1. MATICE

a) POJEM MATICE

Příklad 1

Společnost provozuje tři ropné rafinerie. Každá rafinerie vyrábí tři ropné produkty: topný olej, motorovou naftu a benzín. Předpokládejme, že z jednoho barelu ropy vyrobí první rafinerie 4 galony topného oleje, 2 galony motorové nafty a jeden galon benzínu. Druhá a třetí rafinerie vyrobí jiná množství těchto produktů - tak, jak to znázorňuje následující **matice A**:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{l} \\ \text{Topný olej} \\ \text{Motorová nafta} \\ \text{Benzín} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Rafinerie 1} & \text{Rafinerie 2} & \text{Rafinerie 3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Každý sloupec matice **A** je **vektor výstupů** rafinerie. Například z jednoho barelu ropy vyrobí rafinerie 3 výstupní vektor

$$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Každý řádek matice A je vektor množství téhož produktu vyrobeného různými rafineriemi. Například řádkový vektor pro benzín je $\boldsymbol{a}_3' = (1, 4, 5)$.

Označme x_i počet barelů ropy zpracovávaných i-tou rafinerií.
Předpokládejme, že je poptávka po 600 jednotkách topného oleje, 800 jednotkách motorové nafty a 1000 jednotkách benzínu. Potom x_i musí vyhovovat následující **soustavě lineárních rovnic**:

$$\begin{array}{ccccccc} 4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 600 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 800 \\ 1x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 1000 \end{array}$$

Neboli:

$$x_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Příklad 2

Uvažujme následující rafinérský model. Jsou zde tři rafinerie, 1, 2 a 3, z každého barelu surové ropy vyrobí jednotlivé rafinerie následující množství (měřeno v galonech) topného oleje, motorové nafty a benzínu:

	Rafinerie 1	Rafinerie 2	Rafinerie 3
Topný olej	6	3	2
Motorová nafta	4	6	3
Benzín	3	2	6

Předpokládejme, že je na trhu následující poptávka: 280 galonů topného oleje, 350 galonů motorové nafty a 350 galonů benzínu.
Zapište soustavu rovnic, jejíž řešení určí míru produkce jednotlivých rafinerií tak, aby byla uspokojena poptávka.

Příklad 3

Dietetik hotelu Diplomat potřebuje připravit pokrm obsahující 600 kalorií, 20 gramů proteinů a 200 miligramů vitamínu C. Může přitom volit ze tří druhů jídel: jahodové želé, sušené rybí tyčinky, tajemství šéfkuchaře, jejichž nutriční hodnoty připadající na deset gramů jsou následující:

	Jahodové želé	Rybí tyčinky	Tajemství šéfkuchaře
Kalorie	10	50	200
Proteiny	1	3	0,2
Vitamín C	30	10	0

Sestavte matematický model dietetikova problému pomocí soustavy tří lineárních rovnic.

Příklad 4

Výrobce nábytku vyrábí stoly, židle a pohovky. V jednom měsíci má společnost k dispozici 300 jednotek dřeva, 350 jednotek pracovní síly a 225 jednotek čalounění. Výrobce potřebuje sestavit měsíční plán výroby tak, aby byly plně využity všechny zdroje. Různé druhy nábytku vyžadují následující množství zdrojů:

	Stůl	Židle	Pohovka
Dřevo	4	1	3
Pracovní síla	3	2	5
Čalounění	2	0	4

Sestavte matematický model tohoto výrobního problému.

b) OPERACE S MATICEMI

Násobení skalárem: každý prvek matice se vynásobí daným číslem

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad 3\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 15 & 3 \\ 9 & 27 & 6 & 15 \\ 3 & 18 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

Sčítání matic: sčítají se vždy odpovídající si prvky matic; sčítané matice musí mít stejnou velikost.

Příklad 5

Předpokládejme, že zaznamenáváme výsledky testů čtyř studentů ve třech předmětech. Pro zachování anonymity budeme studenty nazývat A, B, C a D, a předměty 1, 2 a 3. Studenti skládají v každém kurzu dvě hodinové zkoušky a závěrečnou zkoušku, každá z těchto zkoušek je ohodnocena 10 body (při dosažení nejlepšího výsledku). Pro každý ze tří testů si můžeme vytvořit matici výsledků, v níž řádky odpovídají jednotlivým studentům a sloupce jednotlivým předmětům:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \end{array} \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 8 \\ 8 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 8 \\ 6 & 7 & 9 \\ 7 & 8 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 8 & 6 & 9 \\ 8 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Potom matice T celkových výsledků každého studenta ve všech kurzech je:

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 8 \\ 8 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 9 & 8 \\ 6 & 7 & 9 \\ 7 & 8 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 8 & 6 & 9 \\ 8 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 26 \\ 22 & 18 & 26 \\ 23 & 22 & 24 \\ 15 & 17 & 19 \end{pmatrix}$$

(zatím neuvažujeme, že závěrečná zkouška má větší váhu, tj. je důležitější).
Nyní předpokládejme, že závěrečná zkouška by měla být vážena dvakrát více než každý z hodinových testů. Dále bychom chtěli, aby maximální celkový bodový zisk byl 10 bodů. Matice vážených výsledků vypadá takto:

$$\mathbf{T} = \tfrac{1}{4}\mathbf{S}_1 + \tfrac{1}{4}\mathbf{S}_2 + \tfrac{1}{2}\mathbf{S}_3 =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 8 \\ 8 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 9 & 8 \\ 6 & 7 & 9 \\ 7 & 8 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 8 & 6 & 9 \\ 8 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}75 & 7{,}75 & 8{,}75 \\ 7{,}5 & 6 & 8{,}75 \\ 7{,}75 & 7{,}25 & 8 \\ 5{,}25 & 5{,}5 & 6{,}25 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 9 \\ 8 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

SKALÁRNÍ SOUČIN VEKTORŮ

Příklad 6

Uvažujme tři druhy ovoce, například pomeranče, banány a jablka; jeden kilogram pomerančů stojí 40 Kč, 1 kg banánů 32 Kč a 1 kg jablek stojí 25 Kč. Ceny si můžeme znázornit pomocí vektoru $\boldsymbol{p} = (40, 32, 25)$.
Předpokládejme, že týdenní poptávka domácnosti po jednotlivých druzích ovoce jsou 3 kg pomerančů, 2 kg banánů a 4 kg jablek; poptávku si můžeme znázornit pomocí vektoru $\boldsymbol{d} = (3, 2, 4)$.
Celková hodnota této poptávky je

$$\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{p} = (3, 2, 4) \cdot (40, 32, 25) = 3 \cdot 40 + 2 \cdot 32 + 4 \cdot 25 = 120 + 64 + 100 = 284$$

Toto číslo vytvořené z vektorů ***d***, ***p*** se nazývá **skalární součin vektorů *d*, *p***.

Přesněji:

Nechť $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ jsou vektory stejné délky *n*. **Skalární součin** $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ vektorů ***a***, ***b*** je jediné číslo (skalár) rovné součtu součinů $a_i b_i$, tj.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Skalární součin se rovněž zapisuje takto:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad \text{např. } \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = (4, 2, 2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

Můžeme tedy například psát:

Topný olej	$4x_1$	+	$2x_2$	+	$2x_3$	=	$(4, 2, 2) \cdot \boldsymbol{x}$	=	$\boldsymbol{a}_1' \cdot \boldsymbol{x}$
Motorová nafta	$2x_1$	+	$5x_2$	+	$2x_3$	=	$(2, 5, 2) \cdot \boldsymbol{x}$	=	$\boldsymbol{a}_2' \cdot \boldsymbol{x}$
Benzín	$1x_1$	+	$2{,}5x_2$	+	$5x_3$	=	$(1, 5/2, 5) \cdot \boldsymbol{x}$	=	$\boldsymbol{a}_3' \cdot \boldsymbol{x}$

SOUČIN MATICE A VEKTORU

Příklad 7

V příkladu 7, kde byly dány ceny tří druhů ovoce pomocí vektoru cen $\boldsymbol{p} = (40, 32, 25)$ a týdenní poptávka domácnosti $\boldsymbol{d} = (3, 2, 4)$, uvažujme uvažujme ještě jednu domácnost ve stejném místě (tj. platí stejné ceny), jejíž poptávka je $\boldsymbol{d}' = (2, 2, 3)$. Celkové hodnoty poptávky obou domácností můžeme znázornit pod sebou:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{d}' \cdot \boldsymbol{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3, 2, 4) \cdot (40, 32, 25) \\ (2, 2, 3) \cdot (40, 32, 25) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 40 + 2 \cdot 32 + 4 \cdot 25 \\ 2 \cdot 40 + 2 \cdot 32 + 3 \cdot 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 284 \\ 219 \end{pmatrix}$$

To, co se zde provedlo, byl součin matice poptávek $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{d}' \end{pmatrix}$ a vektoru cen ***c***:

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{d}'\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}40\\ 32\\ 25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 40+2\cdot 32+4\cdot 25\\ 2\cdot 40+2\cdot 32+3\cdot 25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}284\\ 219\end{pmatrix}$$

Obecně:

Součin matice A, která má m řádků a n sloupců, a **vektoru** $\boldsymbol{c}$ délky n je sloupcový vektor tvořený skalárními součiny $\boldsymbol{a}_i'\cdot\boldsymbol{x}$ řádků $\boldsymbol{a}_i'$ matice **A** s vektorem $\boldsymbol{c}$, např.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}\quad\dots\quad \mathbf{Ac}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1'\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{a}_1'\cdot\boldsymbol{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}c_1+a_{12}c_2+a_{13}c_3\\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+a_{23}c_3\end{pmatrix};$$

konkrétně:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\quad\dots\quad \mathbf{Ac}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3\\ 3\cdot 1+4\cdot 2+5\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 29\end{pmatrix}$$

U ropné rafinerie:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\ \dots\ \begin{pmatrix}4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3\\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3\\ 1x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}600\\ 800\\ 1000\end{pmatrix}$$

Příklad 8

V příkladu 5 předpokládejme, že závěrečná zkouška má mít třikrát větší váhu než oba průběžné hodinové testy, takže váhy jednotlivých zkoušek jsou 1/5, 1/5 a 3/5. Přepočítejte matici výsledků za těchto podmínek.

Příklad 9

Jsou dány matice

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 8 & 6\end{pmatrix}\quad\text{a}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}7 & 9 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}.$$

Určete: (a) 2**A**, (b) 5**B**, (c) **A**+2**B**, (d) 2**A** - 3**B** .

Příklad 10

Jsou dány matice

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 5 & 7 & 9\end{pmatrix}\quad\text{a}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Určete: (a) 3**A**, (b) 2**B**, (c) -3**B**, (d) **A**+**B**, (e) 2**A** + 3**B**, (f) 3**A** - 2**B** .

Příklad 11

Následující matice **A** udává ceny tří různých druhů cukrovinek zakoupených ve třech různých obchodech:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{l} \\ \text{Obchod A} \\ \text{Obchod B} \\ \text{Obchod C} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Cukrovinka 1} & \text{Cukrovinka 2} & \text{Cukrovinka 3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 25 & 30 \\ 15 & 20 & 30 \\ 25 & 20 & 25 \end{pmatrix} \end{array}
$$

(a) Předpokládejme, že se ceny cukrovinek zdvojnásobí. Jak bude vypadat matice cen cukrovinek?

(b) Předpokládejme, že ceny cukrovinek vzrostou o 50% a musí se platit daň 3 koruny za cukrovinku. Jaká bude nyní matice cen?

Příklad 12

Předpokládejme, že chceme zakoupit 10 kg pomerančů, 15 kg jablek, 20 kg banánů a 10 kg mandarinek. Srovnáním zjistíme, že ceny za jeden kilogram jsou v obchodě A 40 Kč, 25 Kč, 30 Kč a 35 Kč, v obchodě B 35 Kč, 30 Kč, 35 Kč a 35 Kč.

(a) Vyjádřete problém určení ceny této skupiny ovoce v každém obchodě jako součin matice a vektoru.

(b) Vypočítejte ceny ovoce v obou obchodech.

Příklad 13

Chceme uspořádat oslavu; spočítali jsme si, že budeme potřebovat 10 sendvičů „labužník“, 10 litrů punče, 10 kilogramů bramborového salátu a 50 chlebíčků. Následující matice udává ceny těchto pochutin u tří různých dodavatelů:

	Sendvič	1 litr punče	1 kg salátu	1 chlebíček
Dodavatel 1	30	85	90	10
Dodavatel 2	25	90	80	10
Dodavatel 3	35	80	95	11

(a) Vyjádřete problém určení ceny dodávky občerstvení na oslavu různými dodavateli jako součin matice a skaláru.

(b) Určete cenu dodávky pro každého z dodavatelů.

SOUSTAVY ROVNIC

Příklad 14

Uvažujme soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

neboli **Ax**=**b**, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ze třetí rovnice plyne $x_3=2$; dosadíme-li tuto hodnotu do druhé rovnice, dostaneme:

$$x_2 + 4 \cdot 2 = 5, \text{ tedy } x_2 = -3$$

Nyní známe x_2 , x_3 a z první rovnice můžeme dopočítat x_1:

$$2x_1 + (-3) - 2 = 1, \text{ tedy } x_1 = 3$$

Pro zadanou soustavu byl výpočet snadný; bylo to dáno tím, že soustava byla v tzv. **trojúhelníkovém tvaru**. Každou soustavu rovnic se proto budeme snažit nejprve převést na trojúhelníkový tvar, kde při přechodu na nižší řádek ubyde na začátku alespoň jedna neznámá. Potom budeme upravenou soustavu procházet zdola nahoru a postupně dopočítávat jednotlivé neznámé.

Pro zjednodušení nebudeme zapisovat celé soustavy rovnic, ale jen matice sestavené z jejich koeficientů, tzv. **matice soustavy rovnic** (v příkladu 14 matice **A**). Napíšeme-li za svislou čáru vedle matice koeficientů do sloupce hodnoty pravých stran, získáme tzv. rozšířenou matici soustavy rovnic, např.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Příklad 15

Uvažujme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} x &+ y &= 4 \\ 2x &- y &= -1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Nejprve se ji budeme snažit převést na trojúhelníkový tvar. K tomu je třeba vyeliminovat *x* v druhé rovnici. Vynásobíme proto první rovnici –2 a přičteme ke druhé; nová soustava rovnic pak bude následující:

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ -3y &= -9 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

Jakékoli řešení původní soustavy je i řešením této upravené a naopak. Upravená soustava je již v trojúhelníkovém tvaru a její řešení je jednoduché:

$$y = 3, \qquad \mathrm{x} + 3 = 4 \Rightarrow \mathrm{x} = 4 - 3 = 1$$

Pro ověření stačí dosadit $x = 1$ a $y = 3$ do původní soustavy.

Právě popsaný postup se nazývá **Gaussova eliminační metoda**.

Obecně, **Gaussova eliminační metoda** převádí rozšířenou matici soustavy rovnic na matici v trojúhelníkovém tvaru s použitím následujících **elementárních řádkových operací:**

1. Násobení nebo dělení řádku rozšířené matice nenulovým číslem.
2. Odečtení násobku jednoho řádku od druhého.
3. Záměna dvou řádků.

Při Gaussově eliminaci opakovaně provádíme operace 1 – 3, až získáme matici v trojúhelníkovém tvaru. Postupujeme tak, že pro každé $i = 1, 2, \dots n$ odečteme násobek *i*-tého řádku od všech následujících řádků tak, abychom v nich vyeliminovali *i*-tou proměnnou. Pak dořešíme postupným dosazováním zdola nahoru.

Platí:

Věta. Je-li **Ax**=**b** soustava rovnic, na níž jsou aplikovány elementární řádkové operace, které danou soustavu převedou na soustavu **A'x**=**b'**, pak x* je řešením soustavy **Ax**=**b** právě tehdy, když je řešením soustavy **A'x**=**b'**.

Příklad 16

Vyřešte soustavu rovnic pro „rafinérský problém“ z příkladu 1.

Příklad 17

Předpokládejme, že změníme třetí rovnici, takže:

$$\begin{aligned} 4x_1 &+ 2x_2 &+ 2x_3 &= 600 \\ 2x_1 &+ 5x_2 &+ 2x_3 &= 800 \\ 3x_1 &+ 3{,}5x_2 &+ 2x_3 &= 700 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 600 \\ 2 & 5 & 2 & 800 \\ 3 & 3{,}5 & 2 & 700 \end{array}\right)$$

Jak bude vypadat řešení, bude-li ve třetí rovnici místo 700 číslo 1000?

Možnosti výsledků při řešení soustavy *n* rovnic o *n* neznámých:

(i) Právě jedno řešení (žádný řádek v matici koeficientů se nevynuluje).
(ii) Nekonečně mnoho řešení (alespoň jeden řádek v rozšířené matici obsahuje po úpravách pouze nuly).
(iii) Žádné řešení (alespoň u jednoho řádku nastane po eliminačních úpravách situace, kdy v matici koeficientů jsou v tomto řádku nuly, v matici rozšířené je ale ve stejném řádku nenulové číslo, např. 0=2).

Příklad 18

Předpokládejme, že v „rafinárenském“ modelu přestane být důležitá výroba benzínu (např. je přebytek benzínu v zásobních nádržích). Budeme se tedy zabývat jen poptávkou po topném oleji a motorové naftě:

$$\begin{aligned} 4x_1 &+ 2x_2 &+ 2x_3 &= 600 \\ 2x_1 &+ 5x_2 &+ 2x_3 &= 800 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 600 \\ 2 & 5 & 2 & 800 \end{array}\right)$$

Možnosti výsledků při řešení soustavy *m* rovnic o *n* neznámých (m < n):

(i) Nekonečně mnoho řešení.
(ii) Žádné řešení.

Příklad 19

Vyřešte „dietetikův problém“ z příkladu 3.

Příklad 20

Nalezněte řešení následujících soustav rovnic:

(a) $\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 5 \\ x & - & y & = & 4 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 4 \\ 3x & + & 2y & = & 5 \end{array}$ (c) $\begin{array}{rcrcr} 3x & - & y & = & 0 \\ -2x & + & y & = & 2 \end{array}$

Příklad 21

Nalezněte řešení následujících soustav rovnic:

(a) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & -4 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \end{array}$

(c) $\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & \frac{9}{2} \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 12 \end{array}$ (d) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & = & -1 \\ -2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & -4 \end{array}$

Příklad 22

Nalezněte řešení následujících variací „rafinérského problému“:

(a) $\begin{array}{rcrcrcr} 20x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 500 \\ 8x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 850 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 11x_3 & = & 2050 \end{array}$

(b) $\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 500 \\ 10x_1 & + & 10x_2 & & & = & 850 \\ 2x_1 & & & + & 12x_3 & = & 1000 \end{array}$

(c) $\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 500 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 300 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 1000 \end{array}$

(d) $\begin{array}{rcrcrcr} 8x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 500 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & + & 5x_3 & = & 500 \\ & & 12x_2 & + & 6x_3 & = & 500 \end{array}$

Příklad 23

Výrobce nábytku vyrábí stoly, židle a pohovky. V jednom měsíci má společnost k dispozici 270 jednotek dřeva, 310 jednotek pracovní síly a 200 jednotek čalounění. Výrobce potřebuje sestavit měsíční plán výroby tak, aby byly plně využity všechny zdroje. Různé druhy nábytku vyžadují následující množství zdrojů:

	Stůl	Židle	Pohovka
Dřevo	4	1	3
Pracovní síla	3	2	5
Čalounění	2	0	4

Sestavte matematický model tohoto výrobního problému a nalezněte jeho řešení.

Příklad 24

Analytik trhu potřebuje pro svou studii zjistit objem a složení výroby „tajnůstkářské“ potravinářské firmy, která vyrábí čtyři druhy lahůdek: „kuřecí sen“, „plněnou kapsu“, „vegetariánskou pizzu“ a „pizzu labužník“.

Od dodavatelů se analytikovi podaří zjistit, že firma v určitém období odebrala (a vzhledem k trvanlivosti a skladovacím možnostem i spotřebovala) následující množství surovin: 1250 kg kuřecího masa, 1600 kg mouky, 1800 kg bramborové moučky a 1800 kg míchané zeleninové směsi.

Rozborem lahůdek pak analytik zjistil, že „kuřecí sen“ obsahuje 50 gramů kuřecího masa, 25 gramů bramborové moučky a 25 gramů zeleninové směsi, na přípravu „plněné kapsy“ je třeba 20 gramů kuřecího masa, 30 gramů mouky a 50 gramů zeleninové směsi, „vegetariánská pizza“ je vyrobena ze 40 gramů mouky a 60 gramů zeleninové směsi a „pizza labužník“ je připravena ze 40 gramů kuřecího masa, 40 gramů mouky a 20 gramů zeleninové směsi.

Kolik jednotlivých lahůdek firma ve sledovaném období vyrobila?

Příklad 25

Investor se chystá investovat určitou částku K do cenných papírů. Z velkého množství různých možností ponechá po podrobné analýze založené na studiu vývoje jednotlivých položek čtyři nejzajímavější: akcie firmy *General Motors*, *Budvaru*, *Kosteleckých uzenin* a *Sharon Steel* (při rozboru se bere v úvahu výnosnost cenných papírů v jednotlivých letech, rozptyl výnosnosti aj.; k podrobnější diskusi bychom potřebovali pojmy z teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky).

Portfoliem se rozumí seznam udávající části investovaného kapitálu vložené do jednotlivých cenných papírů, v našem případě to bude vektor o čtyřech složkách: $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4})$, kde x_1 je část kapitálu K investovaná do akcií firmy *General Motors*, x_2 je část kapitálu K investovaná do akcií *Budvaru*, x_3 je část kapitálu K investovaná do akcií *Kosteleckých uzenin* a x_4 je část kapitálu K investovaná do akcií *Sharon Steel*. Celkem je tedy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

Z rozboru vyplynuly další podmínky, jejichž splnění povede k nejoptimálnějšímu portfoliu:

$$x_2 + x_3 = \frac{1}{2}, \qquad x_1 = 2x_4, \qquad x_2 = 3x_3.$$

Nalezněte složení portfolia (x_1, x_2, x_3, x_4).