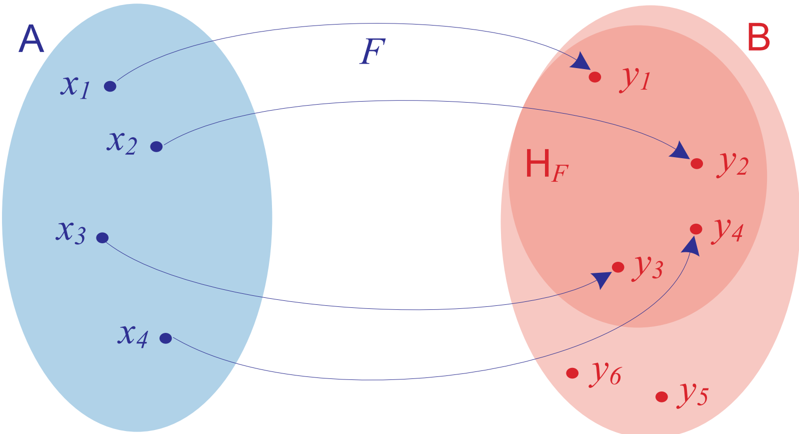
  Sem patří:

  - **Reálná funkce jedné reálné proměnné** je zobrazení v množině všech reálných čísel **R**, tj.

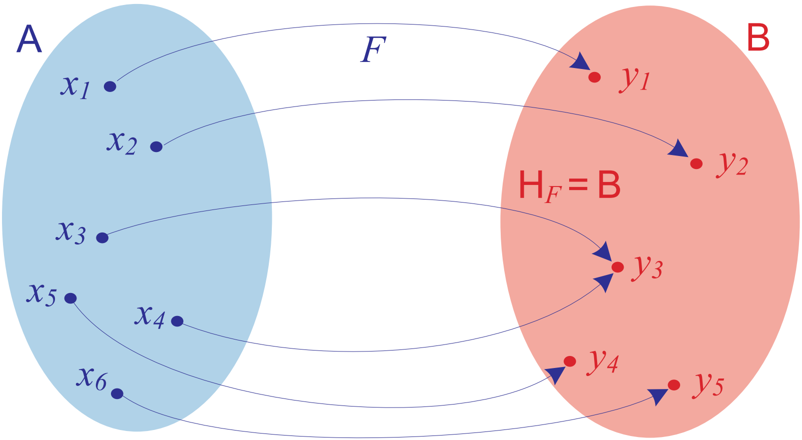
    $$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbb{R}.$$

  - **Geometrická zobrazení v rovině a v prostoru**, kde **A**, **B** jsou množiny bodů v téže rovině, popř. v prostoru.

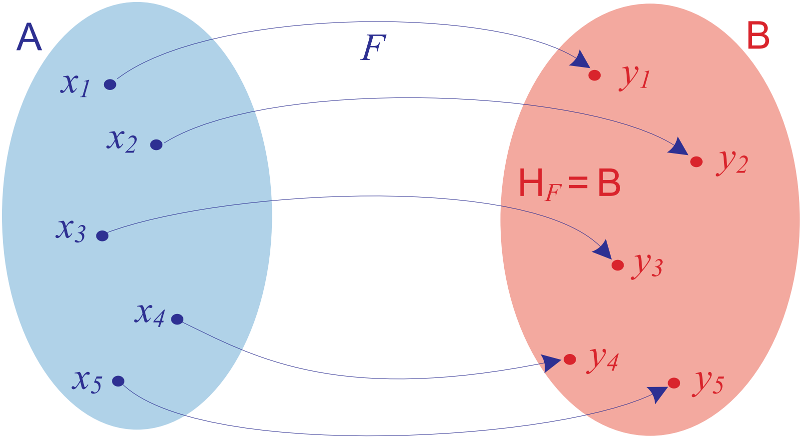
➥ **Prosté zobrazení** je takové zobrazení F, ve kterém je každý prvek $y \in \mathbf{H}(F)$ obrazem **právě jednoho** prvku $x \in \mathbf{A} = \mathbf{D}(F)$, neboli **každé dva různé vzory** x_1, x_2 **mají také různé obrazy** $F(x_1), F(x_2)$.



➥ **Zobrazení množiny A na množinu B** je takové zobrazení F, ve kterém je každý prvek množiny **B** obrazem aspoň jednoho prvku množiny **A**, tj. **B** $=$ **H**(F).

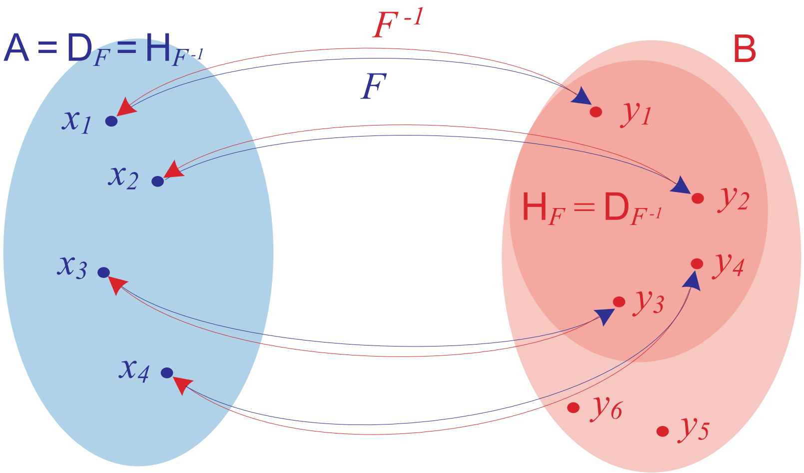


➥ **Vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami A**, **B** je **prosté zobrazení množiny A na množinu B**.



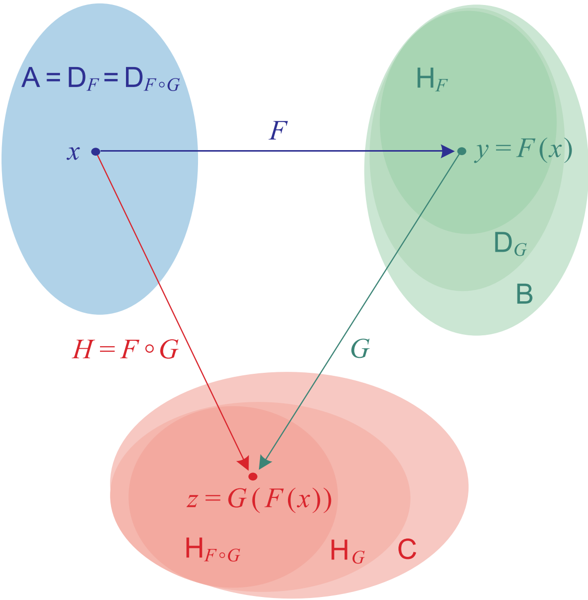
Je-li dané zobrazení F **prosté**, pak k němu existuje právě jedno prosté zobrazení, které ke každému prvku $y \in \mathbf{H}(F)$ přiřazuje jeho vzor $x \in \mathbf{D}(F)$; toto zobrazení se nazývá **inverzní zobrazení k zobrazení F** a značí se symbolem F^{-1}. Platí: $\mathbf{D}(F^{-1}) = \mathbf{H}(F)$, $\mathbf{H}(F^{-1}) = \mathbf{D}(F)$,

$$x = F^{-1}(y) \text{ právě když } y = F(x)$$



Home
Obsah
Strana 167
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Nechť G a F jsou dvě zobrazení, pro která je $\mathbf{H}_F \subset \mathbf{D}_G$. Zobrazení H se nazývá **kompozicí zobrazení F a G**, je-li $H(x) = G(F(x))$ pro všechna $x \in \mathbf{D}_F$. Kompozice zobrazení F a G (v tomto pořadí) se symbolicky zapisuje $H = F \circ G$.



6.2 Reálná funkce jedné reálné proměnné

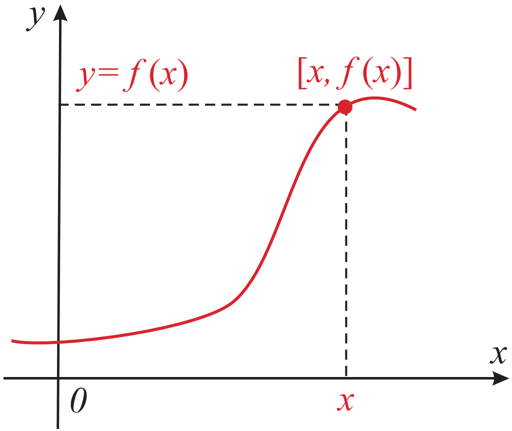
Jak je uvedeno v předchozí části, **reálnou funkcí jedné reálné proměnné** se rozumí zobrazení v množině všech reálných čísel **R**; reálnou funkci budeme zpravidla značit f, vzor x se nazývá **proměnná** nebo **argument funkce** f, obraz y se nazývá **funkční hodnota** nebo **hodnota funkce** f v bodě x a značí se $f(x)$.

Názornou představu o vlastnostech funkce poskytuje její **grafické vyjádření** neboli **graf funkce**, který sestrojíme takto:

V rovině zvolíme pravoúhlou soustavu souřadnic s počátkem O a osami x, y. Pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ přiřadíme v této rovině každé uspořádané dvojici reálných čísel $[x, f(x)]$ bod, který má (v uvedeném pořadí) souřadnice $(x, f(x))$. Množina všech takových bodů roviny se nazývá **graf funkce** f :

$$\text{graf } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbf{D}(f),\ y = f(x)\}$$

Obsahuje-li definiční obor $\mathbf{D}(f)$ konečný počet hodnot argumentu x, můžeme sestrojit celý graf přesně, bod po bodu. Obsahuje-li však definiční obor dané funkce nekonečně mnoho hodnot, je nutné graf přibližně dokreslit. Ke správnému nakreslení grafu jsou nezbytné znalosti různých vlastností funkce. Proto se v následujícím podíváme na základní elementární funkce a u každé z nich si připomeneme její **analytické zadání**, tj. **vzorec** či rovnici tvaru $y = f(x)$, kde $f(x)$ je výraz s proměnnou x, a příslušné **grafické zobrazení**.



Home
Obsah
Strana 170
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

6.2.1 Vlastnosti a druhy funkcí

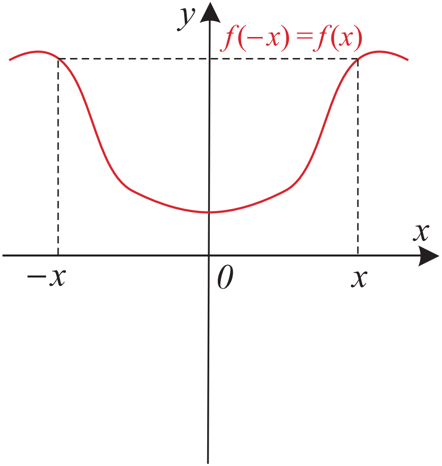
Některé funkce mají určité společné vlastnosti, podle kterých je nazýváme. Nejdůležitější z nich jsou následující:

- **Funkce sudé a liché**
  Nechť má funkce f takovou vlastnost, že pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je také $-x \in \mathbf{D}(f)$

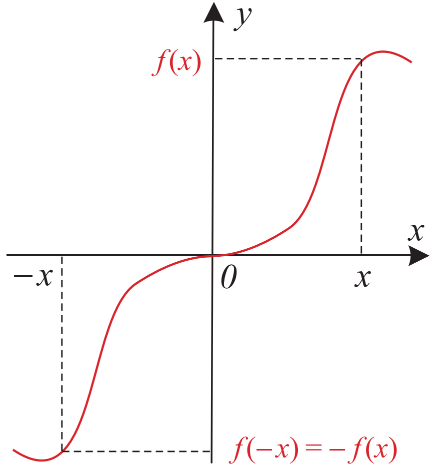
  - Funkce f se nazývá **sudá funkce**, právě když pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je $f(-x) = f(x)$.
  - Funkce f se nazývá **lichá funkce**, právě když pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je $f(-x) = -f(x)$.

  (Funkce samozřejmě nemusí splňovat ani jednu z podmínek, tedy nemusí být ani sudá, ani lichá.)

Funkce sudá:

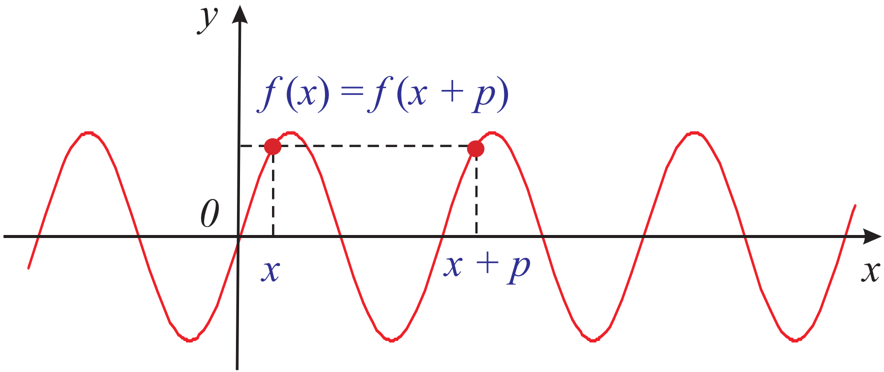


Funkce lichá:



➥ Funkce periodické

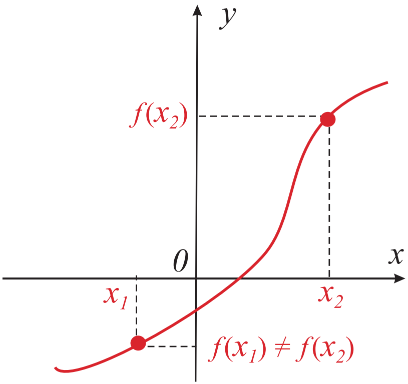
Funkce f se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové reálné číslo $p \neq 0$, že pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ je také $x \pm p \in \mathbf{D}(f)$ a platí: $f(x \pm p) = f(x)$.



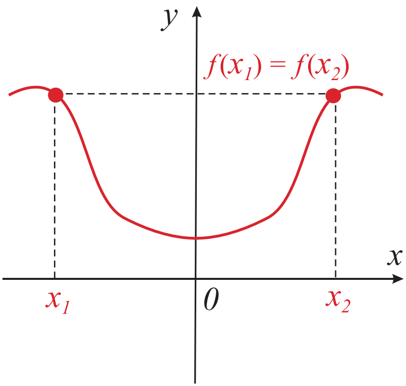
➥ Funkce prosté a funkce k nim inverzní

Protože funkce je speciálním případem zobrazení, použije se pro ni stejná definice jako pro prosté zobrazení a zobrazení k němu inverzní.

Funkce f se nazývá **prostá,** jestliže pro každé dva různé body $x_1\,, x_2 \in \mathbf{D}_f\,, x_1 \neq x_2$, je také $f(x_1) \neq f(x_2)$.



Funkce prostá

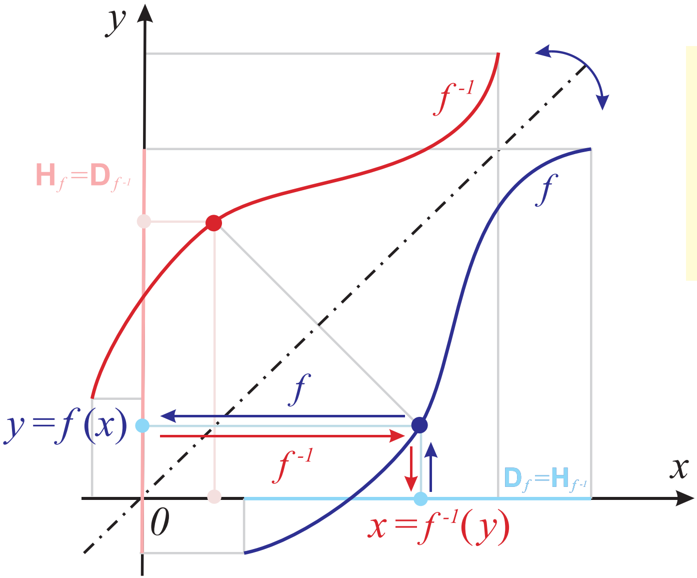


Funkce, která není prostá

Home
Obsah
Strana 174
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Je-li funkce f prostá, existuje k ní **funkce inverzní** f^{-1}, která každému prvku $y \in \mathbf{H}_f$ přiřazuje jeho vzor $x \in \mathbf{D}_f$:

$$x = f^{-1}(y) \text{ právě když } y = f(x).$$



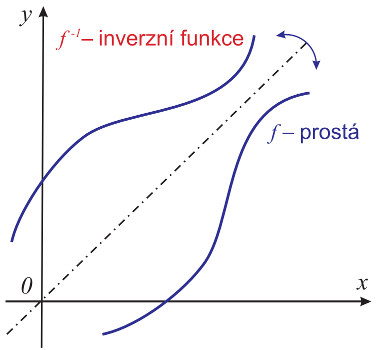
platí:

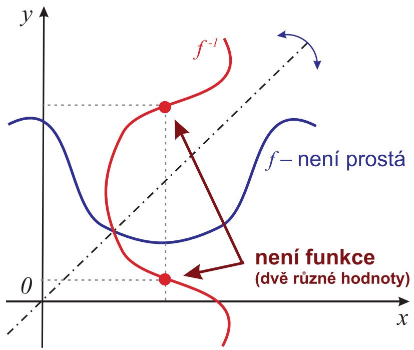
$\mathbf{D}_f = \mathbf{H}_{f^{-1}}$

$\mathbf{H}_f = \mathbf{D}_{f^{-1}}$

Při sestrojování grafu inverzní funkce pak vyneseme proměnou jako obvykle na osu x a hodnoty na osu y – oproti grafu původní funkce si tak souřadnicové osy „vymění role“; graf inverzní proto bude symetrický s grafem původní funkce f v osové souměrnosti podle osy prvního a třetího kvadrantu.

Uvědomme, že inverzní funkce existuje jen pro funkci prostou – pro funkci, která není prostá, nebude křivka vzniklá osovou somĕrností grafem funkce:



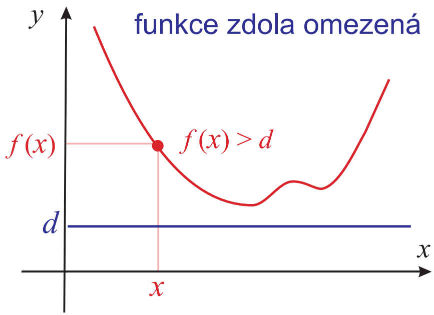


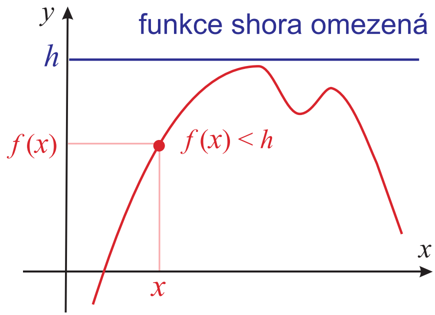
➥ Funkce omezené, zdola omezené, shora omezené

Uvažujme funkci f a podmnožinu **M** jejího definičního oboru **D**(f).

- ➥ Funkce f se nazývá **zdola omezená na množině M**, právě když existuje takové $d \in$ **R**, že pro všechna $x \in$ **M** je $f(x) \geq d$.
- ➥ Funkce f se nazývá **shora omezená na množině M**, právě když existuje takové $h \in$ **R**, že pro všechna $x \in$ **M** je $f(x) \leq h$.
- ➥ Funkce f se nazývá **omezená na množině M**, právě když je zdola i shora omezená na **M**.

Je-li **M** $= D_f$, řekneme, že **funkce je omezená (zdola, shora).**



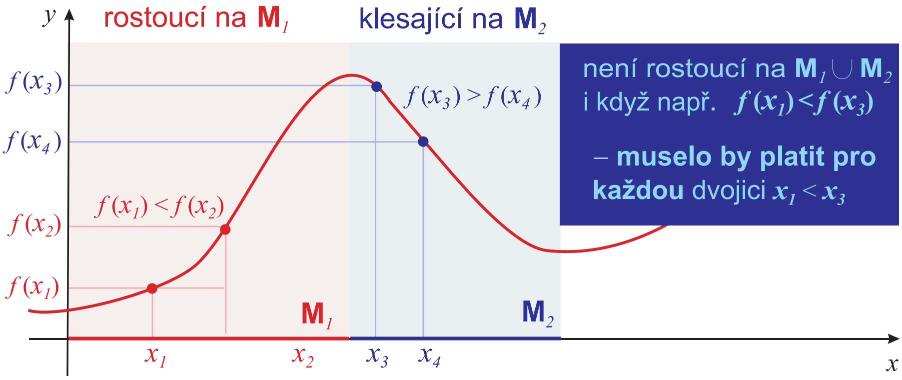


Funkce monotónní

Uvažujme funkci f a podmnožinu **M** $\subset$ **D**(f).

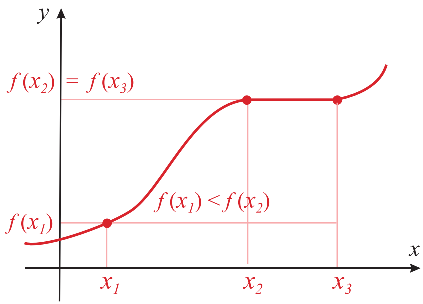
- Funkce f se nazývá **rostoucí na množině M**, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in$ **M** platí:
  je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.
- Funkce f se nazývá **klesající na množině M**, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in$ **M** platí:
  je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.
- Funkce f se nazývá **neklesající na množině M**, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in$ **M** platí:
  je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Funkce f se nazývá **nerostoucí na množině M**, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in$ **M** platí:
  je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Rostoucí a klesající funkce se souhrnně nazývají **ryze monotónní** (na dané množině); neklesající a nerostoucí se souhrnně nazývají **monotónní** (na dané množině).

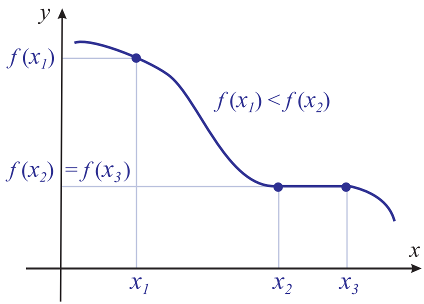


není rostoucí na $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$
i když např. $f(x_1) < f(x_3)$

– **muselo by platit pro každou** dvojici $x_1 < x_3$



neklesající



nerostoucí

Home
Obsah
Strana 179
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Definice 1. Řekneme, že funkce f má bodě $x_0 \in \mathbf{D}(f)$

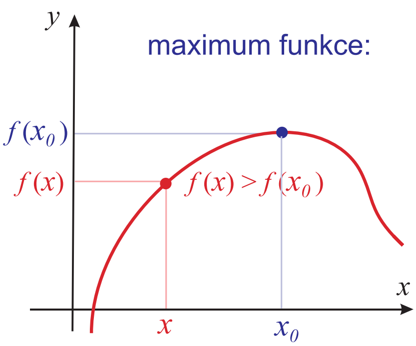
- **maximum**, jestliže pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ platí:

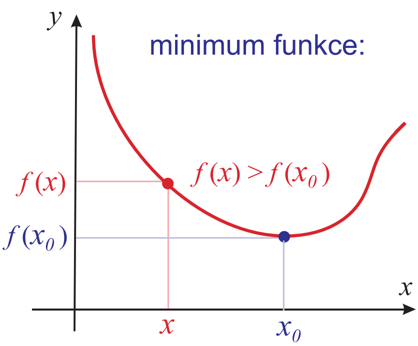
$$f(x_0) \geq f(x)\,,$$

- **minimum**, jestliže pro každé $x \in \mathbf{D}(f)$ platí:

$$f(x_0) \leq f(x)\,.$$

Maxima a minima funkce nazýváme **extrémy (globální)**.

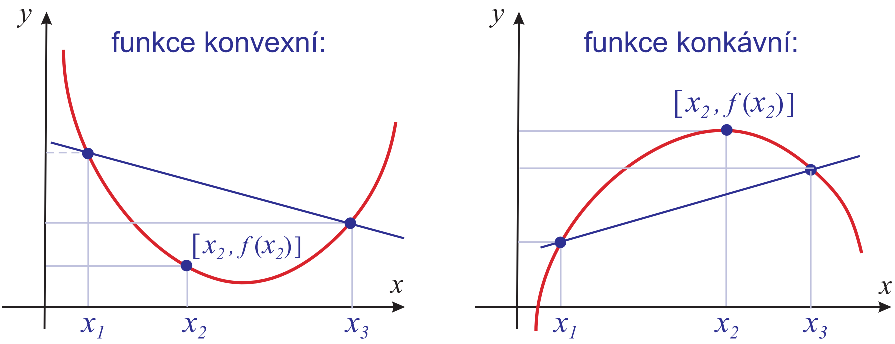




Home
Obsah
Strana 180
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Definice 2. Nechť je $I \subset \mathbb{R}$ interval, $f : I \to \mathbb{R}$. Jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, kde $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $A = [x_2, y]$ přímky procházející body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_3; f(x_3)]$

- nad bodem grafu funkce $[x_2, f(x)]$, nazývá se funkce f **konvexní na intervalu** I,
- pod bodem grafu funkce $[x_2, f(x)]$, nazývá se funkce f **konkávní na intervalu** I.

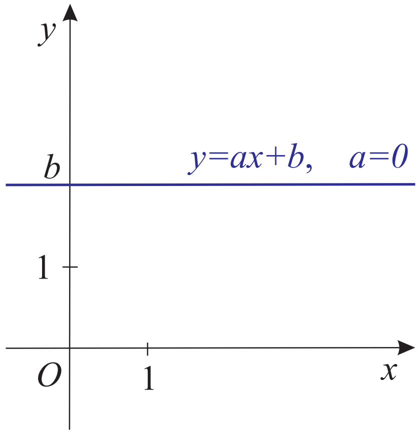


6.2.2 Základní elementární funkce

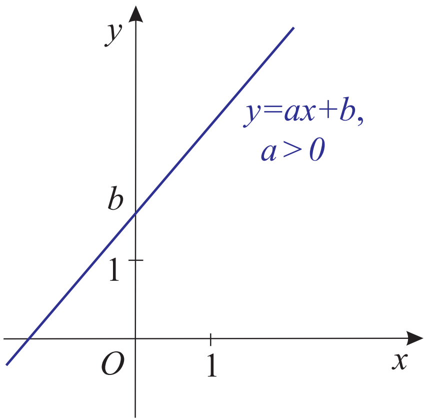
Lineární funkce

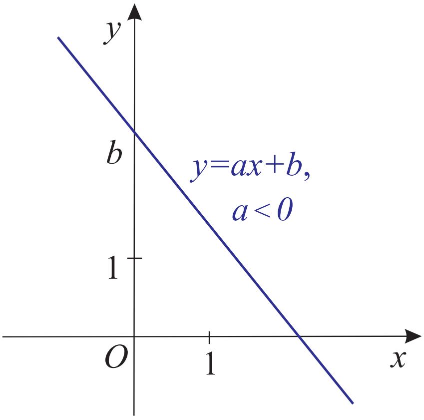
Lineární funkcí nazýváme každou funkci

$$f:\; y = ax + b, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}. \tag{6.1}$$



$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathbf{H}(f) = \{b\}$, nerostoucí a neklesající, není prostá





$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R},\ \mathbf{H}(f) = \mathbb{R}$

není ani shora, ani zdola omezená

rostoucí	klesající
prostá	prostá

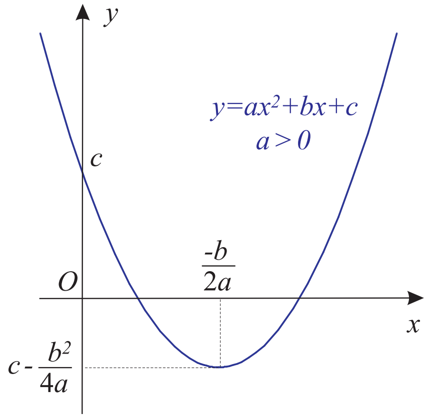
Kvadratická funkce

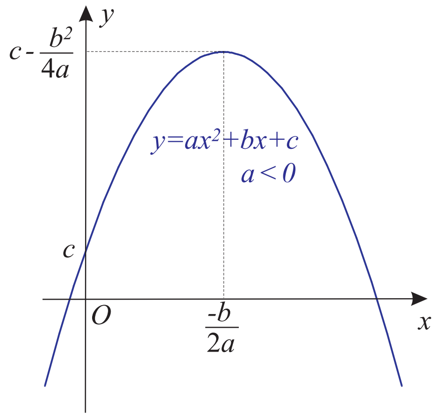
Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci

$$f:\ y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}.$$

Grafem každé kvadratické funkce je **parabola**, která je souměrná podle osy o rovnoběžné s osou y.

Průsečíku osy paraboly s parabolou se říká **vrchol paraboly** a přímce kolmé k ose paraboly, procházející jejím vrcholem, se říká **vrcholová tečna paraboly**.





$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R},\ \mathbf{H}(f) = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}, +\infty \right)$

zdola omezená, není shora omezená

klesající v $\left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right\rangle$

rostoucí v $\left\langle -\frac{b}{2a}, +\infty \right)$

$\mathbf{D}(f) = \mathbb{R},\ \mathbf{H}(f) = \left(-\infty, c - \frac{b^2}{4a} \right\rangle$

shora omezená, není zdola omezená

rostoucí v $\left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right\rangle$

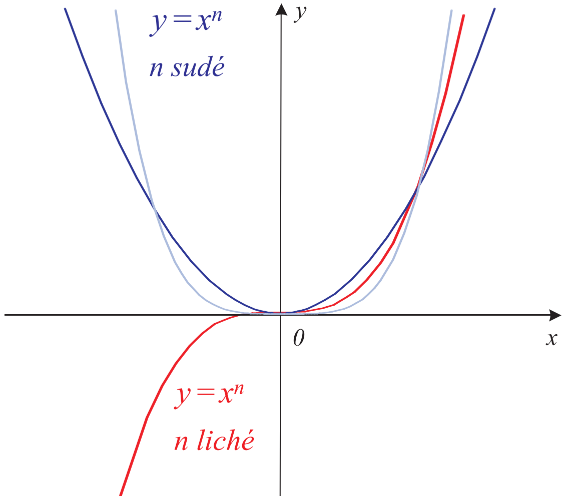
klesající v $\left\langle -\frac{b}{2a}, +\infty \right)$

Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem

Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem je funkce

$$f : \; y = x^n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}.$$

Je-li speciálně $n = 1$, je f lineární funkce; je-li $n = 2$ je to funkce kvadratická. Pro $n > 1$ je grafem **parabola n-tého stupně**.



Pomocí algebraických operací násobení číslem a sčítaní funkcí $f(x) = x^n$ získáme *polynomy*.

Polynomem nazýváme funkci $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \ a_i \in \mathbb{R}.$$

Není-li polynom identicky roven nule, existuje největší n takové, že $a_n \neq 0$. Toto n nazýváme **stupeň** polynomu. V dalším budeme předpokládat, že je polynom $P(x)$ nenulový a že má stupeň n.
Nulovým bodem neboli **kořenem** polynomu P se rozumí bod $x_0 \in \mathbb{R}$, pro který

$$P(x_0) = 0.$$

Je-li x_1 nulový bod polynomu $P(x)$ stupně n, ze psát

$$P(x) = (x - x_1) P_1(x),$$

kde $P_1(x)$ je polynom stupně $(n-1)$. Má-li polynom $P_1(x)$ kořen x_2, je $P_1(x) = (x - x_2) P_2(x)$, a tedy

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) P_2(x),$$

kde $P_2(x)$ je polynom stupně $(n-2)$. Jestliže pokračujeme uvedeným postupem dostaneme nulové body $x_1, x_2, \dots, x_N$, z nichž se některé mohou vyskytovat vícekrát. Polynom $P(x)$ lze pak zapsat ve tvaru

$$P(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_r)^{k_r}P_N(x),$$

kde $x_1, \dots, x_r$ jsou navzájem různé kořeny polynomu $P(x)$, přirozená čísla k_i se nazývají *násobnost kořene* x_i a platí pro ně $N = k_1 + k_2 + \dots + k_r$, a $P_N(x)$ je polynom stupně $(n-N)$, který nemá reálné kořeny.
Obecně lze libovolný polynom stupně n zapsat ve tvaru

$$P(x) = a_n\left(x-x_1\right)^{k_1}\left(x-x_2\right)^{k_2}\dots\left(x-x_r\right)^{k_r}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1} \\ \left(x^2+p_2x+q_2\right)^{m_2}\dots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{m_s},$$

kde polynomy $x^2+p_ix+q_i$ nemají reálný kořen a

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2m_1 + \dots + 2m_s = n.$$

Lineární lomené funkce jsou funkce tvaru

$$f:\ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{kde} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Je-li $c = 0$, jedná se o lineární funkci. Proto budeme dále předpokládat, že $c \neq 0$. Protože rovnost $cx + d = 0$ platí pouze pro $x = -\frac{d}{c}$, je definiční obor lineární lomené funkce $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Lineární lomenou funkci lze upravit na tvar

$$f(x) = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\,\frac{1}{x + d/c}\ .$$

Tedy pro $ad - bc = 0$ je tato funkce rovna konstantní funkci. Proto budeme navíc předpokládat, že $ad - bc \neq 0$. Obecnou lineární lomenou funkci lze získat také složením tří jednodušších funkcí $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, kde f_1 je lineární funkce $f_1(x) = x + \frac{d}{c}$, funkce $f_2 = \frac{1}{x}$ a funkce f_3 je opět lineární funkce $f_3(x) = -\frac{ad-bc}{c^2}x + \frac{a}{c}$. Z těchto funkcí jsme podrobněji nepopsali pouze funkci $f_2(x) = \frac{1}{x}$. Tato funkce vyjadřuje vztah nepřímé úměry mezi x a y. Je definována na intervalech $(-\infty, 0)$, kde je klesající a na intervalu

$(0, +\infty)$ kde je také klesající. Ale je třeba upozornit, že tato funkce není klesající na celém svém definičním oboru. Funkce je lichá a její graf je rovnoosá *hyperbola* se středem v počátku, jejíž asymptoty jsou souřadnicové osy.

Je-li $ad - bc > 0$ je obecná lineární lomená funkce $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ klesající na intervalech $(-\infty, -d/c)$ a $(d/c, +\infty)$. Je-li $ad - bc < 0$ je funkce na těchto intervalech rostoucí. Grafem je hyperbola se středem v bodě $\left[-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right]$, jejíž asymptoty jsou přímky $x = -\dfrac{d}{c}$ a $y = \dfrac{a}{c}$. Graf funkce protíná osu Ox v bodě $x = -\dfrac{b}{a}$ a osu Ox v bodě $y = \dfrac{b}{d}$.

Lineární lomená funkce $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ je prostá a její inverzní funkce je opět lineární lomená funkce $y = \dfrac{dx-b}{-cx+a}$.

Racionální funkce jsou funkce tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \ ,$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy.
Označíme-li X_0 množinu všech reálných nulových bodů polynomu $Q(x)$, je definiční obor $D_f = \mathbb{R} \setminus X_0$.
Je-li stupeň polynomu $P(x)$, n, větší nebo roven stupni m polynomu $Q(x)$, lze dělením zjistit, že tuto funkci je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $P_1(x)$ je polynom stupně $(n - m)$ a stupeň polynomu $Q(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$.
Funkci $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde je stupeň polynomu$P(x)$ menší než stupeň polynomu $Q(x)$, lze zapsat jako součet jednodušších racionálních funkcí. Předpokládejme, že

$$\begin{aligned} q(x) = {} & (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdots \\ & \cdots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{m_s}, \end{aligned}$$

kde dvojčleny $x^2+p_ix+q_i$ nemají reálné kořeny, tj. platí $p_i^2-4q_i<0$.

Pak lze racionální funkci $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ psát ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-x_1}+\frac{A_{12}}{\left(x-x_1\right)^2}+\cdots+\frac{A_{1k_1}}{\left(x-x_1\right)^{k_1}}+\\
&+\frac{A_{21}}{x-x_2}+\cdots+\frac{A_{2k_2}}{\left(x-x_2\right)^{k_2}}+\cdots+\frac{A_{r1}}{x-x_r}+\cdots+\frac{A_{rk_r}}{\left(x-x_r\right)^{k_r}}\\
&+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\cdots+\frac{B_{1m_1}x+C_{1m_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}}\\
&+\cdots+\\
&+\frac{B_{s1}x+C_{s1}}{x^2+p_sx+q_s}+\frac{B_{s2}x+C_{s2}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^2}+\cdots+\frac{B_{sm_s}x+C_{sm_s}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{m_s}}
\end{aligned}
$$

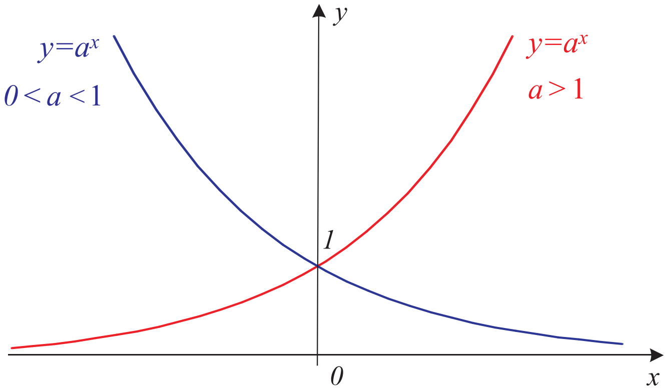
Tomuto zápisu se říká **rozklad na parciální zlomky**.

Exponenciální funkce o základu *a*

Exponenciální funkce o základu *a* je funkce

$$f:\ y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad D(f) = \mathbb{R}.$$

Je-li základ $a > 1$, je funkce a^x rostoucí v $\mathbb{R}$, je-li $0 < a < 1$, je klesající v $\mathbb{R}$; v obou případech je prostá v celém definičním oboru.



Logaritmická funkce o základu *a*

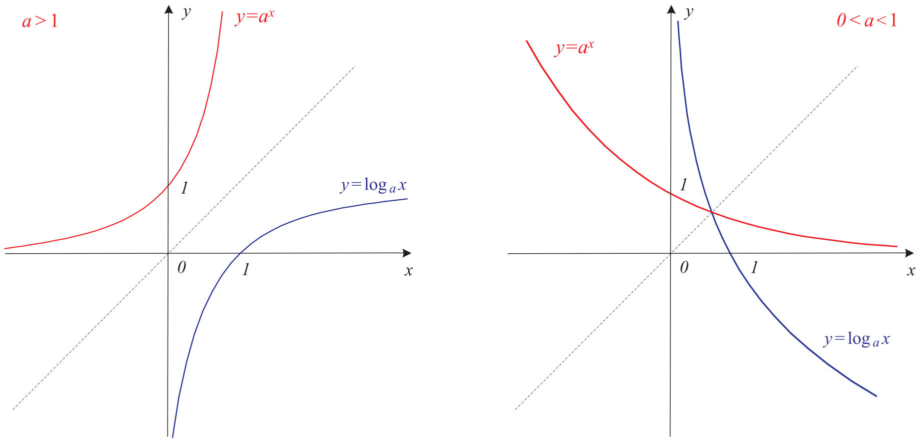
Logaritmická funkce o základu *a* je zavedena jako funkce **inverzní k exponenciální funkci o témže základu** a. Symbolicky se zapisuje takto:

$$f:\ y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad D(f) = (0, +\infty),$$

přičemž podle definice pro každé $x \in (0, +\infty),\ y \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$ platí:

$$y = \log_a x \ \Leftrightarrow\ x = a^y$$

Je-li základ $a > 1$, je funkce $\log_a x$ rostoucí v $\mathbb{R}$, je-li $0 < a < 1$, je klesající v $\mathbb{R}$; v obou případech je prostá v celém definičním oboru.



a > 1
y
y=a^x
1
y=log_a x
0
1
x
y
0 < a < 1
y=a^x
1
0
1
x
y=log_a x

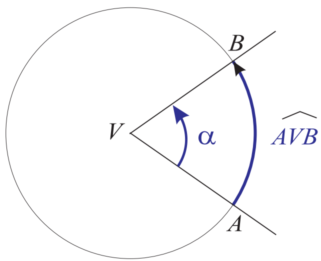
Goniometrické funkce

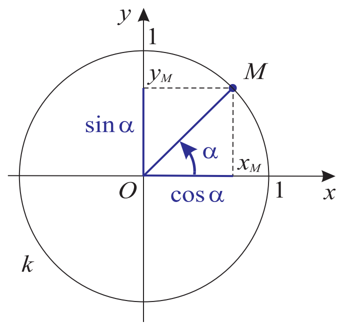
Připomeňme si nejprve pojem **orientovaného úhlu** a jeho **velikosti**. Orientovaným úhlem se rozumí uspořádaná dvojice polopřímek VA, VB se společným počátkem. První z této dvojice se nazývá **počátečním ramenem orientovaného úhlu**, druhá **koncovým ramenem orientovaného úhlu**; společný počátek obou polopřímek se nazývá **vrchol orientovaného úhlu**. Pro orientovaný úhel se používá označení $\widehat{AVB}$. **Velikostí orientovaného úhlu** $\widehat{AVB}$ se nazývá každé z reálných čísel $\alpha + 2k\pi$ (v obloukové míře), resp. $\alpha + k \cdot 360°$ (v míře stupňové), kde $k \in \mathbb{Z}$ a α se určí takto:

a) Je-li $VA = VB$, je $\alpha = 0$,

b) Je-li $VA \neq VB$, je α velikost neorientovaného úhlu, který vznikne otočením počátečního ramene VA do polohy koncového ramene VB v **kladném smyslu**, tj. proti směru hodinových ručiček.

Je tedy $0 \leq \alpha < 2\pi$, resp. $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$; této velikosti se říká **základní velikost orientovaného úhlu.**





Zvolme kartézskou soustavu souřadnic Oxy. Ke každému reálnému číslu α lze přiřadit právě jeden orientovaný úhel velikosti α (v obloukové míře), jehož počáteční rameno je polopřímka OI, kde I je obraz čísla 1 na ose x (místo I budeme v grafu psát přímo číslo 1); říká se mu **orientovaný úhel v základní poloze**. Sestrojíme jednotkovou kružnici k (tj. kružnici o poloměru 1) se středem O, její průsečík s koncovým ramenem orientovaného úhlu α v základní poloze označíme M.

Home
Obsah
Strana 197
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

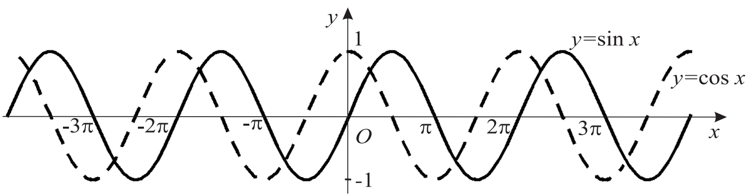
Definujeme

Druhou souřadnici bodu M jednotkové kružnice na koncovém rameni orientovaného úhlu α v základní poloze nazýváme **sinus úhlu** α a jeho první souřadnici nazýváme **kosinus úhlu** α; značíme je $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

$$\sin\alpha = y_M, \qquad \cos\alpha = x_M \qquad \text{pro každé } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Těmito vztahy je každému reálnému číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřazeno právě jedno reálné číslo $\sin x$ a právě jedno reálné číslo $\cos x$, tj. tyto vztahy udávají funkční předpisy **funkce sinus** a **funkce kosinus**:

$$f:\ y = \sin x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}, \qquad f:\ y = \cos x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}.$$



Důležité je zejména to, že funkce sinus je lichá, funkce kosinus sudá a obě funkce jsou **periodické s periodou** 2π. Obě jsou rovněž omezené:

$$-1 \le \sin x \le 1, \qquad -1 \le \cos x \le 1.$$

Ihned z definice také plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$\sin x = 0$ právě když je $x = k\pi = 2k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 0$ právě když je $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$

Pro libovolné reálné číslo x platí:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{6.2}$$

Funkce $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ jsou zavedeny vztahy:

$$f:\ y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{(2k+1)\tfrac{\pi}{2}\right\}$$

$$f:\ y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\}.$$

Nejdůležitější hodnoty goniometrických funkcí můžeme shrnout do tabulky:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.	0
$\mathrm{cotg}\,\alpha$	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	není def.	0	není def.

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Součtové vzorce

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$$

$$\operatorname{cotg} g\,(x \pm y) = \frac{\pm \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} x \mp \operatorname{cotg} y}$$

Vztahy pro dvojnásobný úhel

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Vztahy pro poloviční úhel

$$\sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \tan \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

Znaménko se určí podle kvadrantu.

Součtové věty

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \tfrac{x+y}{2} \cdot \cos \tfrac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \tfrac{x+y}{2} \cdot \sin \tfrac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \tfrac{x+y}{2} \cdot \cos \tfrac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \tfrac{x+y}{2} \cdot \sin \tfrac{x-y}{2}$$

Převody přes liché násobky

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \qquad \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \qquad \operatorname{cotg}\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou zavedeny jako inverzní funkce k funkcím goniometrickým. Protože funkce inverzní existuje jen pro prostou funkci, je vždy nejprve třeba omezit definiční obor na interval, na němž je daná goniometrická funkce prostá.

Funkce arkussinus,

$$f:\ y=\arcsin x,\quad \mathbf{D}(f)=\langle -1,1\rangle,$$

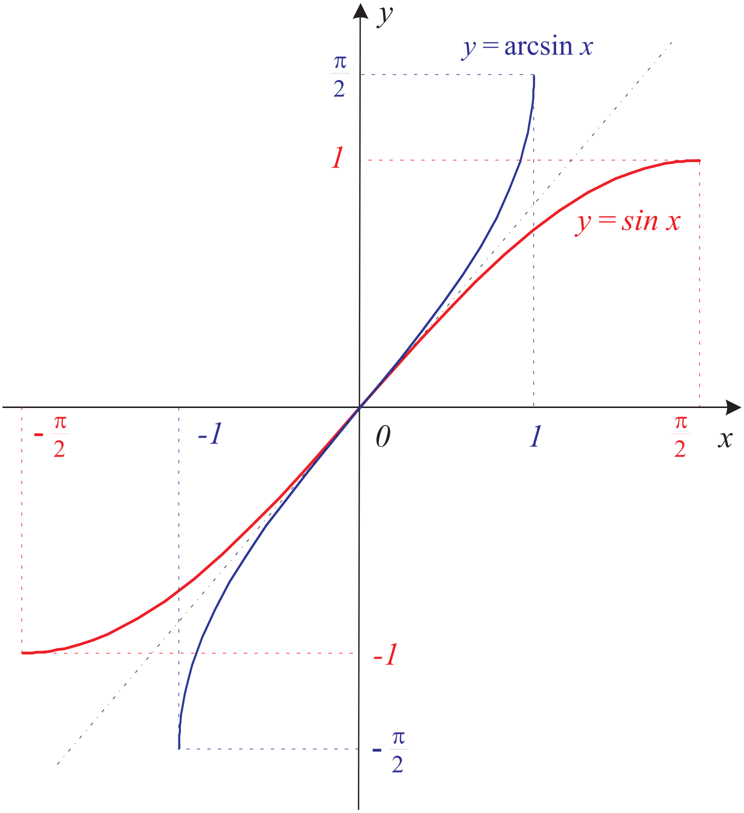
je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\sin x$ na intervalu $\langle -\pi/2,\pi/2\rangle$. Je tedy určena vztahem

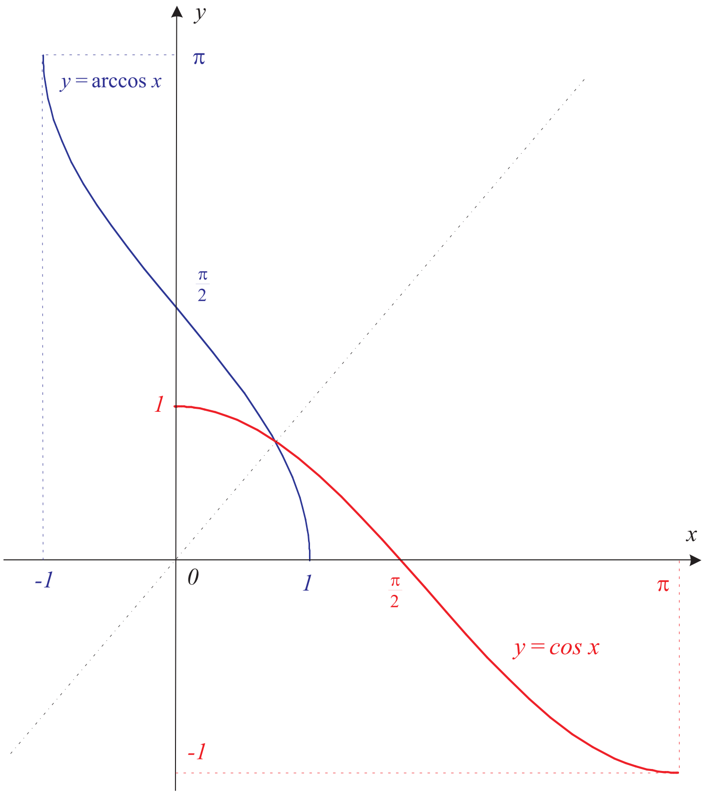
$$y=\arcsin x \iff x=\sin y,\quad y\in\langle -\pi/2,\pi/2\rangle.$$

Funkce arkuscosinus,

$$f:\ y=\arccos x,\quad \mathbf{D}(f)=\langle -1,1\rangle,$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\cos x$ na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$. Je tedy určena vztahem: $y=\arccos x \iff x=\cos y,\quad y\in\langle 0,\pi\rangle.$


y
y = arcsin x
π/2
1
y = sin x
- π/2
-1
0
1
π/2
x
-1
- π/2



y
π
y = arccos x
π/2
1
x
-1
0
1
π/2
π
y = cos x
-1

Funkce arkustangens,

$$f: \; y = \operatorname{arctg} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}\,,$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\operatorname{tg} x$ na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Je tedy určena vztahem

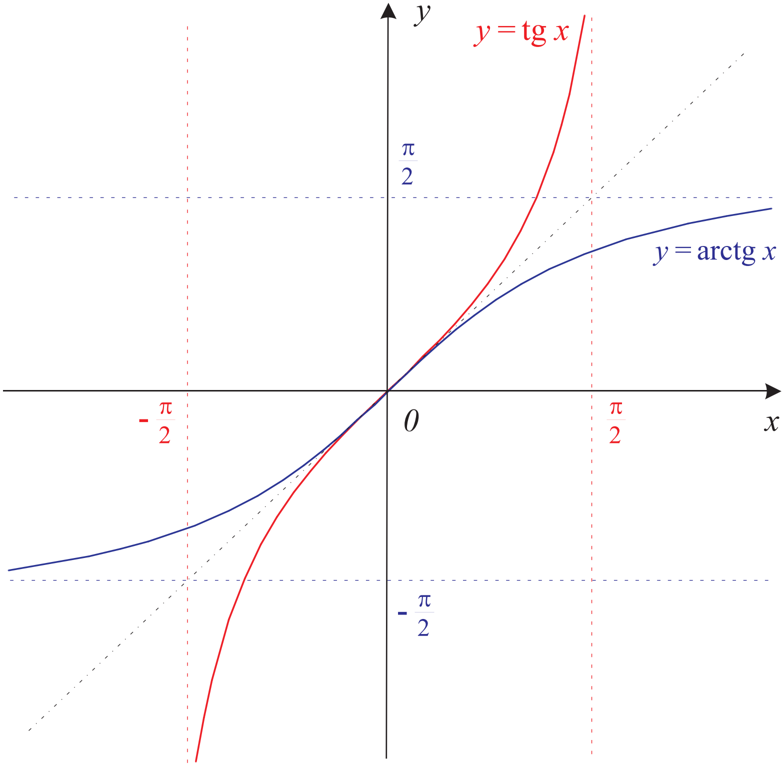
$$y = \operatorname{arctg} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{tg} y, \quad y \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle .$$

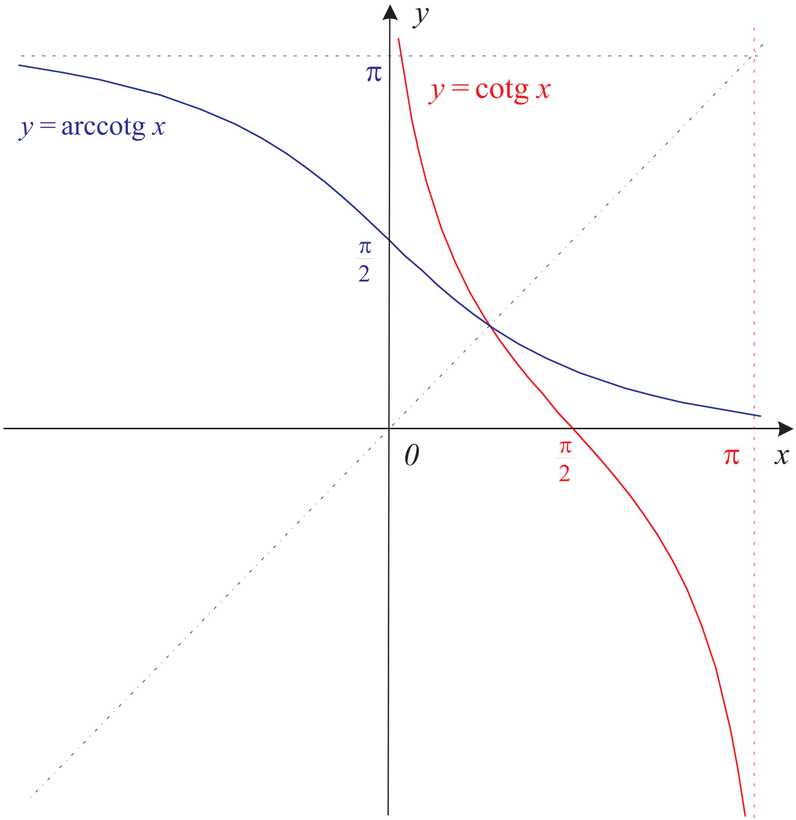
Funkce arkuskotangens,

$$f: \; y = \operatorname{arccotg} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R}\,,$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci $\operatorname{cotg} x$ na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Je tedy určena vztahem

$$y = \operatorname{arccotg} x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{cotg} y, \quad y \in \langle 0, \pi\rangle .$$


y
y = tg x
π/2
y = arctg x
- π/2
0
π/2
x
- π/2


y
π
y = cotg x
y = arccotg x
π/2
0
π/2
π
x

Hyperbolické funkce

Funkce **sinus hyperbolický a kosinus hyperbolický**,

$$f:\ y=\sinh x,\quad \mathbf{D}(f)=\mathbb{R},$$

$$f:\ y=\cosh x,\quad \mathbf{D}(f)=\mathbb{R},$$

jsou definované vztahy

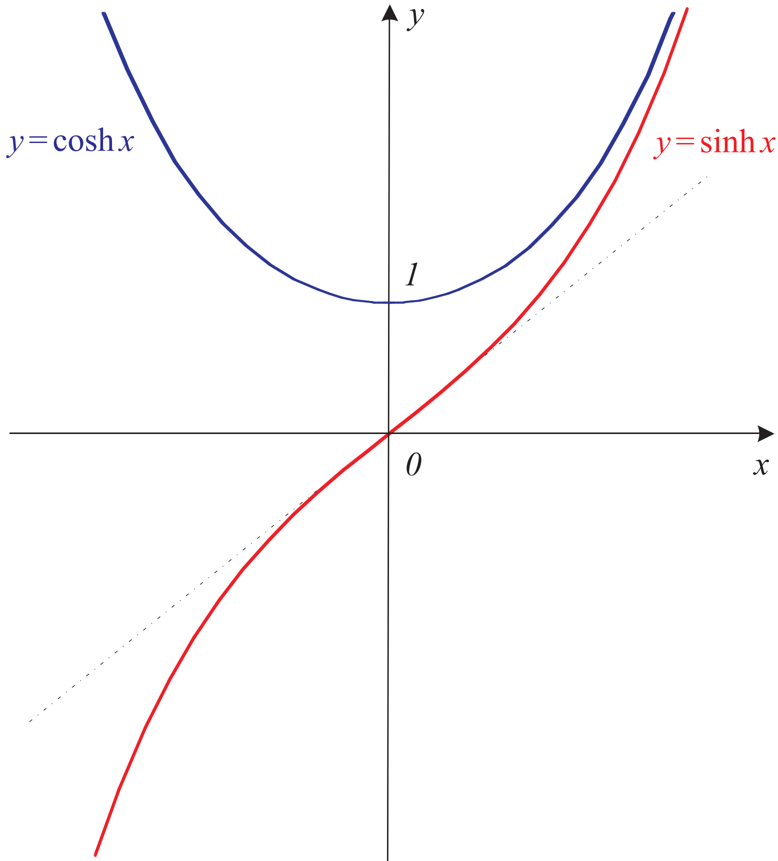
$$\sinh x=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2},\qquad \cosh x=\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Z definičních vztahů plyne, že pro $\sinh x$ a $\cosh x$ platí:

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1,$$

$$\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y,$$

$$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y\,.$$



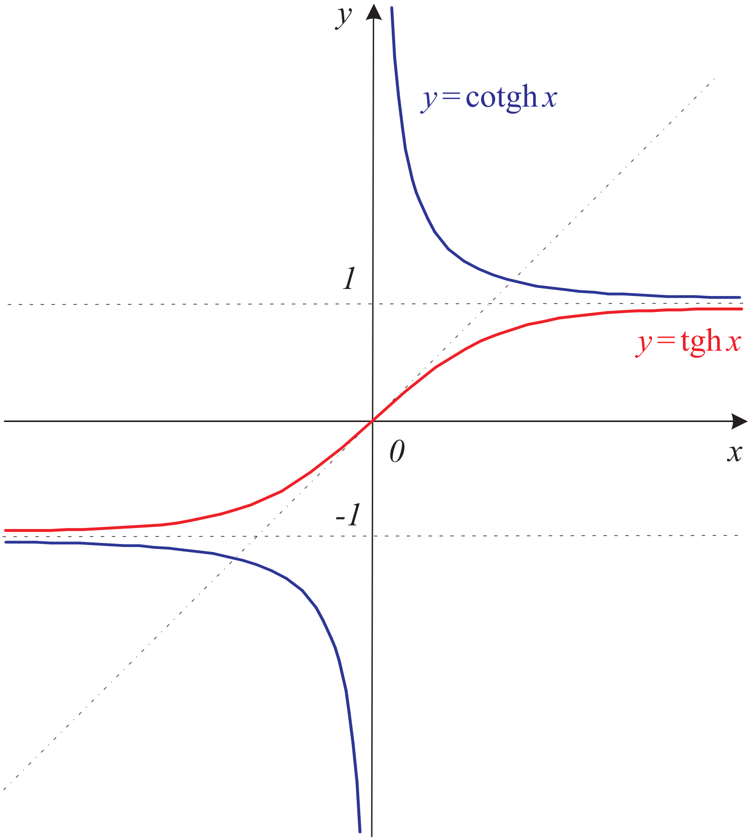
$y = \cosh x$
$y = \sinh x$
y
x
1
0

Funkce **tangens hyperbolický a kotangens hyperbolický**,

$$f:\ y = \operatorname{tgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$
$$f:\ y = \operatorname{cotgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

jsou definované vztahy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}, \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$$



y
y = cotgh x
1
y = tgh x
0
x
-1

Hyperbolometrické funkce

Funkce **argument sinus hyperbolický**,

$$f:\ y = \operatorname{argsinh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \mathbb{R},$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci sinus hyperbolický:

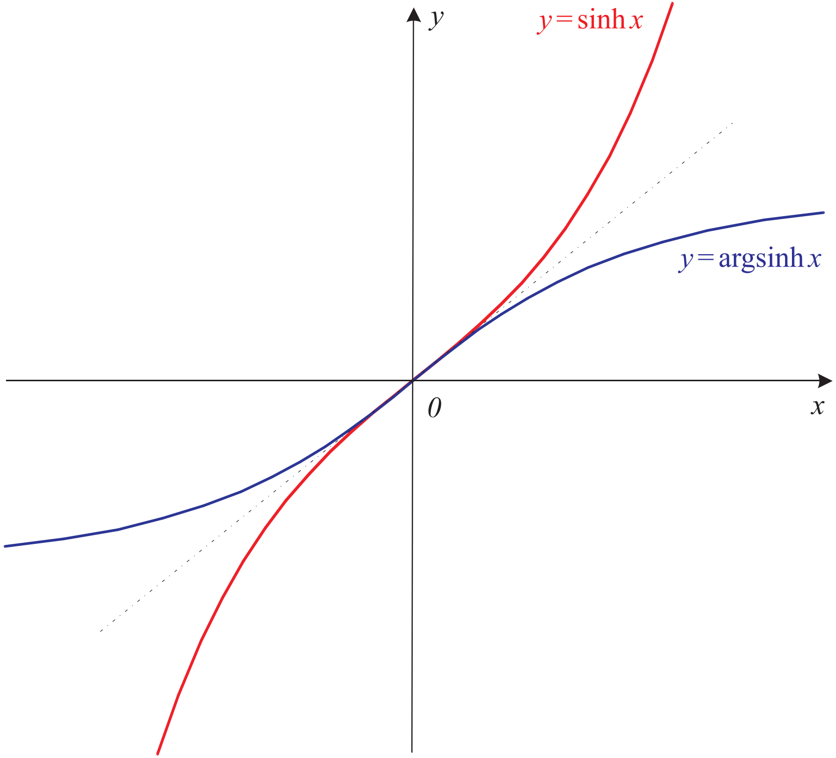
$$y = \operatorname{argsinh} x \iff x = \sinh y, \quad y \in \mathbb{R},$$

Funkce **argument kosinus hyperbolický**,

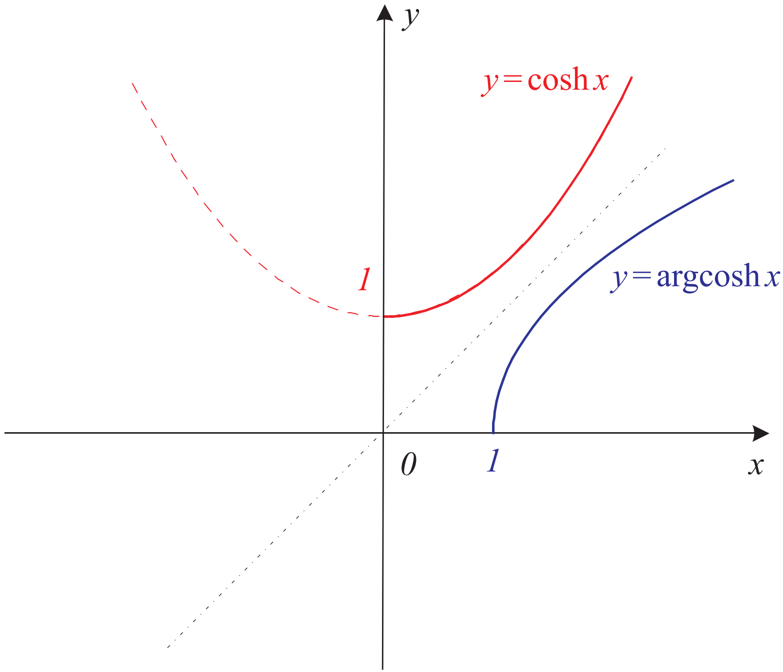
$$f:\ y = \operatorname{argcosh} x, \quad \mathbf{D}(f) = \langle 1, \infty),$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci kosinus hyperbolický:

$$y = \operatorname{argcosh} x \iff x = \cosh y, \quad y \in \langle 0, \infty)$$



y
$y = \sinh x$
$y = \operatorname{argsinh} x$
0
x



y
y = cosh x
1
y = argcosh x
0
1
x

Funkce **argument tangens hyperbolický**,

$$f: \ y = \operatorname{tgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = (-1, 1),$$

je definovaná jako inverzní funkce k funkci tangens hyperbolický:

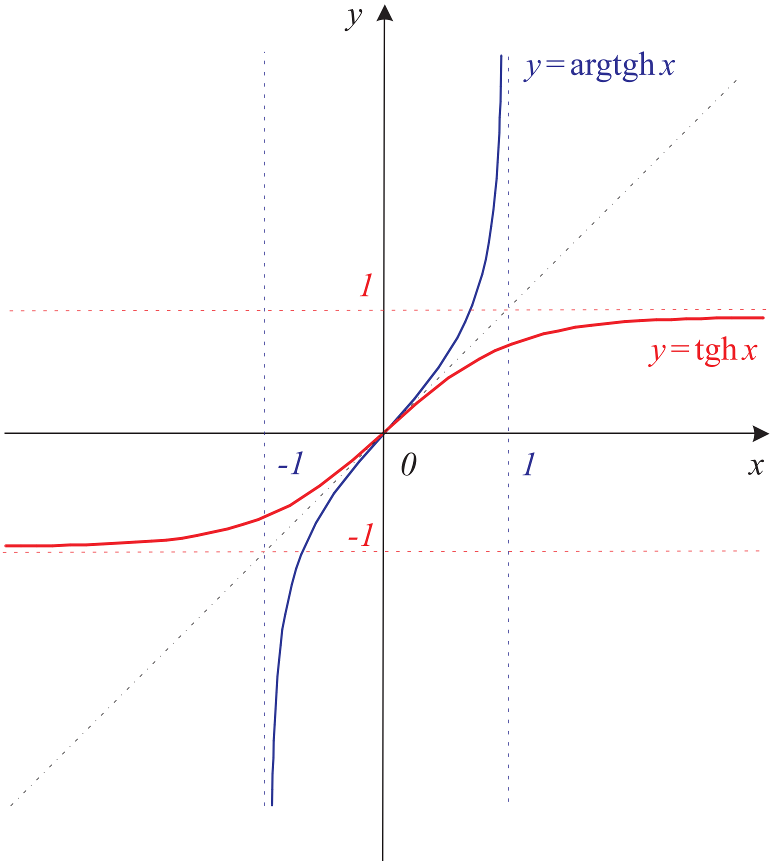
$$y = \operatorname{argtgh} x \iff x = \operatorname{tgh} y, \quad y \in \mathbb{R}$$

Funkce **argument kotangens hyperbolický**,

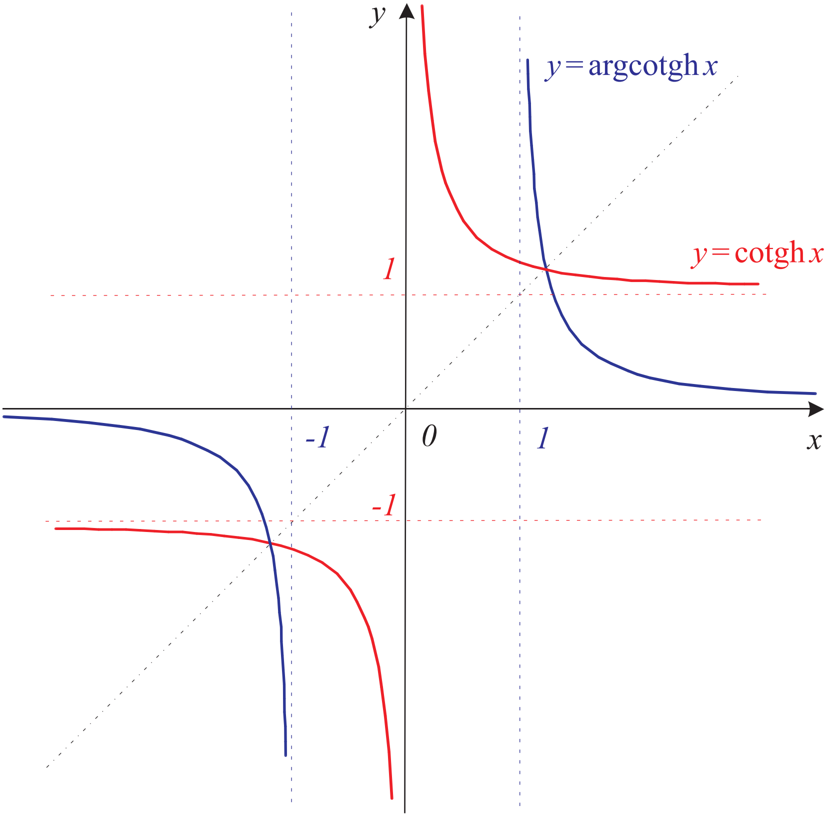
$$f: \ y = \operatorname{cotgh} x, \quad \mathbf{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$$

je definovaná vztahem

$$y = \operatorname{argcotgh} x \iff x = \operatorname{cotgh} y, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



Home
Obsah
Strana 218
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec



Home
Obsah
Strana 219
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

PŘEDNÁŠKA 7

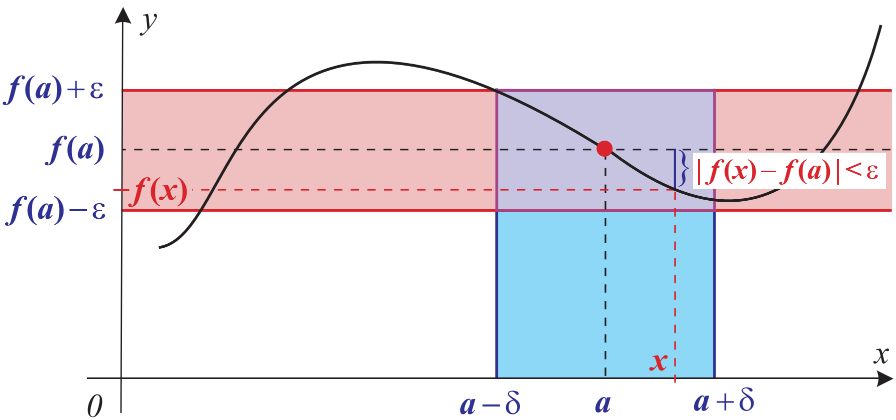
LIMITA

A SPOJITOST FUNKCE

7.1 Spojitost funkce

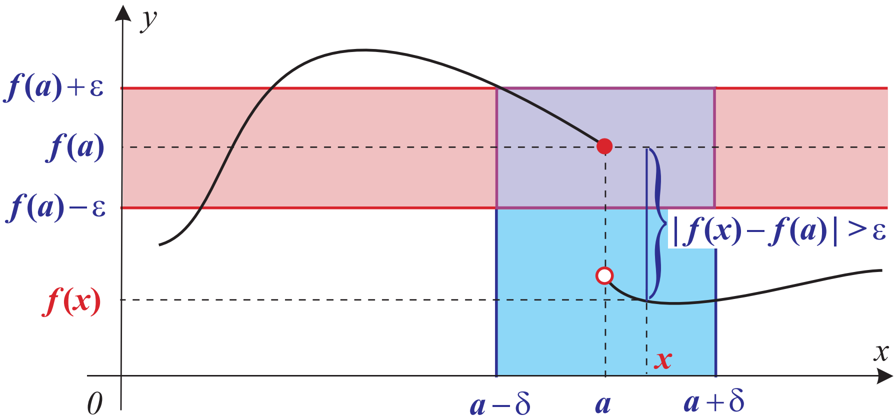
Definice 1. Řekneme, že funkce $f(x)$ je **spojitá** v bodě $a \in D_f$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D_f$ platí nerovnost:

$$\bigl|f(x) - f(a)\bigr| < \varepsilon.$$



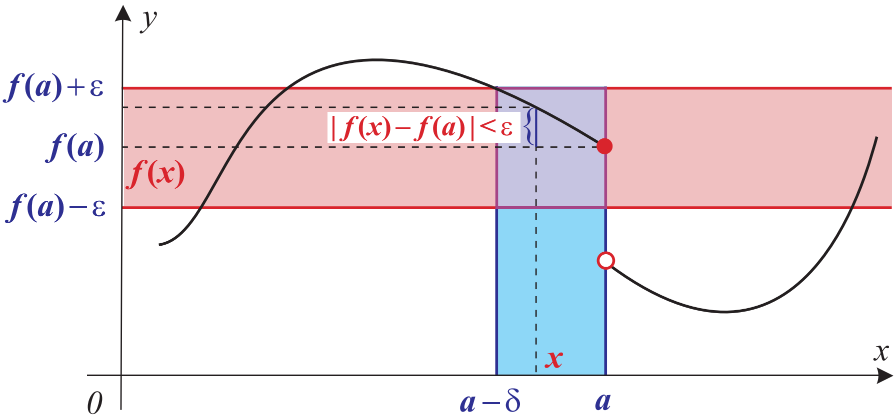
Následující funkce není spojitá, neboť pro uvedenou hodnotu ε existuje v každém okolí bodu a takový bod x, pro který je

$$\left|f(x) - f(a)\right| > \varepsilon.$$



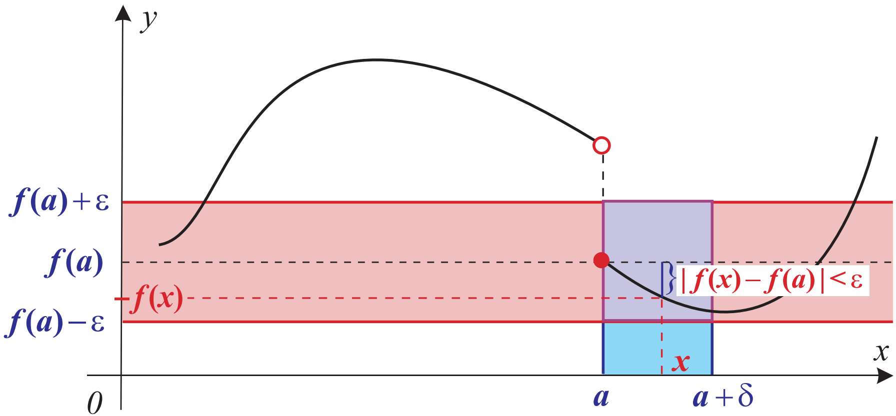
Definice 2. Řekneme, že funkce $f(x)$ je **spojitá zleva** v bodě $a \in D_f$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (a-\delta, a\rangle \cap D_f$ platí nerovnost:

$$\left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon.$$



Definice 3. Řekneme, že funkce $f(x)$ je **spojitá zprava** v bodě $a \in D_f$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in \langle a, a+\delta) \cap D_f$ platí nerovnost:

$$\big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$$



Věta. *Funkce $f(x)$ spojitá v bodě a právě tehdy, když je v bodě a spojitá zleva i zprava.*

Důkaz. Přímo z definice.

Věta. *Nechť jsou funkce f, g spojité (resp. spojité zleva, resp. spojité zprava) v bodě a, nechť $k \in \mathbb{R}$ je konstanta. Pak jsou v bodě a spojité (resp. spojité zleva, resp. spojité zprava) také funkce kf, $f+g$, $f \cdot g$ a je-li $g(a) \neq 0$, také funkce $\dfrac{f}{g}$.*

Věta. *Nechť je funkce $f(x)$ spojitá v bodě a a funkce $g(y)$ je spojitá v bodě $f(a)$. Pak je složená funkce $f(g(x))$ spojitá v bodě a.*

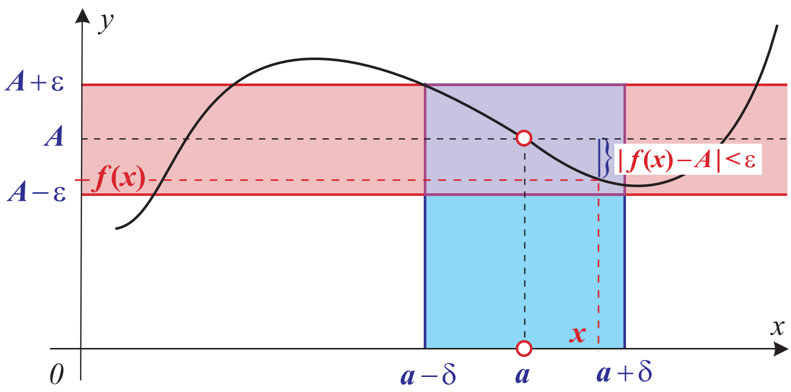
Poznámka. Důkazy předchozích vět jsou analogické důkazům obdobných vět pro limity, které jsou uvedeny dále.

Definice 4. Funkce spojitá na množině $X = D_f$ se nazývá *spojitá*.

Věta. *Nechť je $f : X \to \mathbb{R}$ spojitá funkce a X je uzavřená a omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Pak v množině X existují body x_M a x_m takové, že pro každé $x \in X$ je $f\big(x_m\big) \leq f(x) \leq f\big(x_M\big)$, tj. body, ve kterých funkce $f(x)$ nabývá svého maxima a minima.*

7.2 Limita funkce a její vlastnosti

Definice 5. Vlastní limita ve vlastním bodě.
Nechť je dána funkce $f(x)$, nechť $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod jejího definičního oboru. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a **limitu** $A \in \mathbb{R}$, píšeme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in D_f$, pro které je $0 < |x - a| < \delta$, platí: $\big|f(x) - A\big| < \varepsilon$.



Jiné vyjádření výroku $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ plyne z následující věty.

Věta. *Nechť je dána funkce $f(x)$ a bod $a \in \mathbb{R}$, který je hromadným bodem jejího definičního oboru. Pak je*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

právě tehdy, když ke každému okolí $U_\varepsilon(A)$ bodu A existuje prstencové okolí $P_\delta(a)$ takové, že pro každé $x \in P_\delta(a) \cap D_f$ je $f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Důkaz. Věta je pouhým přepsáním definice limity, neboť $P_\delta(a) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, $U_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. $\square$

Tato věta umožňuje jediným způsobem definovat limitu i v případě, že bod a nebo bod A je nevlastní.

Definice 6. Nechť je dána funkce $f(x)$ a bod $a \in \mathbb{R}^*$, který je hromadným bodem jejího definičního oboru. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ **limitu** $A \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když ke každému okolí $U(A)$ existuje prstencové okolí $P(a)$ takové, že pro každé $x \in P(a) \cap D_f$ je $f(x) \in U(A)$.

Terminologie:

Vlastní limita ve vlastním bodě: $a \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}$;

Nevlastní limita ve vlastním bodě: $a \in \mathbb{R},\ A = \pm\infty$;

Vlastní limita v nevlastním bodě: $a = \pm\infty,\ A \in \mathbb{R}$;

Nevlastní limita v nevlastním bodě: $a = \pm\infty,\ A \pm \infty$.

Definice 7. Nechť je dána funkce $f(x)$ a bod $a \in \mathbb{R}$, který je hromadným bodem množiny $\{x \in D_f\,;\; x < a\}$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a **limitu zleva** A, píšeme

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A,$$

jestliže ke každému okolí $U(A)$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (a - \delta, a) \cap D_f$ je $f(x) \in U(a)$.

Nechť je dána funkce $f(x)$ a bod $a \in \mathbb{R}$, který je hromadným bodem množiny $\{x \in D_f\,;\; x > a\}$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a **limitu zprava** A, píšeme

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A,$$

jestliže ke každému okolí $U(A)$ bodu A existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (a, a + \delta) \cap D_f$ je $f(x) \in U(a)$.

Věta. *Rovnost* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *platí právě tehdy, když*

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = A.$$

Důkaz. Nechť je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Protože je $(a-\delta, a) \subset P_\delta(a)$, $(a, a+\delta) \subset P_\delta(a)$, platí $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) = A$.

Naopak, je-li $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) = A$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existují δ_- a δ_+ taková, že pro každé $x \in D_f$, pro které je $0 < a - x < \delta_-$ nebo $0 < x - a < \delta_+$, je $f(x) \in U_\varepsilon(A)$.
K danému okolí $U_\varepsilon(A)$ stačí zvolit $\delta = \min\big(\delta_-, \delta_+\big)$. Je-li totiž $x \in D_f \cap P_\delta(a)$, je buď $0 < a - x < \delta \le \delta_-$ nebo $0 < x - a < \delta \le \delta_+$, a tedy $f(x) \in U_\varepsilon(A)$. $\square$

Věta. *Nechť* $a \in \mathbb{R}^*$ *je hromadným bodem definičního oboru* D_f *funkce* $f(x)$*, nechť* $A \in \mathbb{R}^*$ *. Pak platí:* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *právě tehdy, když* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ *pro každou posloupnost* (x_n) *konvergující k bodu* a*, kde* $x_n \in D_f \setminus \{a\}$ *.*

Důkaz. Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a $\big(x_n\big)$ je libovolná posloupnost s uvedenými vlastnostmi. Nechť je dáno $U_\varepsilon(A)$. Pak existuje $P_\delta(a)$, že pro každé $x \in D_f \cap P_\delta(a)$ je $f(x) \in U_\varepsilon(A)$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, existuje n_0, že pro všechna $n > n_0$ je $x_n \in P_\delta(a)$ a tedy $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Naopak, nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq A$. Pak existuje $U_\varepsilon(A)$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $x \in D_f \cap P_\delta(a)$, pro které je $f(x) \notin U_\varepsilon(A)$. Vezměme toto $\varepsilon > 0$, označme $\delta = 1/n > 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $X_n = \big\{x \in D_f \cap P_{1/n}(a)\,;\ f(x) \notin U_\varepsilon(A)\big\}$ neprázdná. Z každé množiny X_n vybereme jeden prvek x_n a tak získáme posloupnost $\big(x_n\big)$, kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \in D_f$, $x_n \neq a$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $\big|a - x_n\big| < 1/n$, je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Na druhou stranu ale pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f\big(x_n\big) \notin U_\varepsilon(A)$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f\big(x_n\big) \neq A$. $\square$

Věta. *Funkce $f(x)$ má v bodě a nejvýše jednu limitu, rovněž nejvýše jednu limitu zprava, resp. zleva.*

Důkaz. Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a zároveň $\lim_{x\to a} f(x) = B$, kde $A < B$. Pak existují disjunktní okolí $U_{\varepsilon_A}(A)$ a $U_{\varepsilon_B}(B)$, tj. taková okolí, jejichž průnik je prázdná množina. Ale protože $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} f(x) = B$, existují prstencová okolí $P_{\delta_A}(a)$ a $P_{\delta_B}(a)$ taková, že pro každé $x \in D_f \cap P_{\delta_A}(a)$ je $f(x) \in U_{\varepsilon_A}(A)$ a $x \in D_f \cap P_{\delta_B}(a)$ je $f(x) \in U_{\varepsilon_B}(B)$.

Protože a je hromadný bod D_f, je pro $\delta = \min\big(\delta_A, \delta_B\big)$ množina $D_f \cap U_\delta(a)$ neprázdná. Tedy pro $x \in D_f \cap P_\delta(a)$ je $f(x) \in U_{\varepsilon_A}(A) \cap U_{\varepsilon_B}(B) = \emptyset$. Ale to je spor, a tedy $A = B$. $\square$

Věta. *Funkce $f(x)$ je* **spojitá** *v bodě a právě tehdy, když je a izolovaný bod jejího definičního oboru nebo když existuje vlastní limita*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Důkaz. Nechť je funkce $f(x)$ spojitá v bodě a, který je hromadným bodem D_f. Podle definice spojitosti existuje ke každému okolí $U_\varepsilon\big(f(a)\big)$ takové okolí $U_\delta(a)$, že pro každé $x \in D_f \cap U_\delta(a)$ je $f(x) \in U_\varepsilon\big(f(a)\big)$. Protože $P_\delta(a) \subset U_\delta(a)$, platí pro každé $x \in D_f \cap P_\delta(a)$: $f(x) \in U_\varepsilon\big(f(a)\big)$, tj. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Naopak, je-li a izolovaným bodem množiny D_f, existuje okolí $P_\delta(a)$ takové, že $P_\delta(a) \cap D_f = \emptyset$. Protože $D_f \cap U_\delta(a) = \{a\}$, pro každé okolí $U_\varepsilon\big(f(a)\big)$ platí, že pro všechna $x \in D_f \cap U_\delta(a) = \{a\}$ je $f(x) = f(a) \in U_\varepsilon\big(f(a)\big)$.
Je-li bod a hromadným bodem D_f a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, pak ke každému okolí $U_\varepsilon\big(f(a)\big)$ existuje $P_\delta(a)$ takové, že pro každé $x \in D_f \cap P_\delta(a)$ je $f(x) \in U_\varepsilon\big(f(a)\big)$. Ale protože $U_\delta(a) = P_\delta(a) \cup \{a\}$ a $f(a) \in U_\varepsilon\big(f(a)\big)$, je $f(x)$ spojitá v bodě a. $\square$

☞ Příklad 7.1.

Funkce $f(x) = 2x$ je spojitá v každém bodě. Budeme-li hledat limitu například v bodě 3, pak podle předchozí věty je $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) = 6.$

☞ Příklad 7.2.

Funkce $g(x)$ definovaná vztahem $g(3) = 2$, $g(x) = 2x$ pro $x \neq 3$, se pro $x \neq 3$ shoduje s funkcí $f(x)$, tedy

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = 6.$$

Protože $g(3) = 2 \neq 6$, není funkce $g(x)$ v bodě 3 spojitá.

Věta. *Funkce $f(x)$ je* **spojitá zleva***, resp.* **spojitá zprava** *v bodě a právě tehdy, když*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)\,, \qquad \textit{resp.} \quad \lim_{x\to a-} f(x) = f(a)\,.$$

Věta. *Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, pak existuje okolí $P_\delta(a)$ takové, že je funkce $f(x)$ v tomto okolí omezená.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon = 1$. Pak existuje prstencové okolí $P_\delta(a)$ takové, že pro každé $x \in P_\delta(a)$ je $A - 1 < f(x) < A + 1$. $\square$

Věta. *Nechť je dána funkce $f(x)$ a bod a, který je hromadným bodem jejího definičního oboru. Pak existuje konečná limita funkce $f(x)$ v bodě a tehdy a jen tehdy, když je splněna Cauchy–Bolzanova podmínka: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dva body $x_1, x_2 \in D_f$, pro které $0 < |x_1 - a| < \delta$ a $|x_2 - a| < \delta$, platí: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.*

Věta. *Nechť existují vlastní limity* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. *Potom platí:* $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = A+B$, $\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = AB$. *Je-li navíc* $B \neq 0$, *pak* $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$.

Důkaz. 1) Protože $\left|f(x)+g(x)-A-B\right| \leq \left|f(x)-A\right| + \left|g(x)-B\right|$, stačí k danému $\varepsilon > 0$ uvažovat takové $P_\delta(a)$, aby pro každé $x \in P_\delta(a)$ bylo $f(x) \in U_{\varepsilon/2}(A)$, $g(x) \in U_{\varepsilon/2}(B)$.

2) Protože má $f(x)$ konečnou limitu, existuje okolí $P_\Delta(a)$, na němž je $f(x)$ omezená, tedy existuje takové $K > 0$, že pro každé $x \in P_\Delta(a)$ je $\left|f(x)\right| < K$. Protože $\left|f(x)g(x)-AB\right| = \left|f(x)\big(g(x)-B\big)+B\big(f(x)-A\big)\right| \leq \left|f(x)\right|\cdot\left|g(x)-B\right|+|B|\cdot\left|f(x)-A\right| < K\cdot\left|g(x)-B\right|+|B|\cdot\left|f(x)-A\right|$, stačí zvolit $P_\delta(a) \subset P_\Delta(a)$, kde vhodně odhadneme $\left|f(x)-A\right|$ a $\left|g(x)-B\right|$.

3) Existuje okolí $P_\Delta(a)$ takové, že pro každé $x \in P_\Delta(a)$ je $g(x) > |B|/2$ a funkce $1/g(x)$ má smysl. Pro každé $x \in P_\Delta(a)$ pak platí: $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{\left|B-g(x)\right|}{\left|Bg(x)\right|} < \frac{2\left|B-g(x)\right|}{B^2}$. K danému $\varepsilon > 0$ stačí zvolit $P_\delta(a) \subset P_\Delta(a)$ takové, aby pro každé $x \in P_\delta(a)$ bylo $\left|B-g(x)\right| < \frac{B^2}{2}\varepsilon$. $\square$

Home

Obsah

Strana 237

Zpět

Fullscreen

Tisk

Zavřít

Konec

Poznámka: Předchozí věta platí i v případě, kdy A, $B \in \mathbb{R}^*$, a příslušné operace jsou v $\mathbb{R}^*$ definovány.

Věta. *Předpokládejme, že* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$. *Nechť existuje okolí* $P_\Delta(a)$ *takové, že pro každé* $x \in D_f \cap P_\Delta(a)$ *je* $f(x) \neq A$. *Pak je* $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$.

Důkaz. Nechť je dáno okolí $U_\varepsilon(B)$. Pak existuje prstencové okolí $P_\eta(A)$ bodu A takové, že pro každé $y \in D_g \cap P_\eta(A)$ je $g(y) \in U_\varepsilon(B)$. Ale protože je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, existuje prstencové okolí $P_{\delta_1}(a)$ takové, že pro každé $x \in D_f \cap P_{\delta_1}(a)$ je $f(x) \in U_\eta(A)$. Nechť je $P_\delta(a)$ prstencové okolí bodu a takové, že $P_\delta(a) \subset P_\Delta(a) \cap P_{\delta_1}(a)$. Pak pro každé $x \in D_f \cap P_\delta(a)$ platí $f(x) \in U_\eta(A) \setminus \{A\} = P_\eta(A)$. Tedy pro taková x je $h(x) = g\big(f(x)\big) \in U_\epsilon(B)$. $\square$

☛ *Příklad 7.3.*

Nechť $f(x) = 0$ a $g(x) = 0$ pro $x \neq 0$, $g(0) = 1$. Pak je $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, ale $\lim\limits_{x\to 0} g\big(f(x)\big) = 1$, protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $g\big(f(x)\big) = 1$. Předpoklad existence $P_\Delta(a)$ v předcházející větě je tedy podstatný.

Věta. *Nechť jsou dány funkce* $f(x), g(x)$, *nechť existuje takové okolí* $P_\Delta(a)$ *že pro všechna* $x \in D_f \cap P_\Delta(a)$ *je*

$$f(x) \le g(x)\,.$$

Existují-li limity $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *a* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *pak platí:*

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

Důkaz. Předpokládejme, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Pak existují okolí $U_{\varepsilon_A}(A)\,,\ U_{\varepsilon_B}(B)$, pro která je $U_{\varepsilon_A}(A) \cap U_{\varepsilon_B}(B) = \emptyset$. Proto pro každé $y_A \in U_\varepsilon(A)$, $y_B \in U_{\varepsilon_B}(B)$ je $y_A > y_B$. Zároveň však existuje okolí $P_\delta(a) \subset P_\Delta(a)$ takové, že pro každé $x \in U_\delta(a)$ je $f(x) \in U_{\varepsilon_A}(A)\,,$ $g(x) \in U_{\varepsilon_B}(B)$. Z toho plyne $f(x) > g(x)$, což je spor. $\square$

Poznámka. I když je $f(x) < g(x)$, může platit:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

☛ ***Příklad 7.4.***

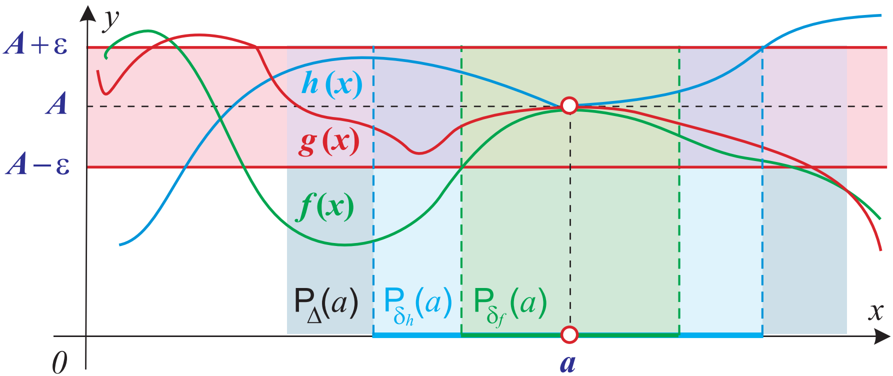
Uvažujme funkce $f(x) = -2x$, $g(x) = 2x$. V každém $P_\Delta(0)$ platí:

$$f(x) < g(x),$$

přitom je

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)\,.$$

Věta. *Nechť* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, *nechť existuje* $P_\Delta(a)$ *takové, že pro všechna* $x \in P_\Delta(a)$ *platí:* $f(x) \le g(x) \le h(x)$. *Potom je také* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.



Důkaz. Nechť je dáno $U_\varepsilon(A)$. Pak existují $P_{\delta_f}(a)$ a $P_{\delta_h}(a)$ taková, že pro každé $x \in P_{\delta_f}(a)$ je $f(x) \in U_\varepsilon(a)$ a pro každé $x \in P_{\delta_h}(a)$ je $h(x) \in U_\varepsilon(A)$. Označme $P_\delta(a) = P_{\delta_f}(a) \cap P_{\delta_h}(a)$. Pro každé $x \in P_\delta(a)$ zřejmě platí: $A - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < A + \varepsilon$. $\square$

Důsledek. *Nechť existuje číslo* $\delta > 0$ *tak, že pro každé* $x \in P_\delta(a)$ *platí*

(i) $|g(x)| \leq h(x)$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$. *Pak je* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

(ii) $f(x) \leq g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. *Pak je* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

(iii) $g(x) \leq h(x)$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = -\infty$. *Pak je* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$.

Věta. *Existuje-li* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *pak platí:* $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to a} f(x)|$.

Důkaz. Plyne přímo z definice limity. $\square$

Věta. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *právě tehdy, když* $\lim\limits_{x\to a} \big|f(x)\big| = 0$.

Důkaz. Přepsání definice obou limit. $\square$

Věta. *Nechť* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *a existuje okolí* $P_\Delta(a)$ *takové, že funkce* $g(x)$ *je omezená na* $P_\Delta(a)$. *Pak je* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$.

Důkaz. Protože je funkce $g(x)$ omezená na $P_\Delta(a)$, existuje $K > 0$ takové, že pro všechna $x \in P_\Delta(a)$ je $\left|g(x)\right| < K$. Na tomto okolí tedy platí: $\left|f(x)\cdot g(x)\right| < K\left|f(x)\right|$.

Protože je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takové okolí $P_\delta(a) \subset P_\Delta(a)$, že pro každé $x \in P_\delta(a)$ je $\left|f(x)\right| < \varepsilon/K$. Pro všechna $x \in P_\delta(a)$ tedy platí: $\left|f(x)\cdot g(x)\right| < K\,\dfrac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$.

☛ ***Příklad 7.5.***

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\sin x = 0$, neboť $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $|\sin x| \le 1$.

Věta. *Nechť* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *a nechť existuje okolí* $P_\Delta(a)$ *tak, že pro každé pro* $x \in P_\Delta(a)$ *platí:*

(i) $f(x) > 0$. *Pak* $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

(ii) $f(x) < 0$. *Pak* $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Důkaz. K danému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in P_\delta(a)$ je $|f(x)| < \varepsilon$. Pak platí $1/|f(x)| > \varepsilon$ a odtud plynou obě dokazovaná tvrzení.

Věta. *Jestliže* $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$, *pak* $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Důkaz. Analogicky s důkazem předchozí věty.

Věta. *Nechť existuje* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$*. Pak existuje takové okolí* $P_\delta(a)$ *, že platí:*

(i) *je-li* $A > 0$ *, pak je* $f(x) > 0$ *pro všechna* $x \in P_\delta(a)$ *,*

(ii) *je-li* $A < 0$ *, pak je* $f(x) < 0$ *pro všechna* $x \in P_\delta(a)$ *.*

Důkaz. (i) Uvažujme $\varepsilon = A/2 > 0$. Pak existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in P_\delta(a)$ je

$$0 < \frac{A}{2} = A - \frac{A}{2} = A - \varepsilon < f(x)\,.$$

(ii) Analogicky: uvažujme $\varepsilon = -A/2 > 0$. Pak existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in P_\delta(a)$ je

$$f(x) < A + \varepsilon = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} < 0\,.$$

Poznámka. Uvedené věty platí i pro limity zleva a zprava.

☛ *Příklad 7.6.*

Vypočítejme limitu funkce

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} \qquad \text{v bodě} \quad a = 1\,.$$

Řešení. $1 \in D_f$, funkce $f(x)$ je v tomto bodě spojitá, limita je rovna funkční hodnotě:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} = \frac{-2}{-9} = \frac{1}{4}\,.$$

☛ ***Příklad 7.7.***

Vypočítejme limitu funkce

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} \qquad \text{v bodě} \quad a = 3\,.$$

Řešení. 3 nepatří do D_f, je však jeho hromadným bodem. Při hledání limity pracujeme vždy s prstencovým okolím daného bodu, kde můžeme psát:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} = \frac{(x-3)(x^2 - 2x + 2)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(x^2 - 2x + 2)}{(x+3)}\,.$$

Vzniklá funkce je v bodě 3 spojitá a její limita, která je rovna limitě původní funkce, je rovna $5/6$.
V takovýchto případech můžeme psát přímo:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2 - 2x + 2)}{(x-3)(x+3)} = \\ = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2 - 2x + 2)}{(x+3)} = \frac{5}{6}$$

☛ Příklad 7.8.

Vypočítejme limitu funkce

$$f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{2x^3 + 4x^2 - 9x + 3} \qquad \text{v bodě} \quad a = +\infty\,.$$

Řešení. $+\infty$ je hromadným bodem D_f ; postup je stejný jako při hledání limit posloupností:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(3 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{8}{x^2} - \dfrac{6}{x}\right)}{x^3\left(2 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{9}{x^2} + \dfrac{3}{x}\right)} = \frac{3}{2}$$

Home
Obsah
Strana 248
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

☛ ***Příklad 7.9.***

Vypočítejme limitu funkce

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{3x} \qquad \text{v bodě} \quad a = 0\,.$$

Řešení. Bod $a = 0$ nepatří do D_f, ale je jeho hromadným bodem.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{3x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{3x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+4-4}{3x(\sqrt{x+4}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{3x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \frac{1}{6}\,.$$

☛ Příklad 7.10.

Vypočítejme limitu funkce

$$f(x) = x\left(\sqrt{x^2+4} - x\right) \qquad \text{v bodě} \quad a = +\infty\,.$$

Řešení. Bod $a = +\infty$ je hromadným bodem D_f.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} x\left(\sqrt{x^2+4} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{x^2+4} - x\right)\left(\sqrt{x^2+4} + x\right)}{\sqrt{x^2+4} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(x^2+4-x^2\right)}{\sqrt{x^2+4} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} + 1} = \frac{4}{2}\,.$$

PŘEDNÁŠKA 8

DERIVACE FUNKCE

8.1 Pojem derivace

Definice 1. Derivace funkce v bodě.
Nechť je dána funkce $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a bod x_0, který je vnitřním bodem definičního oboru D_f. Existuje-li limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

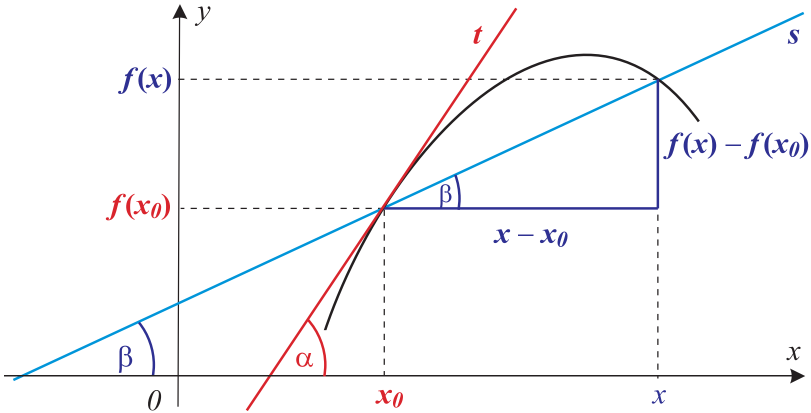
nazveme ji **derivace funkce** $f(x)$ **v bodě** x_0 **.**

Poznámka. Pro derivaci funkce $f(x)$ v bodě x_0 se rovněž používá označení

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0).$$

Označíme-li $h = x - x_0$, pak můžeme definiční vztah přepsat ve tvaru:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$



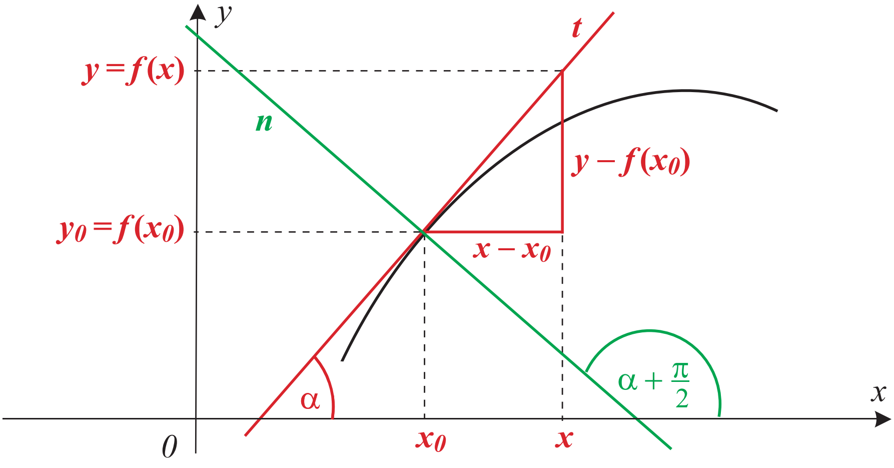
Směrnice sečny s : $\xrightarrow[x\to x_0]{}$ **Směrnice tečny** t :

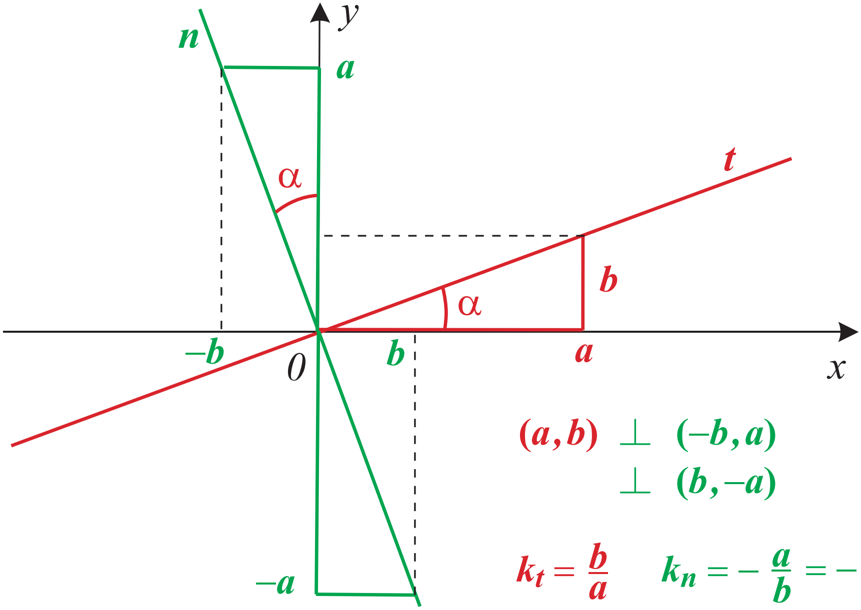
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tečna a normála ke grafu funkce

Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 udává směrnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ procházející bodem $(x_0, f(x_0))$. Pro souřadnice libovolného bodu této tečny proto platí:

$$k_t = f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{neboli} \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,.$$





$$(a, b) \perp (-b, a)$$
$$\perp (b, -a)$$

$$k_t = \frac{b}{a} \qquad k_n = -\frac{a}{b} = -\frac{a}{b}$$

Home
Obsah
Strana 255
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Normála ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$ je kolmá na tečnu, její směrnice je proto

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

a pro libovolný bod normály platí: $k_n = -\dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{y - f(x_0)}{x - x_0}.$

Získali jsme tedy rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$:

tečna $t: \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

normála $n: \quad y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Definice 2. Nechť je dána funkce $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a bod x_0, který je vnitřním bodem definičního oboru D_f. Jestliže existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + h\tau(h), \qquad \text{kde} \quad \lim_{h \to 0} = \tau(h),$$

nazývá se lineární funkce

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = Ah$$

diferenciál funkce $f(x)$ bodě x_0.

Má-li funkce $f(x)$ diferenciál v bodě x_0, říkáme, že je **diferencovatelná v bodě x_0.**

Jinými slovy, funkce $f(x)$ je diferencovatelná v bodě $x_0 \in D_f$ právě tehdy, když ji lze v okolí bodu x_0 aproximovat lineární funkcí ve výše zmíněném smyslu: $f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + Ah$.

Věta. *Funkce f je diferencovatelná v bodě x_0 právě tehdy, když existuje konečná derivace $f'(x_0)$. V takovém případě je $\mathrm{d}f(x_0; h) = f'(x_0)h$.*

Důkaz. Nechť je funkce $f(x)$ diferencovatelná v bodě x_0. Pak existuje konstanta $A \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0\,,$$

tj. $$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - A \right) = f'(x_0) - A = 0\,.$$

Proto $\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)h$.

Naopak, nechť existuje $f'(x_0)$. Označme

$$\tau(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h}\,.$$ Pak je

$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0\,.$$

8.2 Fyzikální aplikace derivace

Značí-li $s(t)$ dráhu, kterou urazil po přímce se pohybující hmotný bod v čase t od okamžiku, kdy jsme začali čas měřit, pak podíl

$$v_p = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

představuje **průměrnou rychlost** tohoto pohybu mezi časovými okamžiky t_0 a t. Výraz

$$v(t_0) = \lim_{x \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

potom udává **okamžitou rychlost** pohybu v čase t_0.

Podobně

$$a(t_0) = \lim_{x \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

udává **okamžité zrychlení** pohybu v čase t_0.

8.3 Ekonomické aplikace derivace

- Označme symbolem TC **celkové náklady (total cost)**, které jsou funkcí určitého vstupu, resp. výrobního faktoru F. Průměrné rychlosti budou odpovídat **průměrné náklady** AC **(average cost)** a okamžité rychlosti budou odpovídat **mezní náklady** MC **(marginal cost)**:
$$MC = \frac{\mathrm{d}TC}{\mathrm{d}F}\,.$$
- Označme symbolem TP **celkový produkt (total product)**, který je funkcí určitého vstupu F. Průměrné rychlosti bude odpovídat **průměrný produkt** AP **(average product)** a okamžité rychlosti bude odpovídat **mezní produkt** MP **(marginal cost)**:
$$MP = \frac{\mathrm{d}TP}{\mathrm{d}F}\,.$$
- Označme symbolem TU **celkový užitek (total utility)**, který je funkcí množství spotřebovávaného statku Q. Okamžité rychlosti bude odpovídat **mezní užitek** MU **(marginal utility)**:
$$MU = \frac{\mathrm{d}TU}{\mathrm{d}Q}\,.$$

Definice 3. Jednostranné derivace.
Nechť je dána funkce $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a takový bod x_0 , že pro nějaké $\delta > 0$ je $\langle x_0, x_0 + \delta) \subset \mathrm{D}_f$. Existuje-li limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \, ,$$

nazveme ji **derivace zprava funkce $f(x)$ v bodě x_0 .**

Je-li pro nějaké $\delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0\rangle \subset \mathrm{D}_f$ a existuje-li limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \, ,$$

nazveme ji **derivace zleva funkce $f(x)$ v bodě x_0 .**

Definice 4. Derivace na intervalu.

Má-li funkce f derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (a,b), pak funkci f', která každému bodu $x \in (a,b)$ přiřazuje hodnotu derivace $f'(x)$, nazýváme **derivací funkce f na otevřeném intervalu (a,b).**

Má-li funkce f derivaci na otevřeném intervalu (a,b) a má-li obě jednostranné derivace $f'(a+)$, $f'(b-)$, pak funkci f', definovanou předpisem

$$f'(x) = \begin{cases} f'(a+) & \text{pro } x = a\,, \\ f'(x) & \text{pro } x \in (a,b)\,, \\ f'(b-) & \text{pro } x = b \end{cases}$$

nazýváme **derivací funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$.**

8.4 Vlastnosti derivace

Věta (Vztah mezi spojitostí a derivací).

Má-li funkce f derivaci v bodě x_0, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz. Existuje-li v bodě x_0 derivace funkce $f(x)$, pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left[f(x_0) + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right] =$$

$$= f(x_0) + \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0) =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0)\ .$$

Funkce $f(x)$ je tedy v bodě x_0 spojitá.

Poznámka. Obrácené tvrzení neplatí, neboť například funkce $f(x) = |x|$ je spojitá v bodě 0, ale nemá v něm derivaci.

Věta (Algebraické operace s derivacemi).

Mají-li funkce f a g derivace v bodě x_0, pak v tomto bodě existují i derivace funkcí kf, kde $k \in \mathbb{R}$, $f \pm g$ a fg a platí:

$$(kf)'(x_0) = kf'(x_0)\,, \tag{8.1}$$

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)\,, \tag{8.2}$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,. \tag{8.3}$$

Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, má také funkce $\dfrac{f}{g}$ derivaci v bodě x_0 a platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,. \tag{8.4}$$

Stejné vztahy platí pro derivace funkcí na intervalu.

Důkaz.

$$(kf)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{kf(x_0+h) - kf(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} k\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = kf'(x_0)$$

$$(f \pm g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x_0+h) \pm g(x_0+h)) - (f(x_0) \pm g(x_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x_0+h) - f(x_0)) \pm (g(x_0+h) - g(x_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} =$$

$$= f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} g(x_0+h) + \lim_{h\to 0} f(x_0) \frac{(g(x_0+h) - g(x_0))}{h} =$$

$$= f'(x_0)g(x_0) \pm f(x_0)g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right) =$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Věta (Derivace složené funkce).

Existuje-li derivace funkce g v bodě x_0 a derivace funkce f v bodě $g(x_0)$, pak existuje také derivace složené funkce $h = f \circ g$ v bodě x_0 a platí:

$$h'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)\,. \tag{8.5}$$

Věta (Derivace inverzní funkce).

Nechť funkce $x = f(y)$ je ryze monotónní v intervalu J a nechť má derivaci $f'(y_0) \neq 0$ v bodě $y_0 \in J$. Pak také inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$ má derivaci v bodě $x_0 = f(y_0) \in I = f(J)$ a platí:

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} \equiv \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}\,. \tag{8.6}$$

Důkaz. Dokazované tvrzení plyne limitním přechodem v rovnosti

$$\frac{f^{-1}(x-x_0) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\dfrac{x - x_0}{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}} = \frac{1}{\dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}}.$$

8.5 Derivace elementárních funkcí

(i) Derivace konstatntní funkce $f(x) = c$ je v každém bodě rovna nule, $(c)' = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$$(c)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

(ii) $(x)' = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$$(x)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

(iii) $(x^2)' = 2x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$$(x^2)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(2x+h)h}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 1$$

(iv) $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro každé $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}h + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right) h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}$$

Home
Obsah
Strana 270
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

(v) $(\sin x)' = \cos x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(x + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)}{h} =$$
$$= \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

Tímto způsobem je možné odvodit derivace všech základních elementárních funkcí – uveďme zde jejich přehled.

$$
\begin{aligned}
(c)' &= 0, && x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) = c\,;\\
(x^n)' &= nx^{n-1}\,, && n \in \mathbb{N}\,, x \in \mathbb{R}\,;\\
& && n \in \mathbb{Z}\,, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,;\\
& && n \in \mathbb{R}\,,\ x > 0;\\
(e^x)' &= e^x\,, && x \in \mathbb{R};\\
(a^x)' &= a^x \ln a; && x \in \mathbb{R},\ a \in (0; \infty);\\
(\ln |x|)' &= \frac{1}{x}; && x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\\
(\log_a |x|)' &= \frac{1}{x \ln a}; && x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ a \in (0,1) \cup (1, \infty);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x; && x \in \mathbb{R}; \\
(\cos x)' &= -\sin x; && x \in \mathbb{R}; \\
(\sinh x)' &= \cosh x; && x \in \mathbb{R}; \\
(\cosh x)' &= \sinh x; && x \in \mathbb{R}; \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}; && x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}; \\
(\operatorname{cotg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x}; && x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z}; \\
(\operatorname{tgh} x)' &= \frac{1}{\cosh^2 x}; && x \in \mathbb{R}; \\
(\operatorname{cotgh} x)' &= \frac{-1}{\sinh^2 x}; && x \in \mathbb{R} - \{0\};
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; & x &\in (-1,1);\\
(\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}; & x &\in (-1,1);\\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}; & x &\in \mathbb{R};\\
(\operatorname{arccotg} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}; & x &\in \mathbb{R};\\
(\operatorname{argsinh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}; & x &\in \mathbb{R};\\
(\operatorname{argcosh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}; & x &\in (1,\infty);\\
(\operatorname{argtgh} x)' &= \frac{1}{1-x^2}; & x &\in (-1,1);\\
(\operatorname{argcotgh} x)' &= \frac{1}{1-x^2}; & x &\in (-\infty,-1)\cup(1,\infty).
\end{aligned}$$

☛ Příklad 8.1.

(a) $$f(x) = 5x^6 + 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 3x + 12$$

$$f'(x) = 5 \cdot 6x^5 + 2 \cdot 4x^3 + 7 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 3 + 0 =$$

$$= 30x^5 + 8x^3 + 21x^2 - 8x + 3$$

(b) $$f(x) = \frac{x^4 - 2}{3x^2 - 12}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3(3x^2 - 12) - (x^4 - 2)6x}{(3x^2 - 12)^2} = \frac{6x^5 - 48x^3 + 12x}{9x^4 - 72x^2 + 144}$$

(c) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt[5]{x^4}$$

(d) $f(x) = \sin(x^5 + 3x)$

$$f'(x) = \cos(x^5 + 3x) \cdot (5x^4 + 3) = (5x^4 + 3)\cos(x^5 + 3x)$$

(e) $f(x) = (\sin(x^5 + 3x))^4$

$$f'(x) = 4\,(\sin(x^5 + 3x))^3 \cdot \cos(x^5 + 3x) \cdot (5x^4 + 3)$$

(f) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{\ln(\sin x)^{\cos x}}\right)' = \left(\mathrm{e}^{\cos x \ln \sin x}\right)' =$$

$$= \mathrm{e}^{\cos x \ln \sin x} \cdot (-\sin x \ln \sin x + \cos x \frac{1}{\sin x} \cos x) =$$

$$= (\sin x)^{\cos x} (-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x})$$

(g) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$$

PŘEDNÁŠKA 9

DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

9.1 Derivace a diferenciály vyšších řádů

Definice 1. Má-li funkce f' derivaci v každém bodě intervalu I, pak její derivaci

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = (f')'(x)$$

nazýváme **druhou derivací funkce f na intervalu I.**

Je-li $n \in \mathbb{N}\,, n = 2, 3, \cdots\,,$ pak **n-tou derivaci funkce f na intervalu** I definujeme rekurentně vztahem

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n-1)}(x)\,, \quad x \in I\,,$$

pokud tyto derivace na I existují. Hovoříme též o **derivaci n-tého řádu na intervalu** I.

Je-li $I = D_f$, hovoříme o **derivaci n-tého řádu funkce** f.

Pro sjednocení symboliky zavádíme označení $f^{(0)} \equiv f$.

☛ *Příklad 9.1.*

Nalezněte třetí derivaci funkce

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 1\,.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10x^4 - 12x^3 + 15x^2 + 6x + 5 \\ f''(x) &= 40x^3 - 36x^2 + 30x + 6 \\ f'''(x) &= 120x^3 - 72x + 30 \end{aligned}$$

Definice 2. Má-li funkce f v bodě x_0 n-tou derivaci $f^{(n)}(x_0)$, pak mocninnou funkci proměnné $h \in \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$\mathrm{d}^n f(a; h) = f^{(n)}(a) h^n$$

nazýváme **diferenciál n-tého řádu funkce f v bodě x_0.**

Home
Obsah
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Strana 280
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

Věta (Leibnizovo pravidlo)

Nechť mají funkce f, g v bodě x_0 derivaci až do řádu n včetně. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0)\,,$$

kde $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ..

Poznámka. Například:

$$\begin{aligned} (uv)' &= uv' + u'v \\ (uv)'' &= uv'' + 2u'v' + u''v \\ (uv)''' &= uv''' + 3u'v'' + 3u''v' + u'''v \end{aligned}$$

Důkaz. Indukcí: pro $n = 1$ se jedná o derivaci součinu.
Nechť vztah platí pro n. Jeho derivací dostaneme

$$\big(f(x)g(x)\big)^{(n+1)} = \Big(\big(f(x)g(x)\big)^{(n)}\Big)' =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) =$$

$$= f^{(n+1)}(x)g(x) + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) +$$

$$+ f(x) g^{(n+1)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)\,.$$

Poznámka: Množinu všech funkcí $f : X \to \mathbb{R}$, které mají na množině X spojité derivace řádu n (a tedy i všechny derivace nižšího řádu) budeme značit $C_n(X)$.

Pro funkce spojité na množině X se používá označení $C_0(X)$.

Množina všech funkcí $f : X \to \mathbb{R}$, které mají na množině X spojité derivace všech řádů se značí $C_\infty(X)$.
Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí inkluze:

$$C_\infty(X) \subset \cdots \subset C_n(X) \subset C_{n-1}(X) \subset \cdots \subset C_1(X) \subset C_0(X)$$

9.2 Taylorův polynom

Definice 3. Nechť má funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivace až do řádu n včetně. **Taylorovým polynomem n-tého stupně funkce f v bodě x_0** nazýváme polynom:

$$\mathrm{T}^n f(x_0; h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n$$

Díky následující větě lze Taylorův polynom použít k aproximaci funkce.

Věta (Taylor).

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná v intervalu $\langle a,b\rangle$ a v intervalu (a,b) má spojité derivace všech řádů. Pak pro každé dva body $x, x_0 \in \langle a,b\rangle$ existuje bod ξ mezi body x a x_0 takový, že platí tzv. Taylorův vzorec:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_{n+1}(x), \quad (9.1)$$

kde

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \quad (9.2)$$

Číslo $R_{n+1}(x)$ se nazývá **zbytek v Lagrangeově tvaru.**

☛ Příklad 9.2.

Nalezněte Taylorův vzorec pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$ v bodě $x = 0$.

Řešení.

Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$: $f^{(k)}(x) = (\mathrm{e}^x)^{(k)} = \mathrm{e}^x$, $f^{(k)}(0) = 1\,.$

Proto

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x), \quad R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}\,,$$

kde bod ξ leží mezi body 0 a x.

Podobně lze odvodit vzorce:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \\ + (-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} +$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} +$$

$$(-1)^n \frac{1}{(n+1)(\xi+1)^{n+1}} x^{n+1}, \quad x > -1$$

PŘEDNÁŠKA 10

MONOTONIE
A EXTRÉMY
FUNKCÍ

10.1 Monotonie funkce

Nechť má funkce f derivaci v intervalu $I = (a, b)$.

Věta. *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce f rostoucí v intervalu I.*

Důkaz. Uvažujme $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Máme dokázat, že $f(x_1) < f(x_2)$. Z Lagrangeovy věty plyne existence bodu $\xi \in (x_1, x_2)$, pro který

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1). \tag{10.1}$$

Z předpokladů $x_2 > x_1$ a $f'(\xi) > 0$ plyne, že na pravé straně rovnosti (10.1) je kladné číslo. Platí tedy $f(x_2) > f(x_1)$.

Důsledek. *Je-li funkce f klesající nebo nerostoucí v intervalu I a má tam derivaci, pak $f'(x) \leq 0$.*

Analogicky lze dokázat:

Věta. *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce f neklesající v intervalu I.*

Věta. *Jestliže $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce f klesající v intervalu I.*

Důkaz. Nechť $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Máme dokázat, že pak je $f(x_1) > f(x_2)$. Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi \in (x_1, x_2)$, pro které platí (10.1). Protože $x_2 > x_1$ a $f'(\xi) < 0$, je na pravé straně rovnosti (10.1) záporné číslo, tj. $f(x_2) < f(x_1)$.

Důsledek. *Je-li funkce f rostoucí nebo neklesající v intervalu I a má tam derivaci, pak $f'(x) \geq 0$.*

Věta. *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in I$, pak je funkce f nerostoucí v intervalu I.*

☛ ***Příklad 10.1.***

Určete intervaly monotonie funkce

$$f(x) = 12x - 2x^2 \,.$$

Řešení.

$$f'(x) = 12 - 4x = 4(3 - x) = 0 \qquad \text{pro} \quad x = 3\,;$$

$$f(x) > 0 \ \text{ pro } \ x < 3; \quad f(x) < 0 \ \text{ pro } \ x > 3.$$

Funkce je rostoucí v intervalu $(-\infty, 3)$, klesající v $(3, \infty)$.

10.2 Lokální extrémy funkce

Definice 1. Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D_f$ **lokální maximum**, resp. **lokální minimum**, právě tehdy, když existuje prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$, resp. $f(x) \geq f(x_0)$.

Nahradíme-li neostré nerovnosti nerovnostmi ostrými, mluvíme o **ostrém lokálním maximu**, resp. **ostrém lokálním minimu**.

Lokální maxima a minima nazýváme **lokální extrémy**, ostrá maxima a minima **ostré lokálními extrémy** funkce f.

Věta. *Nechť $x_0 \in D_f$ není hraničním bodem definičního oboru D_f funkce f . Je-li $f'(a) \neq 0$, nemá funkce f v bodě x_0 lokální extrém.*

Důkaz. Nechť $f'(x_0) = A \neq 0$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ je

$$A - \varepsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < A + \varepsilon\,.$$

Předpokládejme například, že $A > 0$ a zvolme $\varepsilon = \dfrac{A}{2}$. Pak pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ platí:

$$0 < \frac{A}{2} < \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

Pro $x > a$ je $f(x) > f(a)$ a pro $x < a$ je $f(x) < f(a)$, funkce f tedy nemá v bodě x_0 lokální extrém.
Případ $A < 0$ vyřešíme obdobně. $\square$

Poznámka. Z toho, že $f'(x_0) > 0$ nebo $f'(x_0) < 0$, neplyne, že existuje okolí bodu x_0 takové, že je na něm funkce $f(x)$ rostoucí, resp. klesající.

☛ ***Příklad 10.2.***

Uvažujme funkci $f(x) = x + \pi x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ pro $x \neq 0\,;\ f(0) = 0$. Platí $f'(0) = 1$, ale funkce není na žádném okolí bodu $x = 0$ rostoucí, protože pro dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$ je

$$f\left(\frac{1}{(2n+1/2)\pi}\right) > f\left(\frac{1}{(2n-1/2)\pi}\right).$$

Věta. *Nechť f je diferencovatelná funkce, nechť $f'(x_0) = 0$.*
Existuje-li prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$, $x < a$, je $f'(x) > 0$ a pro $x > x_0$ je $f'(x) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.
Existuje-li prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$, $x < x_0$, je $f'(x) < 0$ a pro $x > x_0$ je $f'(x) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.
Existuje-li prstencové okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$ je $f'(x) < 0$ nebo $f'(x) > 0$, nemá funkce f v bodě x_0 lokální extrém.

Důkaz. Je-li $f'(x) > 0$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f'(x) < 0$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, je funkce f na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ rostoucí, a tedy $f(x) < f(x_0)$, a na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ klesající, tedy $f(x) < f(x_0)$. To znamená, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 ostré lokální maximum.
Případ, kdy $f'(x) < 0$ pro $x < x_0$ a $f'(x_0) > 0$ pro $x > x_0$, se dokáže podobně.
Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in P_\delta(x_0)$, je funkce f rostoucí v $P_\delta(x_0)$ a nemá v bodě x_0 lokální extrém. Podobně v případě, že $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in P_\delta(x_0)$. $\square$

☛ *Příklad 10.3.*

Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x) = 12x - 2x^2\,.$$

Řešení.

$$f'(x) = 12 - 4x = 4(3 - x) = 0 \qquad \text{pro} \quad x = 3\,;$$

$$f(x) > 0 \;\text{ pro }\; x < 3; \qquad f(x) < 0 \;\text{ pro }\; x > 3.$$

Funkce je rostoucí v intervalu $(-\infty, 3)$, klesající v $(3, \infty)$, v bodě 3 proto má ostré lokální maximum, a to 18 .

10.3 Globální extrémy

Někdy je třeba nalézt **globální extrémy na kompaktní, tj. omezené a uzavřené množině** M. Jak již víme, je-li funkce $f(x)$ spojitá, existují v množině M body, ve kterých nabývá funkce $f(x)$ své největší a nejmenší hodnoty. Je zřejmé, že pokud není bod x hraničním bodem množiny M a existuje v tomto bodě nenulová derivace, nemá funkce $f(x)$ v tomto bodě globální extrém. Zbývá nám tedy vyšetřit ostatní body množiny M :

- hraniční body množiny M
- body, v nichž je derivace rovna nule
- body, ve kterých derivace neexistuje

Je-li těchto bodů pouze konečný počet, stačí pro nalezení extrémů vybrat body, ve kterých je největší a nejmenší hodnota funkce $f(x)$.

☛ *Příklad 10.4.*

Nalezněte globální extrémy funkce

$$f(x) = |x^3 - 3x|\,, x \in \langle -2\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle\,.$$

Řešení. Funkce f je spojitá na kompaktním intervalu $\langle -2\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle$, má proto na tomto intervalu globální maximum i minimum.

Podezřelé body:

- Krajní body intervalu, tj. $-2\sqrt{3}$ a $\sqrt{3}$
- $f'(x)$ neexistuje pro $-\sqrt{3}$, 0 a $\sqrt{3}$
- $f'(x) = 0$ pro $-1,\ 1$

Nyní stačí nalézt funkční hodnoty v podezřelých bodech:

$$f(-2\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}\,,\quad f(\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}) = f(0) = 0\,,$$

$$f(-1) = f(1) = 2\,.$$

Funkce f nabývá globálního maxima $18\sqrt{3}$ v bodě $-2\sqrt{3}$ a globálního minima 0 v bodech $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ a 0.

PŘEDNÁŠKA 11

PRŮBĚH FUNKCE

11.1 Konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body

Definice 1. Nechť funkce f má derivaci v bodě x_0. Říkáme, že f je **konvexní**, resp. **konkávní v bodě** x_0 právě tehdy, když existuje takové okolí $\mathrm{U}(x_0;\delta)$ bodu x_0, že graf funkce f pro $x \in \mathrm{U}(x_0;\delta)$ leží nad, resp. pod tečnou grafu v bodě x_0.

Říkáme, že funkce f je **konvexní**, resp. **konkávní v intervalu** (a,b) právě tehdy, když je konvexní, resp. konkávní v každém bodě intervalu (a,b).

Říkáme, že bod $x_0 \in \mathrm{D}_f$ je **inflexním bodem** funkce f právě tehdy, když v bodě $(x_0, f(x_0))$ existuje tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ a funkce se v tomto bodě mění z konvexní na konkávní nebo obráceně.

Věta. Podmínky pro konvexnost a konkávnost funkce.
Nechť funkce $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ *má derivaci v intervalu* (a,b)*. Pak platí:*

(i) *Je-li* f' *rostoucí v intervalu* (a,b)*, je funkce* f *konvexní v intervalu* (a,b)*.*

(ii) *Je-li* f' *klesající v intervalu* (a,b)*, je funkce* f *konkávní v intervalu* (a,b)*.*

(iii) *Má-li funkce* f' *v bodě* $x_0\in(a,b)$ *lokální extrém, je* x_0 *inflexním bodem funkce* f *.*

Odtud pak plyne:

Věta. *Nechť funkce* $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ *má druhou derivaci v intervalu* (a,b)*. Pak platí:*

(i) *Je-li* $f''(x)>0$ *pro všechna* $x\in(a,b)$*, je funkce* f *konvexní v intervalu* (a,b)*.*

(ii) *Je-li* $f''(x)<0$ *pro všechna* $x\in(a,b)$*, je funkce* f *konkávní v intervalu* (a,b)*.*

(iii) *Je-li* $f''(x_0)=0$ *a derivace* f'' *mění v bodě* $x_0\in(a,b)$ *znaménko, má funkce* f *v bodě* x_0 *inflexní bod.*

☛ *Příklad 11.1.*

Nalezněte inflexní body funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2x + 2\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

a určete intervaly konvexnosti a konkávnosti.

Řešení. $f''(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 0$ pro $x = -1$ a $x = 1$. Dále platí, že $f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ a $f''(x) < 0$ pro $x \in (-1, 1)$:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\smile$	inf. bod	$\frown$	inf. bod	$\smile$

Daná funkce je tedy konvexní v intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, konkávní v intervalu $(-1, 1)$. Druhá derivace mění znaménko v bodech $x = -1$ a $x = 1$, takže funkce má dva inflexní body, a to $x = -1$ a $x = 1$.

11.2 Asymptoty grafu funkce

Definice 2. Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **svislou** (**vertikální**) **asymptotu** $x = x_0$ právě tehdy, když alespoň jedna jednostranná limita je v tomto bodě nevlastní.

Říkáme, že funkce f má v bodě ∞, resp. $-\infty$ **vodorovnou** (**horizontální**) **asymptotu** $y = b$ právě tehdy, když

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b\,, \quad \text{resp.} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b\,.$$

Říkáme, že funkce f má v bodě ∞, resp. $-\infty$ **šikmou asymptotu** $y = kx + q\,,\ k, q \in \mathbb{R}\,,\ k \neq 0\,,$ právě tehdy, když

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx - q) = 0\,, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx - q) = 0.$$

Věta. *Má-li funkce f v bodě ∞ šikmou asymptotu $y = kx + q$, pak platí*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = q\,.$$

Důkaz. Rovnost pro výpočet k plyne ze vztahu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k - \lim_{x\to\infty} \frac{q}{x} = 0.$$

Rovnost pro výpočet q plyne přímo z definice šikmé asymptoty.

☛ ***Příklad 11.2.***

Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Funkce f není definovaná v okolí bodu $x = 0$; Protože

$$\lim_{x\to 0-} \frac{2x^2 + x + 1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{2x^2 + x + 1}{x} = \infty,$$

je přímka $x = 0$ svislou asymptotou grafu funkce f.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^2} = 2 = k$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^2 + x + 1}{x} - 2x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x + 1 - 2x^2}{x} = 1 = q\,.$$

Jelikož obě limity jsou vlastní, má graf dané funkce v bodě ∞ šikmou asymptotu $y = 2x + 1$. Stejná přímka je šikmou asymptotou grafu funkce f také v bodě $-\infty$.

☛ ***Příklad 11.3.***

Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}\,, \qquad x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty).$$

Řešení. Nejdříve vyšetříme chování funkce v okolí bodů $x = -1$ a $x = 1$, v nichž funkce není definovaná:

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = -\infty\,.$$

Přímky o rovnicích $x = -1$ a $x = 1$ jsou tedy svislými asymptotami grafu dané funkce.
Dále je

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0,$$

takže funkce f má v bodech $\pm\infty$ vodorovnou asymptotu

$$y = 0\,.$$

☛ *Příklad 11.4.*

Nalezněte všechny asymptoty grafu funkce

$$f(x) = \ln x - 5x\,, \qquad x \in (0, \infty).$$

Řešení. Nejdříve vyšetříme chování funkce v pravém okolí bodů $x = 0$, který leží na hranici definičního oboru. Platí $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, takže přímka o rovnici $x = 0$ je svislou asymptotou grafu dané funkce. Dále je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, takže by funkce mohla mít v bodě ∞ šikmou asymptotu. Budeme tedy hledat limity:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x - 5x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} - 5 = -5.$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (\ln x - 5x + 5x) = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$$

Druhá limita je nevlastní, funkce proto šikmou asymptotu nemá.

11.3 Vyšetřování průběhu funkce

Při vyšetřování průběhu funkce postupně hledáme:

- Definiční obor funkce, body nespojitosti, nulové body funkce, intervaly, kde je funkce kladná a kde je záporná
- Zvláštní vlastnosti funkce, např. sudost, lichost, periodičnost, prostota, omezenost.
- Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti funkce a v krajních bodech definičního oboru.
- Intervaly monotonie
- Stacionární body, lokální extrémy funkce.
- Intervaly konvexnosti a konkávnosti, inflexní body.
- Asymptoty grafu funkce.
- Graf funkce sestrojujeme na základě takto získaných informací a pomocí dalších údajů jako jsou např.
  - hodnoty funkce v některých význačných bodech (nulové body první a druhé derivace dané funkce);
  - průsečíky grafu funkce s osami souřadnic;
  - tečny v inflexních bodech funkce.

☛ ***Příklad 11.5.***

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

Řešení.

$$\mathrm{D}_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Funkce není ani sudá, ani lichá, neboť neplatí žádná z rovností $f(-x) = f(x)$ nebo $f(-x) = -f(x)$ pro všechna $x \in \mathrm{D}_f$. Dále pro žádné $c \neq 0$ neplatí rovnost $f(x+c) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathrm{D}_\mathsf{f}$, funkce proto není ani periodická. Žádnou z takových speciálních vlastností tedy nebudeme moci při konstrukci grafu využít.

Bod $x = -1$ je bodem nespojitosti a pro jednostranné limity funkce v tomto bodě platí

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1-} f(x) = -\infty.$$

Pro limity ve zbývajících dvou bodech hranice definičního oboru platí:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$ je funkce spojitá. Pro x záporná nabývá záporné hodnoty, pro x kladná kladné hodnoty. Graf protíná obě souřadnicové osy v počátku.

Derivace

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$

má dva nulové body $x = -3$ a $x = 0$, takže funkce má dva stacionární body $x = -3$ a $x = 0$. Je $f(0) = 0$ a $f(-3) = -27/8$. Derivace $f'(x)$ je kladná pro $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$ a záporná pro $x \in (-3, -1)$, takže funkce je v intervalech $(-\infty, -3)$ a $(-1, \infty)$ rostoucí, v intervalu$(-3, -1)$ klesající. Tedy v bodě $x = -3$ je lokální maximum $f(-3) = -27/8$.

Druhá derivace

$$f''(x) = \frac{3x}{(x+1)^4}$$

má jeden nulový bod $x = 0$. Pro x záporná nabývá záporné hodnoty, pro x kladná kladné hodnoty. Funkce f je tedy v intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$ konkávní a v intervalu $(0, \infty)$ konvexní. Bod $x = 0$ je inflexním bodem.

Z hodnot limit v bodě -1 plyne, že přímka $x = -1$ je svislou asymptotou grafu funkce f. Jelikož funkce má v nevlastních bodech limity $\pm\infty$, má smysl pokoušet se najít rovnici šikmé asymptoty. Vypočteme nejdříve limitu

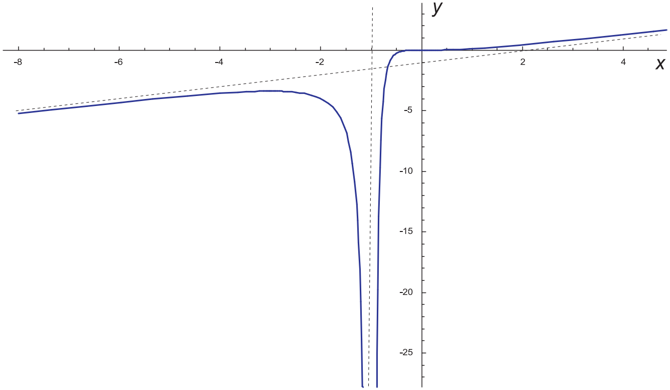
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2} = k$$

a limitu

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x(x+1)^2}{2(x+1)^2}\right] = -1 = q\,.$$

Jelikož obě limity jsou vlastní, má graf dané funkce v bodě ∞ šikmou asymptotu o rovnici $y = x/2 - 1$. Stejná přímka je šikmou asymptotou grafu funkce f také v bodě $-\infty$.
Údaje o funkci, získané během výpočtu, můžeme zanést do tabulky, která může mít např. takovýto tvar:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\infty)$
$f(x)$	$-\infty \leftarrow$	$-\frac{27}{8}$	$\rightarrow -\infty$	N	$-\infty \leftarrow$	0	$\rightarrow \infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$
$f''(x)$	$-$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$\frown$		$\frown$		$\frown$	inf. bod	$\smile$
asym.	$y=\frac{x}{2}-1$			$x=-1$			$y=\frac{x}{2}-1$



PŘEDNÁŠKA 12

NEURČITÝ INTEGRÁL

12.1 Primitivní funkce

Definice 1. Nechť je dána funkce f definovaná v otevřeném (omezeném nebo neomezeném) intervalu (a,b). Každou funkci F, pro kterou platí:

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro každé } x \in (a,b)\,,$$

nazveme **primitivní funkcí k funkci** f **v intervalu** (a,b).

Příklad 12.1.

(a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = x^3$ v intervalu $(-\infty,+\infty)$.

(b) $F(x) = -x^{-1}$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = x^{-2}$ v intervalu $(-\infty,0)$ a v intervalu $(0,+\infty)$, nikoli však např. v intervalu $(-1,5)$, kde leží bod $0 \notin D_f$.

Poznámka. Je-li F primitivní funkce k funkci f v intervalu (a, b), pak zřejmě i každá funkce tvaru $G(x) = F(x)+c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je primitivní funkcí k funkci f v (a, b). Následující věta říká, že tímto jsou již všechny primitivní funkce vyčerpány:

Věta. *Jsou-li F, G dvě primitivní funkce k funkci f v intervalu (a, b), pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$, že pro všechna $x \in (a, b)$ platí:*

$$G(x) = F(x) + c\,.$$

Definice 2. Má-li funkce f nějakou primitivní funkci na intervalu (a, b), pak množinu všech jejích primitivních funkcí v (a, b) nazýváme **neurčitým integrálem funkce f v intervalu** (a, b). Pro neurčitý integrál funkce f používáme symbol $\int f$ nebo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Symbol $\int$ se nazývá **integrační znak**, funkce f se nazývá **integrand**. Proměnná x se nazývá **integrační proměnná** (nezáleží na tom, jaký symbol použijeme k označení integrační proměnné).

Poznámka. Je-li funkce F primitivní k funkci f v intervalu (a, b), pak píšeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c\,.$$

Konstanta c se nazývá **integrační konstanta**. Chceme-li z integrálu získat jednu primitivní funkci, musíme pevně zvolit hodnotu integrační konstanty.

Věta (Aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru).

1. *Má-li funkce f integrál v intervalu (a, b) a je-li I otevřený podinterval intervalu (a, b), pak funkce f má integrál také v intervalu I.*
2. *Má-li funkce f integrál v intervalech $I_1, I_2, \cdots, I_m$ a je-li jejich sjednocení $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_m$ interval, pak má funkce f integrál také v intervalu I .*

Poznámka. Tvrzení 2 se používá i v případech, kdy sjednocení I integračních oborů I_n není interval. Tuto skutečnost ilustruje následující příklad.

☛ *Příklad 12.2.*

$$\begin{aligned} x \in (0, \infty) &: \quad (\ln x)' = 1/x\,; \\ x \in (-\infty, 0) &: \quad (\ln(-x))' = 1/x\,. \end{aligned}$$

Je tedy

$$\begin{aligned} &\int 1/x \, \mathrm{d}x = \ln x + c && \text{v intervalu } (0, \infty)\,; \\ &\int 1/x \, \mathrm{d}x = \ln(-x) + c && \text{v intervalu } (-\infty, 0)\,. \end{aligned}$$

Funkce $\ln |x|$ je tedy primitivní funkcí k funkci $1/x$ jak v intervalu $(-\infty, 0)$, tak i v intervalu $(0, \infty)$. Proto obvykle píšeme:

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln |x| + c \quad \text{v } M = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Je třeba si uvědomit, že tento zápis není zcela korektní: množina M je sjednocením dvou disjunktních intervalů, integrační konstantu c proto může být zvolena libovolně na každém z obou intervalů.

Věta (Linearita integrálu).

1. *Nechť funkce F, resp. G je primitivní funkce k funkci f, resp. g v intervalu (a, b) a nechť r je číslo. Pak funkce $F + G$ je primitivní funkce k funkci $f + g$ a funkce rF je primitivní funkce k funkci rf v intervalu (a, b).*
2. *Nechť funkce f, g mají neurčité integrály v intervalu (a, b) a nechť r je číslo. Pak také funkce $f + g$ a funkce rf má neurčitý integrál v intervalu (a, b) a platí:*

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\,, \\ \int rf(x)\,\mathrm{d}x &= r\int f(x)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

3. *Nechť funkce $f_1, f_2, \cdots, f_m$ mají neurčité integrály v (a, b) a nechť $r_1, r_2, \cdots, r_m$ jsou konstanty. Pak také funkce $r_1 f_1 + r_2 f_2 + \cdots + r_m f_m$ má integrál v intervalu (a, b) a platí:*

$$\int (r_1 f_1(x) + r_2 f_2(x) + \cdots + r_n f_n(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= r_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + r_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + r_n \int f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

12.2 Základní integrační vzorce

Známé vzorce z diferenciálního počtu nám dávají následující výsledky (c je integrační konstanta):

$$1)\quad \int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad x \in \mathbb{R} \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{Z},\ n > 0;$$
$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ pro } n \in \mathbb{Z},\ n < -1,$$
$$x > 0 \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{R},\ n \notin \mathbb{Z}.$$

$$2)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$3)\quad \int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + c; \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$4)\quad \int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c, \qquad x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1.$$

$$5)\quad \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$6)\quad \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

7) $$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c,$$
$$x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}.$$

8) $$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c,$$
$$x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

9) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \arcsin x + c, \\ -\arccos x + c, \end{cases} \qquad x \in (-1, 1).$$

10) $$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c, \\ -\operatorname{arccotg}\ x + c, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

11) $$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + c; \qquad x \in \mathbb{R}.$$

12) $$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + c; \qquad x \in \mathbb{R}.$$

☛ *Příklad 12.3.*

Vypočítejte následující integrály:

(a) $I = \int (5x^4 - 2x^3 - 3x + 7)\,\mathrm{d}x$

Řešení. Podle věty o linearitě integrálu lze psát:

$$I = \int (5x^4 - 2x^3 - 3x + 7)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 5\int x^4\,\mathrm{d}x - 2\int x^3\,\mathrm{d}x - 3\int x\,\mathrm{d}x + 7\int 1\,\mathrm{d}x =$$

$$= 5\left(\frac{x^5}{5} + c_1\right) - 2\left(\frac{x^4}{4} + c_2\right) - 3\left(\frac{x^2}{2} + c_4\right) + 7(x + c_5) =$$

$$= x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) $I = \displaystyle\int \frac{2x^3 - 3\sqrt{x} + 5}{x}\,\mathrm{d}x$

Řešení. Po vydělení čitatele integrandu jmenovatelem stačí opět využít základní vzorce:

$$I = \int \frac{2x^3 - 3\sqrt{x} + 5}{x}\,\mathrm{d}x = \int (2x^2 - 3x^{-\frac{1}{2}} + 5x^{-1})\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int x^2\,\mathrm{d}x - 3\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + 5\int x^{-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) - 3\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c_2\right) + 5\,(\ln|x| + c_3) =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - 6\sqrt{x} + \ln|x| + c\,, \qquad x \in (0, +\infty)\,.$$

(c) $I = \int \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x$

Řešení. Uvědomme si, že $(\mathrm{e}^{4x})' = 4\mathrm{e}^{4x}$, proto abychom při zpětné derivaci primitivní funkce získali funkci zadanou, musí být:

$$I = \int \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{4x}}{4} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(d) $I = \int \cos(3x-2)\,\mathrm{d}x$

Řešení. Protože $(\cos(3x-2))' = 3\sin(3x-2)$, bude:

$$I = \int \cos(3x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(3x-2)}{3} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

12.3 Metoda integrace per partes

Věta (Itegrace per partes). *Nechť funkce u, v jsou spojitě diferencovatelné v intervalu (a, b). Pak platí:*

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad (12.1)$$

Důkaz. Z věty o derivování součinu plyne:

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{v intervalu} \quad (a, b),$$

proto v intervalu (a, b) platí:

$$\begin{aligned} \int (uv)' &= \int (u'v + uv') \\ uv + c &= \int u'v + \int uv' \\ \int u'v &= uv - \int uv' + c \end{aligned}$$

Poslední rovnost je ekvivalentní s dokazovaným vztahem.

Využití metody per partes ke zjednodušení integrované funkce

☛ ***Příklad 12.4.***

Vypočítejte integrál $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Abychom integrovanou funkci skutečně zjednodušili, je dobré zvolit pro derivování funkci x (v opačném případě by v se integrandu objevilo x^2, což by bylo ještě komplikovanější):

$$\int x \cos x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x \,, & u = \sin x \\ v = x \,, & v' = 1 \end{array} \right| =$$

$$= x \sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + c \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,.$$

☛ *Příklad 12.5.*

Vypočítejte integrál $\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Postupným derivováním funkce x^2 zjednodušíme integrand na jedinou goniometrickou funkci:

$$\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin x\,, & u = -\cos x \\ v = x^2\,, & v' = 2x \end{array} \right| =$$

$$= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) \, \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x\,, & u = \sin x \\ v = x\,, & v' = 1 \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x\right) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

☛ *Příklad 12.6.*

Vypočítejte integrál $\int x^3 \mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Integrand postupně zjednodušíme:

$$\int x^3\mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{5x}\,, & u = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} \\ v = x^3\,, & v' = 3x^2 \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{5}x^3\mathrm{e}^{5x} - \frac{3}{5}\int x^2\mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{5x}\,, & u = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} \\ v = x^2\,, & v' = 2x \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{5}x^3\mathrm{e}^{5x} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{5}x^2\mathrm{e}^{5x} - \frac{2}{5}\int x\mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x\right) = \left|\begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^{5x}\,, & u = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} \\ v = x\,, & v' = 1 \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{5}x^3\mathrm{e}^{5x} - \frac{3}{25}x^2\mathrm{e}^{5x} + \frac{6}{25}\left(\frac{1}{5}x\mathrm{e}^{5x} - \frac{1}{5}\int \mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{5}x^3\mathrm{e}^{5x} - \frac{3}{25}x^2\mathrm{e}^{5x} + \frac{6}{125}x\mathrm{e}^{5x} - \frac{6}{125}\mathrm{e}^{5x} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

☛ ***Příklad 12.7.***

Vypočítejte integrál $\int x^5 \ln x \,\mathrm{d}x$.

Řešení. Tentokrát si uvědomíme, že ke zjednodušení dojde, budeme-li derivovat funkci $\ln x$:

$$\int x^5 \ln x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = x^5 \,, & u = \dfrac{x^6}{6} \\ & \\ v = \ln x \,, & v' = \dfrac{1}{x} \end{array} \right| = \tfrac{1}{6} x^6 \ln x - \tfrac{1}{6} \int \frac{x^6}{x} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \tfrac{1}{6} x^6 \ln x - \tfrac{1}{6} \int x^5 \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6} x^6 \ln x - \tfrac{1}{36} x^6 + c \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,.$$

☛ *Příklad 12.8.*

Vypočítejte integrál $\int \ln x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Na první pohled integrand není součinem dvou funkcí, přesto lze metodu per partes s úspěchem použít. Při integraci by nám velmi pomohlo, kdybychom mohli funkci $\ln x$ nahradit její derivací $1/x$. K tomu si stačí zadaný integrand představit jako součin $1 \ln x$:

$$\int 1 \ln x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 \, , & u = x \\ v = \ln x \, , & v' = \dfrac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= x \ln x - \int \frac{x}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int 1 \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + c \, , \qquad x \in \mathbb{R} \, .$$

Nepřímé nalezení neurčitého integrálu: per partes vedoucí na řešení rovnice

V některých situacích se přímé integraci vyhneme tím, že opakováním metody per partes dospějeme k rovnici obsahující na obou stranách hledaný neurčitý integrál. Rovnici pak stačí vyřešit, aniž bychom prováděli integraci celého integrandu (typickým příkladem je součin funkcí $\mathrm{e}^x, \sin x, \cos x,$ které se při derivování či integrování buď nemění, nebo se po určité době opakují):

$$I = h(x) + kI\,.$$

V následujícím příkladu aplikujeme metodu per partes dvakrát, čímž obdržíme na pravé straně opět původní integrál.

☛ *Příklad 12.9.*

Vypočítejte integrál $\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x$.

Řešení.

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^x , & u = \mathrm{e}^x \\ v = \cos x , & v' = -\sin x \end{array} \right| =$$

$$= \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^x , & u = \mathrm{e}^x \\ v = \sin x , & v' = \cos x \end{array} \right| =$$

$$= \mathrm{e}^x \cos x + \left(\mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x\right)$$

Tím jsme získali rovnici, kterou snadno vyřešíme:

$$\begin{aligned} \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x \\ 2\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x \\ \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x\right) \end{aligned}$$

12.4 Substituční metoda integrování

Věta (První věta o substituci v neurčitém integrálu) *Nechť v intervalu J existuje integrál na levé straně rovnosti*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{12.2}$$

a rovná se $F(x)$. Nechť funkce $x = \varphi(t)$ je diferencovatelná v intervalu I takovém, že $\varphi(I) \subset J$. Pak v intervalu I existuje integrál na pravé straně rovnosti (12.2) a rovná se $F\big(\varphi(t)\big)$.

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k funkci f v intervalu J. Protože funkce φ zobrazuje interval I do intervalu J, jsou složené funkce $F(\varphi(t))$ a $f(\varphi(t))$ definované v intervalu I a podle věty o derivaci složené funkce platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,, \quad t \in I.$$

Odtud plyne dokazované tvrzení.

Poznámka. První věta o substituci je užitečná v případech, kdy je integrál „připravený“ ve tvaru

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Pak stačí ověřit, že jsou splněny předpoklady věty.

☛ *Příklad 12.10.*

Vypočítejte integrál $\int \mathrm{e}^{5t+3}\,\mathrm{d}t\,.$

Řešení. Integrand je spojitý v $\mathbb{R}$, integrál proto existuje. Označme:

$$x = \varphi(t) = 5t + 3, \qquad \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 5\,\mathrm{d}t\,.$$

Všechny předpoklady věty jsou splněny a lze psát:

$$\int \mathrm{e}^{5t+3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\int \mathrm{e}^{5t+3}5\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{x} + c =$$
$$= \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5t+3} + c\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

☛ ***Příklad 12.11.***

Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+2)^3}\,\mathrm{d}t\,.$

Řešení. Integrand je spojitý v $\mathbb{R}$, integrál proto existuje v $\mathbb{R}$,. Postupujme podobně jako v předchozím příkladu:

$$\int \frac{\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+2)^3}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} x = \mathrm{e}^t + 2 \\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{-3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c = -\frac{1}{4(\mathrm{e}^t+2)^4} + c\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Poznámka. Samozřejmě nezáleží na tom, jakými písmeny jsou jednotlivé proměnné označeny.

☛ Příklad 12.12.

Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{(\ln x)\sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}{x}\,\mathrm{d}x$ v intervalu $I = (0,+\infty)$.

Řešení.

$$\int \frac{(\ln x)\sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}\,(\ln x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(5+\ln^2 x)^3}}\,(2\ln x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = 5+\ln^2 x \\ \mathrm{d}t = (2\ln x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -2\sqrt{t} + c =$$

$$= -2\sqrt{5+\ln^2 x} + c\,, \quad x \in (0,+\infty)\,.$$

Věta (Druhá věta o substituci v neurčitém integrálu) *Nechť v intervalu I existuje integrál na levé straně rovnosti*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{12.3}$$

a rovná se $F(t)$, nechť funkce $x = \varphi(t)$ má nenulovou derivaci v každém bodě intervalu I a nechť zobrazuje interval I na interval $J = \varphi(I)$. Pak v intervalu J existuje integrál na pravé straně rovnosti (12.3) a rovná se $F\big(\psi(x)\big)$, kde $\psi(x)$ je inverzní funkce k funkci $x = \varphi(t)$.

Důkaz. Funkce φ je podle předpokladu prostá v intervalu I. Označme $t = \psi(x)$ funkci inverzní k funkci φ. Tato funkce zobrazuje interval J na interval I.
Podle předpokladu existuje funkce G, diferencovatelná v I taková, že $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,,\ t \in I\,.$ Označme

$$F(x) = G(\psi(x))\,.$$

Podle věty o derivaci složené funkce existuje v intervalu J derivace F' a platí $F'(x) = G'(\psi(x))\psi'(x) = G'(t)\psi'(x) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\cdot 1/\varphi'(t) = f(x)$, $x \in J$.

Poznámka. Místo předpokladu $\varphi'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in I$ stačí požadovat, aby funkce φ byla ryze monotónní a aby bylo $\varphi'(t) = 0$ pro nejvýše konečný počet bodů $t \in I$.

☚ ***Příklad 12.13.***

Vypočítejte integrál $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,,\ x \in (-1,1)$.

Řešení. Integrand je spojitý v intervalu $J = (-1,1)$, takže integrál v tomto intervalu existuje. Abychom odstranili odmocninu v integrandu, využijeme identitu $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ a substituci:

$$\begin{aligned}
&x = \varphi(t) = \sin t\,; \quad && \varphi(t) \text{ zobrazuje } (-\pi/2, \pi/2) \text{ na } (-1,1)\,;\\
&\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t\,; && \varphi'(t) = (\sin t)' = \cos t \neq 0\,;\\
&\sqrt{1-x^2} = |\cos t| = \cos t > 0\,; &&\\
&t = \arcsin x &&
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{5}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t = 5\int 1\,\mathrm{d}t = 5t + c = \\
&= 5\arcsin x + t, \quad x \in (-1,1)\,.
\end{aligned}$$

12.5 Integrace racionálních funkcí

Věta (Rozkladu na součet parciálních zlomků)
Nechť $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální lomená funkce a nechť jmenovatel $Q(x)$ lze psát ve tvaru

$$Q(x) = a(x-x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}\cdot(x^2+2p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+2p_sx+q_s)^{l_s},$$

kde polynomy $x^2+2p_ix+q_i$, $i=1,\ldots,s$, jsou v reálném oboru nerozložitelné. Potom lze $R(x)$ vyjádřit – až na pořadí sčítanců – právě jedním způsobem ve tvaru

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{l_k}\frac{B_{ij}x+C_{ij}}{(x^2+2p_ix+q_i)^j},$$

kde $p(x)$ je polynom, A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} jsou reálné konstanty; rovnost platí pro všechna $x \in \mathrm{D}_R$, tj. pro všechna reálná x různá od kořenů polynomu $Q(x)$ ve jmenovateli.

☛ *Příklad 12.14.*

Rozložte funkci na součet parciálních zlomků:

$$R(x) = \frac{3x + 5}{x^2 - 3x + 2}$$

Řešení. Polynom ve jmenovateli má kořeny 1 a 2, proto:

$$R(x) = \frac{3x + 5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{3x + 5}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}\,.$$

Při hledání koeficientů A, B převeďme oba zlomky vpravo na společného jmenovatele. Aby byl výsledek identický s původní zadanou funkcí, musí být v čitateli identické funkce, tj. koeficienty u všech mocnin proměnné x musí být shodné.

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$3x+5 = (A+B)x + (-2A-B)$$

$$x^1 \quad \ldots \quad 3 = A+B$$

$$x^0 \quad \ldots \quad 5 = -2A-B$$

$$A=-8, \quad B=11$$

Celkem je tedy

$$R(x) = \frac{3x+5}{x^2-3x+2} = -\frac{8}{x-1} + \frac{11}{x-2}\,.$$

☛ *Příklad 12.15.*

Rozložte funkci na součet parciálních zlomků:

$$R(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)}$$

Řešení.

$$R(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)} &= \frac{A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} \\
3x+5 &= A(x^2-3x+2) + B(x-2) + C(x^2-2x+1) \\
{\color{blue}3x} + {\color{red}5} &= (A+C)x^2 + {\color{blue}(-3A+B-2C)x} + {\color{red}(2A-2B+C)}
\end{aligned}$$

Aby byly funkce na obou stranách rovnice identické, musí platit:

$$\begin{array}{rcl} x^2 \ \ldots \ \ 0 &=& A + C \qquad\qquad (\rightarrow \ A = -C) \\ x^1 \ \ldots \ \ 3 &=& -3A + B - 2C \\ x^0 \ \ldots \ \ 5 &=& 2A - 2B + C \\ \hline 3 &=& -A + B \\ 5 &=& A - 2B \\ \hline \end{array}$$

$$B = -8, \quad A = -11, \quad C = 11$$

Celkem je tedy

$$R(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{11}{x-1} - \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{11}{x-2}\,.$$

Poznámka. Uvědomme si, že pokud bychom hledali rozklad pouze ve tvaru

$$R(x) = \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-2}\ ,$$

získali bychom podmínku

$$\begin{aligned} 3x+5 &= A(x-2) + B(x-1)^2 \\ 3x+5 &= A(x-2) + B(x^2-2x+1) \\ 3x+5 &= Bx^2 + (A-2B)x + (-2A+B) \end{aligned}$$

a příslušnou soustavu rovnic, která nemá řešení (máme jen dvě proměnné a tři rovnice, z nichž žádná není lineární kombinací ostatních):

$$\begin{array}{cccc} x^2 \ \dots & 0 & = & B \\ x^1 \ \dots & 3 & = & A-2B \\ x^0 \ \dots & 5 & = & -2A+B \\ \hline \end{array}$$

$$B = 0, \quad A = 3 \ \wedge \ A = -\frac{5}{2}$$

Výpočet integrálu racionální funkce

Danou racionální funkci nejprve rozložíme na součet parciálních zlomků. Není-li stupeň polynomu v čitateli menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, provedeme nejprve částečné dělené polynomů. Poté stačí zintegrovat jednotlivé zlomky.

☛ ***Příklad 12.16.***

Vypočítejte integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x}$.

Řešení.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x} = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{2-3x}(-3)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + c.$$

☚ Příklad 12.17.

Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+5)^3}$.

Řešení.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+5)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+5)^3}\,2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x+5)^{-3}\,2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+5)^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{4(2x+5)^2} + c\,.$$

☛ *Příklad 12.18.*

Vypočítejte integrál $I = \displaystyle\int \frac{3x+5}{(x-1)^2(x-2)}\,\mathrm{d}x\,.$

Řešení. Po rozkladu na parciální zlomky obdržíme:

$$I = \int \left(-\frac{11}{x-1} - \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{11}{x-2} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= -11\ln|x-1| - 8\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + 11\ln|x-2| + c =$$

$$= 11\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + \frac{8}{x-1} + c\,.$$

☛ *Příklad 12.19.*

Vypočítejte integrál $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{2+x^2}$.

Řešení. Polynom ve jmenovateli je v reálném oboru nerozložitelný. Integrace povede na arctg:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\left(\frac{x^2}{2}+1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c\,.$$

☛ Příklad 12.20.

Vypočítejte integrál $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+2}$.

Řešení.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\left(\frac{3x^2}{2}+1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+1} \sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + c\,.$$

☛ Příklad 12.21.

Vypočítejte integrál $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 - 3x + 6}$.

Řešení.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 - 3x + 6} = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - \frac{3}{2}x + 3} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{16}} =$$

$$\frac{16}{2 \cdot 39} \frac{\sqrt{39}}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{39}}(x - \frac{3}{4})\right)^2 + 1} \frac{4}{\sqrt{39}} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{4}{\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{4}{\sqrt{39}} \left(x - \frac{3}{4}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{4x - 3}{\sqrt{39}} + c.$$

12.6 Převedení integrandu na racionální funkci

Pomocí druhé věty o substituci lze řadu integrálů převést na integrály racionální funkce. Přehled substitucí užitečných v jednotlivých případech je uveden ve skriptech na str. 103–110.

PŘEDNÁŠKA 13

URČITÝ

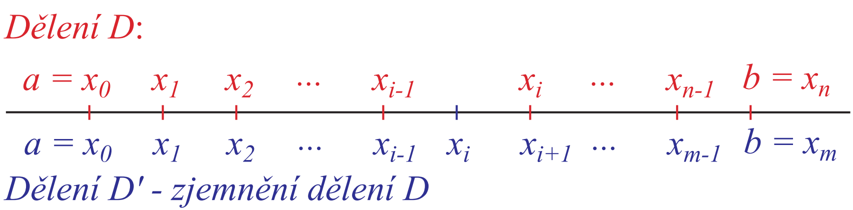
INTEGRÁL

13.1 Riemannův integrál

Definice 1. Nechť $I = \langle a, b \rangle$ omezený interval v $\mathbb{R}$.
Dělením D **intervalu** $\langle a, b \rangle$ nazveme každou konečnou posloupnost bodů

$$x_0 = x \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots < x_{n-1} \leq x_n = b\,.$$

Definice 2. Řekneme, že dělení D' intervalu $\langle a, b \rangle$ je **zjemněním dělení** D právě tehdy, když je každý dělící bod dělení D dělícím bodem dělení D'.



Definice 3. Nechť je funkce f omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme

$$m_i = \inf_{x\in\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x)\,, \qquad M_i = \sup_{x\in\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f(x)\,.$$

Pro každé dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ sestrojme součty

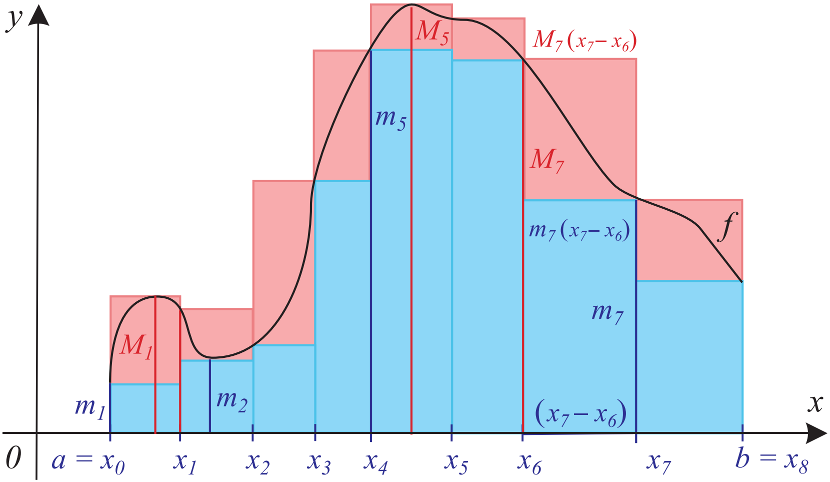
$$s_D = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})\,, \qquad S_D = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})\,.$$

Číslo s_D se nazývá **dolní Riemannův součet** a S_D **horní Riemannův součet funkce** $f(x)$ **příslušný k dělení** D.

Poznámka. Protože pro každé i je $m_i \leq M_i$, platí nerovnost

$$s_D \leq S_D.$$

Geometrická interpretace



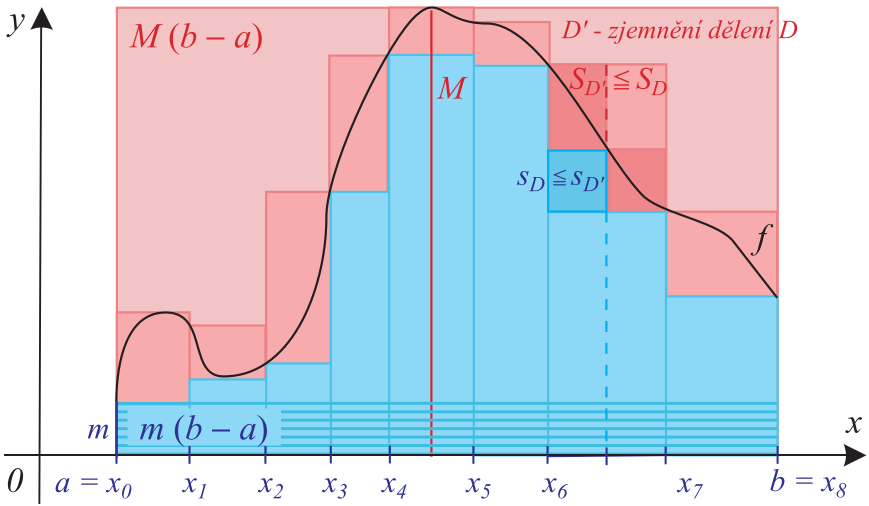
Dolní součet představuje obsah vepsaného obrazce složeného z obdélníků, který je pro každé dělení menší nebo roven obsahu plochy vymezené osou x a grafem funkce na daném intervalu. Horní součet udává velikost plochy opsaného obrazce, a je tedy pro každé dělení větší nebo roven obsahu uvedené plochy.

Označme symbolem $\mathcal{D}$ množinu všech dělení intervalu $\langle a, b\rangle$,

$$M = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)\,, \qquad m = \inf_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)\,.$$

Věta. *Je-li D' zjemněním dělení D, platí nerovnosti:*

$$m(b-a) \le s_D \le s_{D'} \le S_{D'} \le S_D \le M(b-a)\,.$$



Věta. *Pro libovolná dvě dělení D_1 a D_2 intervalu $\langle a, b\rangle$ platí nerovnost $s_{D_1} \leq S_{D_2}$.*

Množina $\{s_D; D \in \mathcal{D}\}$ je **shora omezená**, například číslem $M(b-a)$, a **zdola omezená**, například číslem $m(b-a)$. Proto existují čísla

$$s = \sup_{D\in\mathcal{D}} s_D \in \mathbb{R} \qquad \text{a} \qquad S = \inf_{D\in\mathcal{D}} S_D \in \mathbb{R}\,.$$

Definice 4. Číslo $s = \sup_{D\in\mathcal{D}} s_D$ se nazývá **dolní Riemannův integrál funkce f na intervalu** $\langle a, b\rangle$, číslo $S = \inf_{D\in\mathcal{D}} S_D$ se nazývá **horní Riemannův integrál funkce f na intervalu** $\langle a, b\rangle$.

Definice 5. Nechť je $I = \langle a, b \rangle$ omezený interval v $\mathbb{R}$ a funkce $f(x)$ je omezená na I. Jestliže platí $s = S$, kde s je dolní a S horní Riemannův integrál funkce $f(x)$ na intervalu I, nazýváme tuto společnou hodnotu **Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$** a značíme ji symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Existuje-li Riemannův integrál funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$, říkáme, že funkce $f(x)$ je **integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$**. Vedle názvu Riemannův integrál se běžně používá také název **určitý integrál funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$**.

Poznámka. Uvědomme si, že Riemannův integrál je definován pouze pro omezené funkce na omezeném intervalu, v jiném případě nemá výše uvedená definice smysl.

Poznámka.

V naší geometrické interpretaci představují dolní a horní Riemannovy součty aproximace obsahu rovinné oblasti vymezené grafem dané funkce a osou x na daném intervalu $\langle a, b\rangle$, přičemž hodnota dolního součtu je vždy menší nebo rovna obsahu uvedené plochy, hodnota horního součty je vždy větší nebo rovna tomuto obsahu.

Viděli jsme, že při zjemňování dělení se dolní součet zvětšuje nebo zůstává konstantní, horní součet se naopak zmenšuje, případně zůstává konstantní, a oba se "přibližují" k obsahu oblasti pod grafem funkce. Aby mělo smysl hovořit o obsahu tohoto obrazce, nemělo by záležet na tom, budeme-li jej aproximovat zdola nebo shora, což nastává tehdy, když se dolní Riemannův integrál rovná hornímu. V tomto případě je tedy obsah uvedeného obrazce roven Riemannovu integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta. *Je-li funkce f monotonní na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je na tomto intervalu integrovatelná.*

Věta. *Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je na tomto intervalu integrovatelná.*

Věta. *Funkce f je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ právě tehdy, když je pro každé $c \in (a, b)$ funkce integrovatelná na obou intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$. Přitom platí rovnost:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Poznámka. Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jsme definovali pro $b \geq a$. Předcházející věta nám umožňuje rozšířit definici integrálu pro $b \leq a$ vztahem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Uvědomme si, že tato definice není ve sporu s případem $b = a$, kdy je Riemannův integrál roven nule. Pro takto rozšířené integrály platí rovnost:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

za předpokladu, že alespoň dva integrály existují.

Prozatím jsme definovali Riemannův integrál pro funkce, které byly definovány na omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Nyní rozšíříme definici Riemannova integrálu na funkce, které jsou definovány na omezené množině $M \subset \mathbb{R}$.

Definice 6. Nechť je funkce $f : M \to \mathbb{R}$ definována na omezené množině $M \subset \mathbb{R}$ a nechť I je omezený uzavřený interval takový, že $M \subset I$. **Riemannovým integrálem funkce** f **přes množinu** M rozumíme integrál

$$\int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{kde} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ pro } x \in M, \\ 0 \text{ pro } x \in I \setminus M. \end{cases}$$

Integrál funkce f přes množinu M budeme značit $\displaystyle\int_M f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta. *Nechť jsou funkce f_1, f_2 integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ a c_1, c_2 jsou reálné konstanty. Pak platí:*

$$\int_a^b \big(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\big)\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta. *Nechť jsou funkce f, g integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak jsou na $\langle a, b\rangle$ integrovatelné také funkce f^2 a $f \cdot g$.*

Poznámka. Je třeba upozornit, že obecně neplatí rovnost

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta. *Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $k \le f(x) \le K$. Pak je*

$$k(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le K(b-a).$$

Věta. *Je-li integrovatelná funkce* $f(x) \geq 0$ *na intervalu* $\langle a, b\rangle$*, pak platí:* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$*.*

Věta. *Jsou-li funkce* f, g *integrovatelné na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a pro každé* $x \in \langle a, b\rangle$ *platí nerovnost* $f(x) \leq g(x)$*, pak platí nerovnost:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta. *Je-li funkce* f *integrovatelná na intervalu* $\langle a, b\rangle$*, pak platí:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|\,\mathrm{d}x.$$

13.2 Integrál jako funkce horní meze

Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$, kde $a<b$. Pak pro každý bod $x\in\langle a,b\rangle$ existuje integrál $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Protože hodnota tohoto integrálu je určena jednoznačně, můžeme definovat funkci $F\colon\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ předpisem

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\ x\in\langle a,b\rangle\,.$$

Integrál v této rovnosti je tedy **funkcí horní meze**. Analogicky je možné definovat integrál jako **funkci dolní meze**

$$G(x)=\int\limits_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\,,\ x\in\langle a,b\rangle\,.$$

Pro body $x,\ x+h\in\langle a,b\rangle$ je

$$F(x+h)=\int\limits_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t+\int\limits_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)+\int\limits_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Věta. *Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$. Pak má funkce $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\;\; x \in \langle a, b\rangle$ následující vlastnosti:*

(i) *je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$;*

(ii) *je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in (a, b)$, pak je $F'(x_0) = f(x_0)$. Je-li $x_0 = a$, resp. $x_0 = b$, pak je $F'(a+) = f(a+)$, resp. $F'(b-) = f(b-)$;*

(iii) *má-li funkce f v bodě $x_0 \in (a, b)$ nespojitost 1. druhu, pak je $F'(x_0+) = f(x_0+),\; F'(x_0-) = f(x_0-)$.*

13.3 Věty o střední hodnotě pro Riemannův integrál

Věta. *Nechť jsou f, a g integrovatelné funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, $g(x) \geq 0$ a $k \leq f(x) \leq K$. Pak platí nerovnost:*

$$k \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq K \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Je-li navíc funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá, existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$

Věta. *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a g monotonní funkce, která má na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitou derivaci. Pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že platí:*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x + g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

13.4 Newton–Leibnizova formule

Věta. *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a F je její primitivní funkce. Pak platí:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Poznámka. Newton–Leibnizova formule se obvykle zapisuje pomocí hranaté závorky ve tvaru

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Zřejmě platí:

$$[F(x) \pm G(x)]_a^b = [F(x)]_a^b \pm [G(x)]_a^b, \qquad [cF(x)]_a^b = c[F(x)]_a^b$$

pro každé dvě funkce F, G a libovolné reálné číslo c.

Newton–Leibnizova formule je velice užitečná, neboť nám konečně poskytuje návod, jak Riemannův integrál nalézt. Navíc nám umožňuje využít všechny početní metody, které jsme používali při hledání primitivní funkce: jakmile nalezneme pro danou funkci f její primitivní funkci F, stačí dosadit do Newton–Leibnizovy formule.

Poznámka. Při používání Newton–Leibnizovy formule nezáleží na tom, kterou z funkcí primitivních v intervalu $\langle a, b\rangle$ k funkci f použijeme. Jsou-li F, G dvě primitivní funkce k funkci f v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje konstanta C tak, že $G(x) = F(x) + C$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, a tedy

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)\,.$$

Definice 7. Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, nazýváme číslo $F(b) - F(a)$ **Newtonovým určitým integrálem** funkce $f(x)$ od bodu a do bodu b.

☛ *Příklad 13.1.*

Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{pro} \quad x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}\,,\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z} \ \text{ nesoudělná čísla,} \\ \\ 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Lze ukázat, že pro tuto funkci existuje Riemannův integrál

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ale k této funkci neexistuje žádná na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ primitivní funkce. Proto nemá tato funkce Newtonův integrál.

13.5 Integrace per partes

Věta. *Nechť jsou f, g spojitě diferencovatelné funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí:*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Funkce

$$F(x) = \int_a^x f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t\,, \quad \tilde{F}(x) = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(t)g'(t)\ \mathrm{d}t$$

jsou primitivní funkce k integrovatelné funkci $f'(x)g(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Mohou se tedy lišit pouze o aditivní konstantu. Ale pro $x = a$ platí $F(a) = \tilde{F}(a) = 0$. Tedy pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí rovnost:

$$\int_a^x f'(t)g(t)\ \mathrm{d}t = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(t)g'(t)\ \mathrm{d}t\,.$$

Pro $x = b$ odtud plyne tvrzení věty. $\square$

13.6 Substituční metoda pro Riemannův integrál

Věta. *Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce $\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ má spojitou derivaci a platí $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$. Pak platí rovnost*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\bigl(\varphi(t)\bigr) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Je-li $F(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ primitivní funkce k funkci $f(x)$, pak je podle věty o substituci pro neurčitý integrál funkce $\Psi(t) = F\bigl(\varphi(t)\bigr)$ primitivní funkcí k funkci $f(\bigl(\varphi(t)\bigr) \cdot \varphi'(t)$ na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$. Proto je integrál vlevo roven

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\bigl(\varphi(t)\bigr) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Psi(\beta) - \Psi(\alpha) = F\bigl(\varphi(\beta)\bigr) - F\bigl(\varphi(\alpha)\bigr) = \\ = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta. *Nechť je $f(x)$ spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce $\varphi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ je spojitá diferencovatelná funkce, která zobrazuje interval $\langle\alpha, \beta\rangle$ na interval $\langle a, b\rangle$, a nechť je $\varphi'(t) \neq 0$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Důkaz. Nechť je $\Psi(t)$ primitivní funkce k funkci $f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$ na intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Pak je integrál vpravo roven $\Psi(\beta) - \Psi(\alpha)$. Ale předpoklady věty zaručují, že existuje inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$ k funkci $x = \varphi(t)$ a že funkce $F(x) = \Psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$. Proto platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Psi\big(\varphi^{-1}(b)\big) - \Psi\big(\varphi^{-1}(a)\big) =$$

$$= \Psi(\beta) - \Psi(\alpha) = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Poznámka. Povšimněme si, že podobně jako v případě neurčitých integrálů se v obou větách objevuje tvar

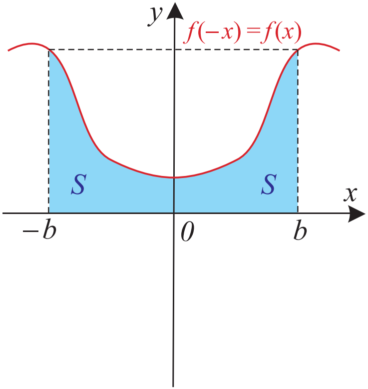
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(t)\bigr)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

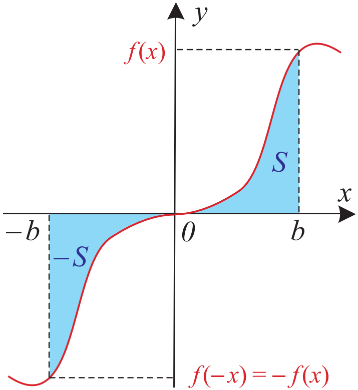
Ovšem předpoklady se liší podle toho, zda pomocí známého integrálu na levé nebo pravé straně hledáme druhý z integrálů v této rovnosti.

13.7 Integrál sudé, liché nebo periodické funkce

Věta. *Je-li funkce f sudá a integrovatelná v intervalu $\langle -b, b\rangle$, pak platí:* $\int_{-b}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$

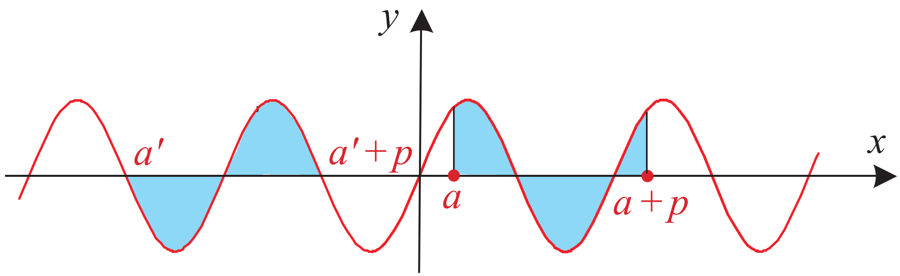
Věta. *Je-li funkce f lichá a integrovatelná v intervalu $\langle -b, b\rangle$, platí:* $\int_{-b}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$





Věta. *Nechť funkce f je periodická s periodou T, nechť a, a' jsou reálná čísla. Existuje-li jeden z následujících integrálů, existuje i druhý z nich a platí*

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a'}^{a'+T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Volně řečeno, integrál přes integrační obor délky periody je stejný bez ohledu na to, kde je integrační obor umístěn.

Home
Obsah
Strana 375
Zpět
Fullscreen
Tisk
Zavřít
Konec

PŘEDNÁŠKA 14

APLIKACE INTEGRÁLNÍHO POČTU

14.1 Aplikace Riemannova integrálu v geometrii

Předpokládejme, že derivace funkcí, které se ve vzorcích vyskytují, jsou spojité na celém integračním oboru.

Výpočet obsahu části roviny

1. Obsah S části roviny ohraničené grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$, spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$ a splňujících nerovnost $f(x) \geq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ a příslušnými úsečkami na přímkách $x = a$, $x = b$ je dán vztahem

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Speciálně pro $g(x) = 0$ platí

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Obsah S části roviny ohraničené grafem funkce dané parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ spojitých na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a splňujících podmínky $\dot{\varphi}(t) > 0$ a $\psi(t) \geq 0$ pro všechna $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a příslušnými úsečkami na ose x a na přímkách $x = \varphi(\alpha)$, $x = \varphi(\beta)$ je dán vztahem

$$S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\dot{\varphi}(t)\ \mathrm{d}t.$$

3. Obsah S části roviny ohraničené grafem spojité a nezáporné funkce dané v polárních souřadnicích rovnicí $\varrho = f(\varphi)$ a průvodiči pro φ_1 a φ_2 s délkami $\varrho_1 = f(\varphi_1)$ a $\varrho_2 = f(\varphi_2)$, kde $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \leq 2\pi$ je dán vztahem

$$S = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tfrac{1}{2}\varrho^2 \,\mathrm{d}\varphi.$$

Tento vztah se nazývá **Leibnizův vzorec pro rovinnou výseč**.

Výpočet délky křivky

1. Délka s rovinné křivky dané jako graf funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, s krajními body $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ je dána vztahem

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Délka s rovinné křivky, která je popsaná parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)\,,\; y = \psi(t)\,,\; t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, s krajními body $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$, $(\varphi(\beta), \psi(\beta))$, je dána vztahem

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

3. Délka s prostorové křivky zadané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)\,,\; y = \psi(t)\,,\; z = \chi(t)\,,\; t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, s krajními body $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha))$, $(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta))$, je dána vztahem

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t) + \dot\chi^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Výpočet obsahu pláště rotačního tělesa

1. Obsah Q pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky, vytvořené jako graf spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, kolem osy x je dán vztahem

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Obsah Q pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinné křivky, která je popsaná parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, splňujících podmínky $\dot\varphi(t) > 0$ a $\psi(t) \geq 0$ pro všechna $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$ s krajními body $\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\big)$, $\big(\varphi(\beta), \psi(\beta)\big)$ kolem osy x je dán vztahem

$$Q = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Výpočet objemu rotačního tělesa

1. Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky, vytvořené jako graf spojité nezáporné funkce $y = f(x)\,,\ \ x \in \langle a, b\rangle$, kolem osy x je dán vztahem

$$V = \pi \int\limits_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x.$$

2. Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinné křivky, která je popsaná parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)\,,\ y = \psi(t)\,,\ t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, splňujících podmínky $\dot{\varphi}(t) > 0$ a $\psi(t) \geq 0$ pro všechna $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$ s krajními body $\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\big)$, $\big(\varphi(\beta), \psi(\beta)\big)$ kolem osy x je dán vztahem

$$V = \pi \int\limits_\alpha^\beta \psi^2(t)\dot{\varphi}(t)\ \mathrm{d}t.$$

14.2 Použití Riemannova integrálu ve fyzice a technice

Výpočet statických momentů

1. Statický moment S_x, resp. S_y oblouku homogenní rovinné křivky vzhledem k ose x, resp. y pro křivku zadanou jako graf spojité funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ je dán vztahem

$$S_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{resp.} \quad S_y = \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Statický moment S_x, resp. S_y oblouku homogenní rovinné křivky vzhledem k ose x, resp. y pro křivku popsanou parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, s krajními body $\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\big)$, $\big(\varphi(\beta), \psi(\beta)\big)$, je dán vztahem

$$S_x = \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t)}\,\mathrm{d}t\,, \quad \text{resp.} \quad S_y = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

3. Statický moment S_{xy}, resp. S_{xz}, resp. S_{yz} oblouku homogenní prostorové křivky vzhledem k rovině xy, resp. xz, resp. yz pro

křivku popsanou parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, s krajními body $\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha)\big)$, $\big(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta)\big)$, je dán vztahem

$$S_{xy} = \int_{\alpha}^{\beta} \chi(t) g(t)\,\mathrm{d}t, \quad S_{xz} = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) g(t)\,\mathrm{d}t, \quad S_{yz} = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) g(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde $g(t) = \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)}$.

4. Statický moment S_x, resp. S_y homogenního rovinného obrazce ohraničeného grafem spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ a příslušnými úsečkami na ose x a na přímkách $x = a$, $x = b$, vzhledem k ose x, resp. y je dán vztahem

$$S_x = \frac{1}{2} \int_{a}^{b} (f(x))^2\,\mathrm{d}x, \quad \text{resp.} \quad S_y = \int_{a}^{b} x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. Statický moment S_x, resp. S_y homogenního rovinného obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$ takových, že $f(x) \geq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ a příslušnými úsečkami na ose x a na přímkách $x = a$, $x = b$, vzhledem k ose x, resp. y je

dán vztahem

$$S_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \big((f(x))^2 - (g(x))^2\big)\,\mathrm{d}x, \quad \text{resp.} \quad S_y = \int\limits_a^b x\big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

6. Statický moment S_{yz} homogenní rotační plochy vytvořené při rotaci grafu spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, kolem osy x vzhledem k rovině yz je dán vztahem

$$S_{yz} = 2\pi \int\limits_a^b x f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

V tomto případě je $S_{xy} = S_{xz} = 0$.

7. Statický moment S_{yz} homogenního rotačního tělesa, jehož plášť se vytvoří při rotaci grafu spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, kolem osy x a které má podstavy v rovinách $x = a$, $x = b$, vzhledem k rovině yz, je dán vztahem

$$S_{yz} = \pi \int\limits_a^b x(f(x))^2\,\mathrm{d}x,$$

Výpočet souřadnic těžiště

1. Souřadnice x_T, y_T těžiště oblouku homogenní rovinné křivky jsou dány vztahy $x_T = \frac{S_y}{s}$, $y_T = \frac{S_x}{s}$, kde s je délka uvažovaného oblouku a S_x, S_y jsou příslušné statické momenty.

2. Souřadnice x_T, y_T, z_T těžiště oblouku homogenní prostorové křivky jsou dány vztahy $x_T = \frac{S_{yz}}{s}$, $y_T = \frac{S_{xz}}{s}$, $z_T = \frac{S_{xy}}{s}$, kde s je délka uvažovaného oblouku a S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} jsou příslušné statické momenty.

3. Souřadnice x_T, y_T těžiště homogenního rovinného obrazce jsou dány vztahy $x_T = \frac{S_y}{S}$, $y_T = \frac{S_x}{S}$, kde S je obsah uvažovaného rovinného obrazce a S_x, S_y jsou příslušné statické momenty.

4. Souřadnice x_T těžiště homogenního rotačního tělesa, jehož plášť se vytvoří při rotaci grafu spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, kolem osy x a které má podstavy v rovinách $x = a$, $x = b$, je dána vztahem $x_T = \frac{S_{yz}}{V}$, kde V je objem uvažovaného tělesa a S_{yz} je příslušný statický moment. Zde je $y_T = z_T = 0$.

Výpočet momentů setrvačnosti

1. Momenty setrvačnosti I_x, resp. I_y, resp. I_z oblouku homogenní rovinné křivky vzhledem k ose x, resp. y, resp. k počátku pro křivku zadanou jako graf spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, jsou dány vztahy

$$I_x = \int_a^b (f(x))^2 g(t)\,\mathrm{d}t, \quad I_y = \int_a^b x^2 g(t)\,\mathrm{d}t, \quad I_z = \int_a^b (x^2+(f(x))^2) g(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde $g(t) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$.

2. Momenty setrvačnosti I_x, resp. I_y, resp. I_z oblouku homogenní rovinné křivky vzhledem k ose x, resp. y, resp. k počátku pro křivku popsanou parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, s krajními body $\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\big)$, $\big(\varphi(\beta), \psi(\beta)\big)$, je dán vztahem

$$I_x = \int_\alpha^\beta \big(\psi(t)\big)^2 g(t)\,\mathrm{d}t, \ I_y = \int_\alpha^\beta \big(\varphi(t)\big)^2 g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$I_z = \int_\alpha^\beta \big((\varphi(t))^2 + (\psi(t))^2\big) g(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{kde } g(t) = \sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t)}.$$

3. Momenty setrvačnosti I_x, resp. I_y, resp. I_z oblouku homogenní prostorové křivky vzhledem k ose x, resp. y, resp. z pro křivku popsanou parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, s krajními body $\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha)\big)$, $\big(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta)\big)$, jsou dány vztahy

$$I_x = \int_\alpha^\beta \big((\psi(t))^2 + (\chi(t))^2\big) g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad I_y = \int_\alpha^\beta \big((\varphi(t))^2 + (\chi(t))^2\big) g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$I_z = \int_\alpha^\beta \big((\varphi(t))^2 + (\psi(t))^2\big) g(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde $g(t) = \sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t) + \dot\chi^2(t)}$.

4. Momenty setrvačnosti I_x, resp. I_y, resp. I_z homogenního rovinného obrazce ohraničeného grafem spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ a příslušnými úsečkami na ose x a na přímkách $x = a$, $x = b$, vzhledem k ose x, resp. y, resp. počátku jsou dány vztahy

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b \big(f(x)\big)^3 \, \mathrm{d}x, \quad I_y = \int_a^b x^2 f(x) \, \mathrm{d}x,$$
$$I_z = \int_a^b \Big(\frac{1}{3} \big(f(x)\big)^3 + x^2 f(x) \Big) \, \mathrm{d}x.$$

5. Momenty setrvačnosti I_x, resp. I_y, resp. I_z homogenního rovinného obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$ takových, že $f(x) \geq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ a příslušnými úsečkami na ose x a na přímkách $x = a$, $x = b$, vzhledem k ose x, resp. y, resp. počátku jsou dány vztahy

$$I_x = \frac{1}{3}\int\limits_a^b \Big(\big(f(x)\big)^3 - \big(g(x)\big)^3\Big)\,\mathrm{d}x, \qquad I_y = \int\limits_a^b x^2\big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x,$$
$$I_z = I_x + I_y.$$

6. Moment setrvačnosti I_x homogenní rotační plochy vytvořené při rotaci grafu spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, kolem osy x vzhledem k ose x je dán vztahem

$$I_x = 2\pi\int\limits_a^b \big(f(x)\big)^3\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

7. Moment setrvačnosti I_x homogenního rotačního tělesa, jehož plášť se vytvoří při rotaci grafu spojité nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, kolem osy x a které má podstavy v rovinách $x = a$, $x = b$, vzhledem k ose x, je dán vztahem

$$I_x = \frac{\pi}{2} \int_a^b \big(f(x)\big)^4 \, \mathrm{d}x.$$

Literatura

[1] Nagy, J.; Navrátil, O.: *Matematická analýza.* ČVUT, Praha, 2001.

[2] Nagy, J.; Taufer, J.: *Algebra.* ČVUT, Praha, 1997.

[3] Děmidovič, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.* Fragment, Praha, 2003.

[4] Haeussler, E. F.; Paul, R. S.: *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, and the Life and Social Sciences.* Prentice Hall, 2001.