Určitý integrál a jeho aplikace

Dokažte, že konstantní funkce $f(x)=c$ je integrovatelná na libovolném intervalu $\langle a,b\rangle$ a platí

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = c(b-a)\,.$$

Dokažte podle definice, že funkce $f(x)=x$ je integrovatelná na intervalu $\langle 0,1\rangle$ a platí

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,.$$

Vypočtěte podle definice $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$; $b>a$. $\left[\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a\right]$

Vypočtěte podle definice $\displaystyle\int_0^a \cos\omega x\,\mathrm{d}x$; $\omega>0$; $a>0$. $\left[\dfrac{\sin\omega a}{\omega}\right]$

Vypočtěte podle definice $\displaystyle\int_a^b x^s\,\mathrm{d}x$; $s>0$; $0<a<b$. $\left[\dfrac{b^{s+1}-a^{s+1}}{s+1}\right]$

Užitím Newtonova–Leibnitzova vzorce vypočtěte:

a) $\displaystyle\int_8^{27}\left(x+\sqrt[3]{x}\right)\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{1525}{4}\right]$

b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ $\left[\dfrac{\pi}{12}\right]$

c) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$ $[0]$

Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad \text{kde}\quad f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in\langle 1,2\rangle\\ \dfrac{8}{x} & x\in(2,4\rangle\end{cases}$ $\left[\dfrac{7}{3}+8\ln 2\right]$

b) $\displaystyle\int_0^4 |2-x|\,\mathrm{d}x$ $[4]$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x$ $[4]$

Vypočtěte derivaci funkce $F(x)$:

a) $\displaystyle F(x)=\int_{-1}^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ $\left[F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

b) $\displaystyle F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ $\left[F'(x)=\mathrm{e}^{-x}\right]$

Vyšetřete průběh funkce $\displaystyle F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, kde $f(t)=\begin{cases} t & t\in\langle 0,1\rangle\\ 1 & t\in(1,+\infty)\end{cases}$.

$\left[F(x)=\begin{cases} x^2/2 & x\in\langle 0,1\rangle\\ x-1/2 & x\in(1,\infty)\end{cases}\right]$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x) = \sin x$ na intervalu:

a) $\left\langle 0, \dfrac{\pi}{3} \right\rangle$ $\left[\dfrac{3}{2\pi}\right]$

b) $\langle 0, \pi \rangle$ $\left[\dfrac{2}{\pi}\right]$

c) $\langle 0, 2\pi \rangle$ $[0]$

Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cos 2x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. $\left[\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{5\pi}\right]$

Ve kterém bodě nabývá funkce $f(x) = 2x^2 + 3x + 3$ své střední hodnoty na intervalu $\langle 1, 4 \rangle$.
$\left[\dfrac{-3+\sqrt{181}}{4}\right]$

Určete střední hodnotu funkce $f(x) = \begin{cases} x & x \in \langle 0, 1) \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ a zjistěte, zda jí funkce $f(x)$ v nějakém bodě nabývá. $\left[\dfrac{5}{4}\,;\ \text{nenabývá}\right]$

Užitím věty o substituci vypočtěte:

a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x \,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+9}}$ $[2]$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$ $\left[\dfrac{\pi}{6}\right]$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$ $\left[\operatorname{arctg} \mathrm{e} - \dfrac{\pi}{4}\right]$

d) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2-2x-1}\,\mathrm{d}x$ [neexistuje]

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4 \,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\left[\dfrac{3}{8}\ \operatorname{argsinh} 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{8}\right]$

f) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3 \,\mathrm{d}x}{2+\sqrt{4-x^2}}$ $\left[\dfrac{4}{3}\right]$

Vypočtěte $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$. $\left[\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right]$

Pomocí metody per partes vypočtěte:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{\pi^2}{4} - 2\right]$

b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln^3 x \,\mathrm{d}x$ $[6-2\mathrm{e}]$

Vypočtěte $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x$ $\left[J_n = \dfrac{n-1}{n}\, J_{n-2}\,;\ J_0 = \dfrac{\pi}{2}\,;\ J_1 = 1\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného přímkou $x = 2$ a grafy funkcí $f_1(x) = x^2+1$ a $f_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$. $\left[\dfrac{11}{3} + \mathrm{e}^{-2}\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkou s parametrickým vyjádřením $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$. $\left[\dfrac{8}{15}\right]$.

Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného částí kardioidy dané parametrickými rovnicemi: $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, $a > 0$ a osou x. $[3\pi a^2]$

Určete obsah oblasti ohraničené Bernouliho lemniskátou $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$. $[a^2]$

Určete obsah oblasti ohraničené grafem funkce $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$, $x \in \langle -3, 3 \rangle$, osou x a přímkou $x = 3$. $\left[\dfrac{86}{3}\right]$

Vypočtěte délku oblouku grafu funkce $y = \ln(1 - x^2)$, $x \in \left\langle 0, \dfrac{1}{2} \right\rangle$. $\left[-\dfrac{1}{2} + \ln 3\right]$

Vypočtěte délku jednoho oblouku cykloidy s parametrickým vyjádřením: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a > 0$. $[8a]$

Vypočtěte délku kardioidy s vyjádřením v polárních souřadnicích: $\rho = a(1 - \cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a > 0$. $[8a]$

Vypočtěte objem rotačního elipsoidu, který vznikne rotací elipsy $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ kolem osy: a) x; b) y. [a) 48π; b) 64π]

Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného hyperbolou $x^2 - y^2 = a^2$ a přímkou $x = a + h$ kolem osy x. $\left[\pi h^2 \left(a + \dfrac{h}{3}\right)\right]$

Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného jedním obloukem cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a osou x, kolem osy x. $[5\pi^2 a^3]$

Vypočtěte objem tělesa ohraničeného rovinami $y = z$, $z = 0$ a rotační válcovou plochou $x^2 + y^2 = 1$. $\left[\dfrac{2}{3}\right]$

Vypočtěte povrch kulového pásu ohraničeného rovinami ve výší a a b nad rovinou symetrie, když je poloměr koule r. $[2\pi r(b - a)]$

Vypočtěte povrch rotační plochy, která vznikne rotací kardioidy $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ kolem polární osy. $\left[\dfrac{32}{5}\pi a^2\right]$

Vypočtěte práci, která je třeba k vyzdvižení družice s hmotností m do výšky h. (Předpokládejte, že je třeba překonat pouze přitažlivou sílu Země). $\left[\dfrac{R}{R + h}\, mgh\right]$

Vypočtěte pomocí definice $\displaystyle\int_0^b x^2 \,\mathrm{d}x$. $\left[\dfrac{b^3}{3}\right]$

Vypočtěte pomocí definice $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$; $b > a$. $[\mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-b}]$

Vypočtěte pomocí definice $\int_0^a \sin \omega x \, \mathrm{d}x$; $\omega > 0,\ a > 0$. $\left[\dfrac{1-\cos \omega a}{\omega}\right]$

Užitím Newton–Leibnitzova vzorce vypočtěte:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x} \, \mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{45}{4}\right]$

b) $\displaystyle\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ $\left[\dfrac{\pi}{6}\right]$

c) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left[\dfrac{\pi}{3}\right]$

d) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi/\omega} \sin(\omega x + \varphi) \, \mathrm{d}x$ $[0]$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} (\mathrm{e}^x - 1)^4 \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{1}{5}\,(\mathrm{e}-1)^5\right]$

f) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln x}{x} \, \mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1+x} \, \mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)\right]$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}$ $\left[\dfrac{7}{72}\right]$

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x \, \mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$ $\left[\dfrac{1}{4}\right]$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x$ $[2]$

e) $\displaystyle\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$ $[1]$

f) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+3x-2}$ $\left[\dfrac{1}{5}\ \ln \dfrac{4}{3}\right]$

Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int_{0}^{2} |1-x| \, \mathrm{d}x$ $[1]$

b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} |\cos x| \, \mathrm{d}x$ $[4]$

c) $\displaystyle\int_{1}^{10} f(x) \, \mathrm{d}x\,,\ \text{kde}\ f(x) = \begin{cases} x^3 & x \in \langle 1, 2 \rangle \\ \dfrac{16}{x} & x \in (2, 10\rangle \end{cases}$ $\left[\dfrac{15}{4} + 16 \ln 5\right]$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x \, \mathrm{sgn}(\cos x) \, \mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{\pi^2}{4}\right]$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{sgn}\, x \, \mathrm{d}x$ $[0]$

f) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x\,,\ \text{kde}\ f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle \\ 1 & x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi \right\rangle \end{cases}$ $\left[1 + \dfrac{\pi}{2}\right]$

Vyjádřete funkci $F(x)$ jako hodnotu integrálu s proměnnou horní mezí:

a) $F(x) = \int_0^x t^2 \, dt$ $\left[\dfrac{x^3}{3}\right]$

b) $F(x) = \int_a^x t^5 \, dt$ $\left[\dfrac{x^6 - a^6}{6}\right]$

c) $F(x) = \int_1^x \left(\dfrac{t^3}{5} - \dfrac{t^4}{4}\right) dt$ $\left[\dfrac{x^4 - x^5}{20}\right]$

Vypočtěte derivaci funkce $F(x)$:

a) $F(x) = \int_1^x \dfrac{dt}{1+t^2}$ $\left[F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\right]$

b) $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, dt$ $\left[F'(x) = e^{-x^2}\right]$

c) $F(x) = \int_2^{e^x} \dfrac{\ln t}{t} \, dt$ $[F'(x) = x]$

d) $F(x) = \int_{x^2}^1 \ln t \, dt$ $[F'(x) = -4x \ln x]$

Určete první derivaci funkce $F(x)$ v uvedených bodech:

a) $F(x) = \int_0^x \dfrac{1-t+t^2}{1+t+t^2} \, dt$ v bodě $x = 1$ $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

b) $F(x) = \int_0^x \sin t \, dt$ v bodech $x = 0\,;\ x = \dfrac{\pi}{4}\,;\ x = \dfrac{\pi}{2}$ $\left[0\,;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\ 1\right]$

c) $F(x) = \int_x^5 \sqrt{1+t^2} \, dt$ v bodech $x = 0\,;\ x = \dfrac{3}{4}$ $\left[-1\,;\ -\dfrac{5}{4}\right]$

Určete hodnotu druhé derivace funkce $F(x) = \int_0^{x^2} \dfrac{dt}{1+t^3}$ v bodě $x = 1$. $[-2]$

Určete extrémy funkce $F(x) = \int_0^x t e^{-t^2} \, dt$. $[F(0) = 0\,;\ \text{minimum}]$

Vyšetřete průběh funkce $F(x)$:

a) $F(x) = \int_{-1}^x |t| \, dt\,, \quad x \in \mathbb{R}$ $\left[F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}x^2 & x \geq 0 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x^2 & x < 0 \end{cases}\right]$

b) $F(x) = \int_0^x e^t f(t) \, dt\,,$ kde $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 0, 1\rangle \\ -1 & t > 1 \end{cases}$ $\left[F(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x \in \langle 0, 1\rangle \\ 2e - 1 - e^x & x > 1 \end{cases}\right]$

c) $F(x) = \int_0^x f(t) \cdot \sin t \, dt\,,$ kde $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 0, \pi\rangle \\ 0 & t > \pi \end{cases}$ $\left[F(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & x \in \langle 0, \pi\rangle \\ 2 & x > \pi \end{cases}\right]$

d) $F(x) = \int_0^x \left(t^2 - 3t + 2\right) dt$ $\left[F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x\right]$

Proč použití Newton–Leibnitzova vzorce pro tyto integrály vede k nesprávným výsledkům:

a) $\int_{-1}^1 \dfrac{dx}{x^2}$ $[F(x)$ není omezená v $\langle -1, 1\rangle]$

b) $\int_0^{2\pi} \dfrac{1}{2 + \mathrm{tg}^2\, x} \cdot \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ $\left[F(x) \text{ nemá v } x = \dfrac{\pi}{2} \text{ a } x = \dfrac{3}{2}\pi \text{ derivaci}\right]$

Vypočtěte střední hodnotu funkce:

a) $f(x) = \cos x$ na intervalu $\left\langle 0, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$ $\left[\dfrac{2}{\pi}\right]$

b) $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ $[\mathrm{e} - 2]$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ na intervalu $\langle 0, 100 \rangle$ $\left[\dfrac{20}{3}\right]$

d) $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ na intervalu $\langle -a, a \rangle$ $\left[\dfrac{\pi a}{4}\right]$

Ve kterém bodě nabývá funkce $f(x)$ své střední hodnoty na daném intervalu:

a) $f(x) = x^3 + 1\,; \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$ $[0]$

b) $f(x) = x^2 - 1\,; \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$ $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 3 & x \in (1, 3 \rangle \end{cases}$ [nenabývá své střední hodnoty]

Rozhodněte, který z integrálů nabývá větší hodnoty, aniž je budete počítat:

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x\,; \quad \int_0^1 x^3 \,\mathrm{d}x$ [první]

b) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x\,; \quad \int_1^2 x^3 \,\mathrm{d}x$ [druhý]

Pomocí věty o střední hodnotě odhadněte hodnotu integrálu $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \frac{1}{2}\cos x}$ $\left[\dfrac{4\pi}{3} \leq I \leq 4\pi\right]$

Užitím věty o substituci vypočtěte:

a) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \,\mathrm{d}x$ $[7 + 2\ln 2]$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x} \,\mathrm{d}x}{1 + x}$ $\left[2 - \dfrac{\pi}{2}\right]$

c) $\displaystyle\int_3^8 \frac{x \,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x}}$ $\left[\dfrac{32}{3}\right]$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}}$ $\left[\ln \dfrac{\mathrm{e} + \sqrt{1 + \mathrm{e}^2}}{1 + \sqrt{2}}\right]$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x}$ $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{9}\,\pi\right]$

f) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{\pi}{4}\right]$

Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \,\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^3}$ $\left[\dfrac{\pi}{32}\right]$

b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)^3} \,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{3\pi}{16}\right]$

c) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} \,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{\pi}{16}\right]$

d) $\displaystyle\int_0^5 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+3x}}$ $[4]$

e) $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{a-x}\,\mathrm{d}x\,; \quad a>0$ $\left[\dfrac{4}{15}\,a^2\sqrt{a}\right]$

f) $\displaystyle\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{\pi}{2}\,a^2\right]$

g) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$ $[1]$

h) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ $\left[\dfrac{7}{6}\sqrt{3}-1\right]$

Vypočtěte

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin^2 x}$ $\left[\dfrac{\pi}{\sqrt{6}}\right]$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2\cos x+3}$ $\left[\dfrac{2}{\sqrt{5}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\right]$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{6\,\mathrm{d}x}{6+\sin^2 x}$ $\left[\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{6}{7}}\right]$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x\,\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$ $\left[\dfrac{1}{a^2-b^2}\ \ln\left|\dfrac{a}{b}\right|\right]$

Vypočtěte pomocí vhodné substituce:

a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $\left[\dfrac{\pi}{2}-1\right]$

b) $\displaystyle\int_0^8 \sqrt{8x-x^2}\,\mathrm{d}x$ $[8\pi]$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ $[\mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}}]$

d) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\mathrm{e}^x+3}$ $[4-\pi]$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^6\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{5\pi}{16}\right]$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^7 2x\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{8}{35}\right]$

Proč nelze počítat $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{5-3\cos x}$ pomocí substituce $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}=t$? $\left[\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}\ \text{není spojitá na}\ \langle 0,2\pi\rangle\right]$

Vypočtěte pomocí metody per partes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\,\ln 2\right]$

b) $\displaystyle\int_1^2 \ln x \,\mathrm{d}x$ $\qquad [2\ln 2 - 1]$

c) $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$ $\qquad [\pi^2 - 4]$

d) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x$ $\qquad \left[\frac{1}{4}\left(1+\mathrm{e}^2\right)\right]$

e) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$ $\qquad [1 - 2\mathrm{e}^{-1}]$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{2x} \cos x \,\mathrm{d}x$ $\qquad \left[\frac{\mathrm{e}^\pi - 2}{5}\right]$

Vypočtěte $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x$ $\qquad \left[J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}\,;\ J_0 = \frac{\pi}{2}\,;\ J_1 = 1\right]$

Dokažte, že je-li $J_m = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln^m x \,\mathrm{d}x$, pak platí $J_m = \mathrm{e} - mJ_{m-1}$, kde $m = 1, 2, \ldots$.

Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného přímkou $x = 2$ a grafy funkcí $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$. $\qquad \left[\frac{7}{3} - \ln 2\right]$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami o rovnicích: $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$. $\qquad \left[\frac{16}{3}\right]$

Vypočtěte obsah oblasti ohraničené grafy funkcí: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \sqrt{x}$. $\qquad \left[\frac{1}{3}\right]$

Vypočtěte obsah oblasti ohraničené grafem funkce $f(x) = x - x^3$ a osou x; $x \in \langle 0, 1\rangle$. $\qquad \left[\frac{1}{4}\right]$

Vypočtěte obsah oblasti ohraničené grafy funkcí $y = x^4 - 4x^2$, $y = 4 - x^2$. $\qquad \left[\frac{96}{5}\right]$

Vypočtěte obsah oblasti ohraničené křivkami o rovnicích $x^2 + y^2 = 2$ a $y = x^2$. $\qquad \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\right]$

Vypočtěte obsah oblasti ohraničené parabolami $y^2 + 8x = 16$ a $y^2 - 24x = 48$. $\qquad \left[\frac{32}{3}\sqrt{6}\right]$

Vypočtěte obsah oblasti ohraničené křivkami $f_1(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ a $f_2(x) = \dfrac{x^2}{2}$. $\qquad \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right]$

Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného kubickými parabolami $6x = y^3 - 16y$ a $24x = y^3 - 16y$. $[16]$

Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = -x^2 + 4x - 3$ a tečnami k ní v bodech $[0; -3]$ a $[3; 0]$. $\qquad \left[\frac{9}{4}\right]$

Vypočtěte obsah oblasti ohraničené parabolou $y^2 = 2px$ a normálou k ní, která svírá s kladným směrem osy x úhel $135°$. $\qquad \left[\frac{16}{3}p^2\right]$

Určete obsahy oblastí, na které parabola $y^2 = 6x$ dělí kruh $x^2 + y^2 \leq 16$.
$$\left[\frac{4}{3}\,(4\pi + \sqrt{3})\ ;\ \frac{4}{3}\,(8\pi - \sqrt{3})\right]$$

Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného jedním obloukem cykloidy s parametrickými rovnicemi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, a osou x. $[3\pi a^2]$

Vypočtěte obsah obrazce ohraničené asteroidou $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. $\left[\frac{3}{8}\,\pi a^2\right]$

Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného smyčkou $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$. $\left[\frac{72}{5}\,\sqrt{3}\right]$

Vypočtěte obsah oblasti ohraničené kardioidou $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$. $[6\pi a^2]$

Vypočtěte obsah oblasti ohraničené kardioidou s vyjádřením $\rho = a(1+\cos\varphi)$, kde ρ a φ jsou polární souřadnice. $\left[\frac{3}{2}\,\pi a^2\right]$

Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkou $\rho = a|\sin 2\varphi|$; $a > 0$; $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$ (čtyřlistá růže). $\left[\frac{1}{2}\,\pi a^2\right]$

Vypočtěte obsah oblasti ohraničené křivkou $\rho = a\cos 5\varphi$; $a > 0$. $\left[\frac{1}{4}\,\pi a^2\right]$

Vypočtěte obsah oblasti ohraničené křivkou $\rho = 2a(2 + \cos\varphi)$. $[18\pi a^2]$

Přechodem k polárním souřadnicím vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkou o rovnici $x^3 + y^3 = 3axy$ (Descartesův list). $\left[\frac{3}{2}\,a^2\right]$

Přechodem k polárním souřadnicím vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkou o rovnici $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$. $[a^2]$

Užitím polárních souřadnic určete obsah oblastí ohraničené křivkami:

a) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ $[\sqrt{2}\pi a^2]$

b) $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2xy(x^2 - y^2)$ $[a^2]$

Určete obsah oblasti ohraničené křivkou $(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$. $\left[\frac{\pi}{2}\,(a^2 + b^2)\right]$

Určete obsah oblasti ohraničené uzavřenou křivkou $y^2 = x^2 - x^4$. $\left[\frac{4}{3}\right]$

Určete obsah oblasti ohraničené uzavřenou křivkou

a) $y^2 = (1 - x^2)^2$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

b) $x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0$ $\left[\frac{\pi}{8}\,a^2\right]$

Vypočtěte délku oblouku řetězovky, tj. grafu funkce $y = a\cosh\frac{x}{a}$, pro $|x| \leq b$; $a, b > 0$. $\left[2a\sinh\frac{b}{a}\right]$

Určete délku grafu funkce:

a) $f(x) = \ln x\,;\quad x \in \langle\sqrt{3}, \sqrt{8}\rangle$ $\left[1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\right]$

b) $f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\,;\quad x \in \langle -1, 1\rangle$ $[4]$

c) $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}\,;\quad x \in \langle -a, a\rangle$ $[\pi a]$

d) $f(x) = \ln\cos x\,;\quad x \in \langle 0, a\rangle$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin a}{1-\sin a}\right|\right]$

e) $f(x) = \ln\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}\,;\quad x \in \langle a, b\rangle$ $\left[\ln\frac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^{-b}}{\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a}}\right]$

Vypočtěte délku asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Použijte parametrizace $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. $[6a]$

Určete délku křivky dané parametricky:

a) $x = a\cos^5 t\,;\quad y = a\sin^5 t$ $\left[5a\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right)\right]$

b) $x = a\left(\cos t + \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\,;\quad y = a\sin t$ od bodu $[0; a]$ do $[x; y]$ (traktrix) $\left[a\ln\frac{y}{a}\right]$

c) $x = R(\cos t + t\sin t)\,;\quad y = R(\sin t - t\cos t)\,;\quad t \in \langle 0, \pi\rangle$ (evolventa kružnice) $\left[\frac{\pi^2}{2}R\right]$

d) $x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t\,;\quad y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t\,;\quad t \in \langle 0, \pi\rangle$ $\left[\frac{\pi^3}{3}\right]$

e) $x = t^2\,;\quad y = t - \frac{t^3}{3}\,;$ délka smyčky $[4\sqrt{3}]$

Určete délku křivky v polárních souřadnicích:

a) $\rho = a\varphi\,;\quad a > 0\,;\quad \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$ (Archimedova spirála) $\left[\frac{a}{2}\operatorname{argsinh}2\pi + \pi a\sqrt{1+4\pi^2}\right]$

b) $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}\,;\quad a > 0$ $\left[\frac{3}{2}\pi a\right]$

c) $\rho\cdot\varphi = 1\,;\quad \varphi \in \left\langle\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right\rangle$ (hyperbolická spirála) $\left[\frac{5}{12} + \ln\frac{4}{3}\right]$

Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací oblasti ohraničené křivkami $y^2 = 4x$, $x = 1$ a $y = 0$ kolem osy x. $[2\pi]$

Vypočtěte objem chladící věže, jejíž plášť má tvar rotačního hyperboloidu $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\alpha \le z \le \beta$. $\left[\pi a^2\left(\beta - \alpha + \frac{\beta^3-\alpha^3}{3b^2}\right)\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne, když kolem osy y rotuje plocha ohraničená hyperbolami $x^2 - y^2 = 1$ a $y^2 - \frac{x^2}{2} = 1$; $x > 0$. $\left[4\pi\left(\sqrt{3} - \frac{2}{3}\right)\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací smyčky $(y-1)^2 = x^2(1-x)$ kolem osy x. $\left[\frac{16}{15}\pi\right]$

Vypočtěte objem kruhového žlabu, který vznikne rotací paraboly $z = \frac{(x-R)^2}{a}$; $0 < z < a < R$, kolem osy z. $\left[\frac{8\pi}{3}Ra^2\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací čáry $y^2 = x^2 - x^3$ kolem osy y. $\left[\frac{64}{105}\,\pi\right]$

Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného kardioidou $\rho = a(1 - \cos\varphi)$, $a > 0$, kolem osy x. $\left[\frac{8}{3}\,\pi a^3\right]$

Vypočtěte objem společné části vnitřku rotačního paraboloidu $2az = x^2 + y^2$ a koule $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$. $\left[\frac{1}{3}\,\pi a\left(6\sqrt{3} - 5\right)\right]$

Vypočtěte objem obecného trojosého elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$. $\left[\frac{4}{3}\,\pi abc\right]$

Vypočtěte povrch parabolického zrcadla o rovnici $z = a(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 \le r^2$. $\left[\frac{\pi}{6a^2}\left(\sqrt{(1 + 4a^2r^2)^3} - 1\right)\right]$

Vypočtěte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací čáry $y = \sin x$, $x \in \langle 0, \pi\rangle$ kolem osy x. $\left[2\pi\left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right)\right]$

Oblouk grafu funkce $y = \operatorname{tg} x$ pro $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle$ rotuje kolem osy x. Vypočtěte obsah plochy vzniklé touto rotací. $\left[\pi\left(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{2\sqrt{2} + 2}{\sqrt{5} + 1}\right)\right]$

Vypočtěte obsah plochy vzniklé rotací smyčky křivky $9ay^2 = x(3a - x)^2$ okolo osy x. $\left[3\pi a^2\right]$

Vypočtěte obsah plochy vzniklé rotací asteroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ kolem osy x. $\left[\frac{12}{5}\,\pi a^2\right]$

Vypočtěte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací jednoho oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ kolem osy x. $\left[\frac{64}{3}\,\pi a^2\right]$

Vypočtěte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky $\rho = 2a\cos\varphi$ kolem osy y. $\left[4\pi^2 a^2\right]$

Vypočtěte povrch rotační plochy vzniklé rotací elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$, kolem osy x.

$$\left[2\pi b\left(b + \frac{a}{\varepsilon}\,\arcsin\varepsilon\right)\ ;\ \text{kde}\ \ \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right]$$
