Cvičení 1

Lineární rovnice prvního řádu

1. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + x \operatorname{tg} t = \cos^2 t$, které vyhovuje podmínce $x(2\pi) = 2$.
Řešení:
Máme nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Funkce $h(t) = \operatorname{tg} t$ a $q(t) = \cos^2 t$ jsou definované a spojité v intervalech $\left(\frac{2k-1}{2}\,\pi, \frac{2k+1}{2}\,\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Protože je počáteční podmínka definována v bodě $t_0 = 2\pi$. Budeme hledat řešení v intervalu $t \in \left(\frac{3}{2}\,\pi, \frac{5}{2}\,\pi\right)$.
Nejprve určíme řešení příslušné homogenní rovnice

$$u' + u \operatorname{tg} t = 0\,.$$

To je $u(t) = C \cos t$. Jedno partikulární řešení nehomogenní rovnice najdeme variací konstanty. Řešení budeme hledat ve tvaru $w(t) = C(t) \cos t$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme $C'(t) = \cos t$, neboli $C(t) = \sin t$. Obecné řešení nehomogenní rovnice je $x(t) = C \cos t + \sin t \cos t$. Z podmínky $x(2\pi) = 2$ plyne, $C = 2$. Řešení Cauchyovy úlohy je tedy

$$x(t) = (2 + \sin t) \cos t \quad \text{pro} \;\; t \in \left(\frac{3}{2}\,\pi, \frac{5}{2}\,\pi\right).$$

---

2. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' - 2tx = t - t^3$, které vyhovuje podmínce $x(1) = 1$.
Řešení:
Máme najít řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Proto nejprve vyřešíme příslušnou homogenní rovnici $u' = 2tu$. Standardním způsobem získáme její řešení $u = C\mathrm{e}^{t^2}$. Řešení nehomogenní rovnice $w(t)$ získáme variací konstanty, tj. předpokládáme, že $w(t) = C(t)\mathrm{e}^{t^2}$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice dostaneme $C'(t) = (t - t^3)\mathrm{e}^{-t^2}$, čili $C(t) = \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2}$. Tedy hledané řešení nehomogenní rovnice je $w(t) = \frac{t^2}{2}$ a obecné řešení dané diferenciální rovnice je $x(t) = C\mathrm{e}^{t^2} + \frac{t^2}{2}$. Z počáteční podmínky plyne rovnost $x(1) = 1 = C\mathrm{e} + \frac{1}{2}$. Tedy $C = \frac{1}{2\mathrm{e}}$. Když dosadíme tuto konstantu do obecného řešení, získáme hledané řešení Cauchyho úlohy

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^{t^2-1} + t^2}{2}\,.$$

---

3. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + \frac{2x}{t^2 - 1} = t$, které vyhovuje podmínce $x(0) = 1$.
Řešení:
Máme řešit nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Funkce $h(t) = -\frac{2}{t^2-1}$ a $q(t) = t$ jsou definované a spojité v intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, +\infty)$. Protože počáteční podmínka je dána v bodě $t_0 = 0$, který leží v intervalu $(-1, 1)$, budeme hledat řešení rovnice v tomto intervalu.
Nejprve najdeme obecné řešení příslušné homogenní rovnice $u' + \frac{2u}{t^2-1} = 0$. Standardní metodou dostaneme

$$\frac{u'}{u} = \frac{2}{1 - t^2} = \frac{1}{1 + t} + \frac{1}{1 - t}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX a po integraci získáme $u(t) = C\,\dfrac{1+t}{1-t}$.

Řešení $w(t)$ nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $w(t) = C(t)\,\dfrac{1+t}{1-t}$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$C'(t) = \frac{t(1-t)}{1+t} = -t + 2 - \frac{2}{1+t}\,, \quad \text{neboli} \quad C(t) = -\frac{1}{2}\,(2-t)^2 - 2\ln(1+t)\,.$$

Partikulární řešení $w(t)$ nehomogenní rovnice je tedy $w(t) = \dfrac{1+t}{1-t}\left(-\dfrac{(t-2)^2}{2} - 2\ln(1+t)\right)$ a obecné řešení dané diferenciální rovnice je

$$x(t) = \frac{1+t}{1-t}\left(C - \frac{(2-t)^2}{2} - 2\ln(1+t)\right).$$

Z podmínky $x(0) = 1 = C - 2$ plyne, že $C = 3$, a tedy řešení dané Cauchyovy úlohy je

$$x(t) = \frac{1+t}{1-t}\left(3 - \frac{(2-t)^2}{2} - 2\ln(1+t)\right) \quad \text{pro} \ \ t \in (-1, 1)\,.$$

---

4. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' - 2x = t^2$, které vyhovuje podmínce $x(-1) = 0$.
Řešení:
Máme řešit nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Tato rovnice je speciálního typu. Funkce $h(t) = 2$ je konstantní. Proto lze hledat řešení příslušné homogenní rovnice $u' - 2u = 0$ ve tvaru $u = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Jestliže tento předpoklad dosadíme do homogenní rovnice, dostaneme $\lambda - 2 = 0$, která se nazývá *charakteristická rovnice.* Její řešení je $\lambda = 2$. Tedy obecné řešení homogenní rovnice je $u(t) = C\mathrm{e}^{2t}$.
Také partikulární řešení nehomogenní rovnice lze v tomto případě najít bez integrace. Protože pravá strana $q(t) = t^2$ je polynom stupně 2 a $\mu = 0$ není kořenem charakteristické rovnice, lze partikulární řešení nehomogenní rovnice hledat ve tvaru $w = at^2 + bt + c$, kde a, b a c jsou konstanty. Dosazením do původní rovnice a srovnáním koeficientů u různých mocnin proměnné t, dostaneme soustavu rovnic $-2a = 1$, $2a - 2b = 0$ a $b - 2c = 0$, která má řešení $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$ a $c = -\dfrac{1}{4}$. Proto je partikulární řešení nehomogenní rovnice rovno $w(t) = -\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{4}$ a její obecné řešení je $x(t) = C\mathrm{e}^{2t} - \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{4}$.
Z počáteční podmínky plyne $x(-1) = 0 = C\mathrm{e}^{-2} - \dfrac{1}{4}$, tedy $C = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$. Z toho dostáváme hledané řešení Cauchyho úlohy

$$x(t) = \frac{1}{4}\big(\mathrm{e}^{2(t+1)} - 2t^2 - 2t - 1\big)\,.$$

---

5. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' + 4x = t\mathrm{e}^{-4t} + 4t - 3$, které vyhovuje podmínce $x(0) = 2$.
Řešení:
Máme opět řešit nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty. Její charakteristická rovnice $\lambda + 4 = 0$ má řešení $\lambda = -4$, a tedy obecné řešení homogenní rovnice je $u(t) = C\mathrm{e}^{-4t}$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $w(t) = w_1(t) + w_2(t)$, kde $w_1(t)$ je partikulární řešení rovnice $w_1' + 4w_1 = t\mathrm{e}^{-4t}$ a w_2 je partikulární řešení rovnice $w_2' + 4w_2 = 4t - 3$. Protože $\mu = -4$ je řešením charakteristické rovnice, budeme hledat funkci w_1 ve tvaru $w_1(t) = t(at + b)\mathrm{e}^{-4t}$. Jestliže tento předpoklad dosadíme do rovnice pro w_1, dostaneme po srovnání koeficientů u různých mocnin proměnné t soustavu rovnic $2a = 1$ a $b = 0$. Tedy $w_1(t) = \dfrac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-4t}$. Funkci w_2 budeme hledat ve tvaru $w_2(t) = At + B$, protože $\mu = 0$ není řešení

charakteristické rovnice. Po dosazení do rovnice pro w_2 snadno zjistíme, že $w_2(t) = t - 1$. Obecné řešení dané diferenciální rovnice je tedy $x(t) = C\mathrm{e}^{-4t} + \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-4t} + t - 1$. Jestliže použijeme počáteční podmínku, dostaneme pro konstantu C vztah $2 = C - 1$, ze které plyne $C = 3$. Hledané řešení Cauchyovy úlohy je tedy

$$x(t) = \left(3 + \frac{t^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-4t} + t - 1\,.$$

---

6. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' - 3x = \sin t$, které vyhovuje podmínce $x(0) = \frac{1}{2}$.
Řešení:
Máme najít řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice $\lambda - 3 = 0$ má řešení $\lambda = 3$. Tedy obecné řešení příslušné homogenní rovnice je tedy $u(t) = C\mathrm{e}^{3t}$. Z tvaru pravé strany nehomogenní rovnice plyne, že její partikulární řešení lze hledat ve tvaru $w(t) = a\cos t + b\sin t$. Po dosazení do nehomogenní rovnice dostaneme po srovnání koeficientů u $\cos t$ a $\sin t$ soustavu lineárních rovnic $-3a + b = 0$ a $-a - 3b = 1$, jejíž řešení je $a = -\frac{1}{10}$ a $b = -\frac{3}{10}$. Našli jsme tedy jedno partikulární řešení nehomogenní rovnice $w(t) = -\frac{\cos t + 3\sin t}{10}$. Odtud plyne, že obecné řešení nehomogenní rovnice je $x(t) = C\mathrm{e}^{3t} - \frac{\cos t + 3\sin t}{10}$. Z počáteční podmínky pak dostaneme $C = \frac{3}{5}$, a tedy hledané řešení Cauchyho úlohy je

$$x(t) = \frac{6\mathrm{e}^{3t} - \cos t - 3\sin t}{10}\,.$$

---

7. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' - x = \cosh t$, které vyhovuje podmínce $x(0) = 1$.
Řešení:
Máme najít řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice $\lambda - 1 = 0$ má řešení $\lambda = 1$. Tedy obecné řešení příslušné homogenní rovnice je tedy $u(t) = C\mathrm{e}^{t}$. Pravá strana nehomogenní rovnice je $\cosh t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right)$. Proto budeme partikulární řešení nehomogenní rovnice hledat jako součet dvou funkcí w_1 a w_2, které jsou řešení rovnic $w_1' - w_1 = \frac{\mathrm{e}^t}{2}$ a $w_2' - w_2 = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}$. Protože $\mu = 1$ je řešení charakteristické rovnice budeme hledat w_1 ve tvaru $w_1(t) = at\mathrm{e}^t$. Po dosazení do rovnice dostaneme koeficient $a = \frac{1}{2}$, a tedy $w_1(t) = \frac{t}{2}\,\mathrm{e}^t$. Protože $\mu = -1$ není kořenem charakteristické rovnice, hledáme w_2 ve tvaru $w_2(t) = b\mathrm{e}^{-t}$. Po dosazení do rovnice dostaneme $b = -\frac{1}{4}$, a tedy $w_2(t) = -\frac{\mathrm{e}^{-t}}{4}$. Obecné řešení dané diferenciální rovnice je $x(t) = C\mathrm{e}^t + \frac{t}{2}\,\mathrm{e}^t - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{4}$. Z počáteční podmínky $x(0) = 1$ získáme $1 = C - \frac{1}{4}$, čili $C = \frac{5}{4}$. Tedy řešení Cauchyho úlohy je

$$x(t) = \frac{(5 + 2t)\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{4}\,.$$

---

8. Najděte řešení diferenciální rovnice $x' - \mathrm{i}nx = 0$, $n \in \mathbb{R}$, které vyhovuje podmínce $x(0) = x(2\pi)$.
Řešení:
Máme najít řešení homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty. Její charakteristická rovnice je $\lambda - \mathrm{i}n = 0$. Tedy obecné řešení je $x(t) = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$. Podmínka $x(0) =$

$x(2\pi)$ dává vztah $C = C\mathrm{e}^{2\pi in}$. Pokud $n \notin \mathbb{Z}$ plyne odsud $C = 0$ a rovnice má pouze triviální řešení $x(t) = 0$. Je-li ale $n \in \mathbb{Z}$, je řešení rovnice $x(t) = C\mathrm{e}^{int}$, kde C je libovolná komplexní konstanta.

---

9. Najděte řešení diferenciální rovnice $(t - 2tx - x)x' + x^2 = 0$.
Řešení:
Tato diferenciální rovnice není lineární. Ale pokud budeme považovat t za funkci proměnné x, pak platí $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x'}$ a daná rovnice přejde na diferenciální rovnici

$$(1-2x)t - x + x^2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{2x-1}{x^2}\,t + \frac{1}{x}\,. \tag{1}$$

Rovnice (1) již lineární je, a proto lze najít její řešení standardním způsobem. Nejprve nalezneme řešení homogenní rovnice

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{2x-1}{x^2} \Longrightarrow t(x) = Cx^2\mathrm{e}^{1/x}\,,$$

kde C je libovolná konstanta. Řešení $w(x)$ nehomogenní rovnice nalezneme variací konstanty, tj. budeme jej hledat ve tvaru $w(x) = C(x)\mathrm{e}^{1/x}$, kde $C(x)$ je diferencovatelná funkce proměnné x. Po dosazení do rovnice (1) dostaneme pro tuto funkci vztah

$$C'(x) = \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x} \Longrightarrow C(x) = \int \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x}\,\mathrm{d}x \overset{x=1/y}{\Longrightarrow} C(x) = \frac{x+1}{x}\,\mathrm{e}^{-1/x}\,.$$

Z toho plyne, že partikulární řešení diferenciální rovnice (1) je $w(x) = x(x+1)$ a obecné řešení této rovnice je

$$t(x) = Cx^2\mathrm{e}^{1/x} + x(x+1)\,,$$

kde C je libovolná konstanta. Řešení naší původní úlohy je pak funkce inverzní k této funkci.

---

10. Najděte řešení diferenciální rovnice $tx' + x = tx^2 \ln t$.
Řešení:
Daná diferenciální rovnice není lineární, ale lze na lineární diferenciální rovnici převést (*Bernoulliova rovnice*). Jestliže rovnici vydělíme x^2 dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{x'}{x^2}\,t + \frac{1}{x} = t\ln t\,.$$

Jestliže zavedeme novou proměnnou $y = \dfrac{1}{x}$, pak $y' = -\dfrac{x'}{x^2}$ a diferenciální rovnice (1) přejde na lineární rovnici

$$-ty' + y = t\ln t\,. \tag{1}$$

Nejprve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice $-tu' + u = 0$. Standardním způsobem dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \Longrightarrow u = Ct\,,$$

kde C je libovolná konstanta. Řešení $w(t)$ nehomogenní rovnice budeme hledat variací konstanty, tj. ve tvaru $w(t) = tC(t)$, kde $C(t)$ je diferencovatelná funkce proměnné t. Po dosazení do (1) dostaneme pro funkci $C(t)$ vztah

$$C'(t) = -\frac{\ln t}{t} \Longrightarrow C(t) = -\frac{\ln^2 t}{2} \Longrightarrow w(t) = -\frac{t}{2}\,\ln^2 t\,.$$

Tedy obecné řešení diferenciální rovnice (1) je

$$y(t) = \frac{t}{2}\left(C - \ln^2 t\right),$$

a tedy obecné řešení dané diferenciální rovnice je

$$x(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{2}{t\left(C - \ln^2 t\right)}\,,$$

kde C je libovolná konstanta.

Cvičení 2

NELINEÁRNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

1. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x' = \dfrac{x^2}{t^2+1}$, které vyhovuje počáteční podmínce: a) $x(5) = 0$; b) $x(1) = 1$; c) $x(t) \to 1$ pro $t \to \infty$.

Řešení:

Máme řešit diferenciální rovnici prvního řádu se separovanými proměnnými. V tomto případě je $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$ a $g(x) = x^2$. Tyto funkce jsou definované a spojité v celém $\mathbb{R}$. Rovnice $g(x) = x^2 = 0$ má jediné řešení $x = 0$, a tedy $x = 0$ je jedno řešení této rovnice. Protože $g'(x) = 2x$ je omezená funkce na každém konečném intervalu, splňuje pravá strana rovnice předpoklady věty o jednoznačnosti řešení. Proto je v případě a) $x = 0$ jediné řešení, které splňuje počáteční podmínku. Abychom dostali řešení úloh b) a c), najdeme obecné řešení této diferenciální rovnice. Standardním postupem dostaneme pro $x \neq 0$

$$\frac{x'}{x^2} = \frac{1}{t^2+1} \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} + C \Longrightarrow -\frac{1}{x} = \operatorname{arctg} t + C\,.$$

Tedy obecné nenulové řešení diferenciální rovnice je

$$x(t) = -\frac{1}{\operatorname{arctg} t + C}\,. \tag{1}$$

Definiční obor tohoto řešení je pro $|C| \geq \dfrac{\pi}{2}$ roven $\mathbb{R}$, ale pro $|C| < \dfrac{\pi}{2}$ je $(-\infty, \operatorname{tg} C)$ nebo $(\operatorname{tg} C, +\infty)$ podle toho, kde leží počáteční podmínka. V případě b) dostaneme z počátečních podmínek $1 = -\dfrac{1}{\pi/4 + C}$, tj. $C = -1 - \dfrac{\pi}{4}$. Řešení Cauchyho úlohy je tedy

$$x(t) = \frac{4}{\pi + 4 - 4 \operatorname{arctg} t} \quad \text{pro} \;\; t \in (-\infty, +\infty)\,.$$

V případě c) dostaneme z (1) pro limitu $t \to \infty$ vztah $1 = -\dfrac{1}{C + \pi/2}$, tj. $C = -1 - \dfrac{\pi}{2}$, a tedy řešení je

$$x(t) = \frac{2}{\pi + 2 - 2 \operatorname{arctg} t} \quad \text{pro} \;\; t \in (-\infty, +\infty)\,.$$

---

2. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $(1 - t^3)x' = t^2(x^2 - x - 2)$, které splňuje podmínku: a) $x(0) = 3$; b) $x(3) = 0$.

Řešení:

V tomto případě máme diferenciální rovnici, která vyřešená vzhledem k proměnné x'. Proto ji nejprve vyřešíme. Ale k tomu potřebujeme, aby $1 - t^3 \neq 0$, tj. $t \neq 1$. Dostaneme diferenciální rovnici

$$x' = \frac{t^2}{1-t^3}\,(x^2 - x - 2)\,, \tag{1}$$

což je rovnice se separovanými proměnnými. Zde je třeba upozornit na to, že bod $t = 1$ nepatří do definičního oboru řešení rovnice (1), ale může nebo nemusí patřit do definičního oboru řešení původní rovnice. Proto pokud lze prodloužit řešení rovnice (1) do bodu $t = 1$, musíme vyšetřovat chování řešení v okolí tohoto bodu zvlášť.

Rovnice (1) je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými, kde $f(t) = \dfrac{t^2}{1-t^3}$, jejíž obor spojitosti je $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a funkce $g(x) = x^2 - x - 2$, která je spojitá na celém $\mathbb{R}$. Její nulové body jsou řešením rovnice $x^2 - x - 2 = 0$, tj. body $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$. Derivace funkce $g'(x) = 2x - 1$ je omezená v každém konečném intervalu, a tedy konstantní řešení $x = -1$ a $x = 2$ jsou jednoznačná. V případě a) jsou počáteční podmínky $[t_0; x_0] = [0; 3]$. Proto budeme hledat v intervalu $t \in (-\infty, 1)$ a závisle proměnná x bude patřit do intervalu $(2, +\infty)$. Integrací rovnice (1) dostaneme

$$\int_3^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2 - \xi - 2} = \int_0^t \frac{\tau^2 \,\mathrm{d}\tau}{1 - \tau^3}, \quad \text{neboli} \quad \ln\left(4\,\frac{x-2}{x+1}\right) = -\ln(1 - t^3).$$

Když ještě vyřešíme tuto rovnici vzhledem k proměnné x, dostaneme řešení příslušné Cauchyho úlohy ve tvaru

$$x(t) = \frac{9 - 8t^3}{3 - 4t^3} \quad \text{pro} \quad t \in \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right) \subset (-\infty, 1).$$

V případě b) je počáteční podmínka dána v bodě $[t_0; x_0] = [3; 0]$. Proto budeme hledat řešení v intervalu $(1, +\infty)$ a hodnoty funkce $x(t)$ budou ležet v intervalu $(-1, 2)$. Integrací dostaneme rovnice (1)

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2 - \xi - 1} = \int_3^t \frac{\tau^2 \,\mathrm{d}\tau}{1 - \tau^3}, \quad \text{neboli} \quad \ln\left(\frac{2-x}{2(x+1)}\right) = \ln\frac{26}{t^3 - 1}.$$

Jestliže najdeme z poslední rovnice x, dostaneme

$$x(t) = \frac{2t^3 - 54}{t^3 + 51}.$$

Při řešení rovnice (1) jsme se museli omezit na interval $(1, +\infty)$, ale funkce $x(t)$ daná výše uvedeným vztahem má větší definiční obor. Jestliže ji dosadíme do původní rovnice, lze se přesvědčit, že je řešením dané diferenciální rovnice na intervalu $\left(-\sqrt[3]{51}, +\infty\right)$. Ale máme-li zkoumat, zda je toto řešení jediné na celém tomto intervalu, musíme podrobněji zkoumat chování obecného řešení v bodě $t = 1$.

Standardní metodou se snadno zjistí, že obecné řešení diferenciální rovnice (1) pro $t > 1$ a $-1 < x < 2$ je

$$x = \frac{2t^3 - 2 - C}{t^3 - 1 + C}, \tag{2}$$

kde $C > 0$ (v našem případě je $C = 52$). Toto řešení má pro $t \to 1+$ limitu -1 pro každou konstantu $C > 0$. Bod $(1, -1)$ je tzv. *singulárním bodem* dané rovnice. Derivace zprava tohoto obecného řešení v bodě $t = 1$ je rovna $x'(1) = \dfrac{9}{C}$. Je tedy určena konstantou C jednoznačně. Protože musí existovat derivace řešení $x(t)$ v bodě $t = 1$, musí být derivace zleva v tomto bodě rovna $\dfrac{9}{C} > 0$. Jak snadno nahlédneme, je musí hodnoty řešení $x(t)$ pro $t < 1$ ležet v intervalu $(-\infty, -1)$. Standardní metodou zjistíme, že obecné řešení v tomto intervalu má opět tvar (2). Protože je konstanta C jednoznačně určena derivací v bodě $t = 1$, lze řešení, které jsme získali výše na intervalu $(1, +\infty)$ jediným způsobem prodloužit pro $t < 1$. Z toho plyne, že řešení původní rovnice je jediné a je dáno vztahem

$$x(t) = \frac{2t^3 - 54}{t^3 + 51} \quad \text{pro} \quad t \in \left(-\sqrt[3]{51}, +\infty\right).$$

---

3. Najděte řešení Cauchyho úlohy $(1 - t^2)x' = 2\sqrt{x^2 - 1}$, které splňuje počáteční podmínku: a) $x(2) = \dfrac{5}{3}$; b) $x(0) = \dfrac{5}{4}$.

Řešení:

Opět jde o rovnici, která není vyřešena vzhledem k x'. Rovnici lze pro $t \neq \pm 1$ vyřešit, ale musíme si uvědomit, že jsme vyloučili body $t = \pm 1$. Proto řešení, které získáme integrací, je někdy možné rozšířit i za tyto body. Po vyřešení dostaneme rovnici se separovanými proměnnými

$$x' = \frac{2\sqrt{x^2-1}}{1-t^2}\,. \tag{1}$$

Tedy máme $f(t) = \dfrac{2}{1-t^2}$, což je spojitá funkce na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, +\infty)$. Funkce $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ je definována na intervalech $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$ a je v těchto intervalech spojitá. Nulové body funkce $g(x)$ jsou řešení rovnice $\sqrt{x^2-1} = 0$, tj. $x = \pm 1$. Známe tedy již dvě řešení diferenciální rovnice $x = \pm 1$. Ale protože funkce $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ není definována v bodech ± 1 bude třeba podrobně zkoumat body t_1, v nichž řešení $x(t)$ nabývá hodnoty $x(t_1) = \pm 1$.

V případě a) jsou dány počáteční podmínky v bodě $\left[2; \dfrac{5}{3}\right]$. Proto budeme hledat to řešení rovnice (1), jehož definiční obor je podinterval $(1, +\infty)$ a pro které je $x(t) \geq 1$. Obvyklým postupem dostaneme

$$\int_{5/3}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} = \int_2^t \frac{2\,\mathrm{d}\tau}{1-\tau^2} \quad \text{neboli} \quad \ln\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{3} = \ln\frac{t+1}{3(t-1)}\,.$$

Z této rovnice plyne

$$x + \sqrt{x^2-1} = \frac{t+1}{t-1}\,.$$

Najdeme funkci $x(t)$. Když si uvědomíme, že platí rovnost

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = x - \sqrt{x^2-1}\,,$$

dostaneme jednoduchou úpravou

$$x(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1}\,.$$

Toto řešení je definováno na intervalu $(1, +\infty)$ a je to jediné řešení dané Cauchyovy úlohy.

V případě b) jsou dány počáteční podmínky v bodě $\left[0; \dfrac{5}{4}\right]$. Proto budeme hledat to řešení rovnice (1), jehož definiční obor je podinterval $(-1, 1)$ a pro které je $x(t) \geq 1$. Standardním postupem dostaneme

$$\int_{5/4}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} = \int_0^t \frac{2\,\mathrm{d}\tau}{1-\tau^2} \quad \text{neboli} \quad \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right) = \ln\frac{1+t}{1-t}\,.$$

Z této rovnice plyne

$$x + \sqrt{x^2-1} = \frac{2(1+t)}{1-t}\,.$$

Najdeme funkci $x(t)$. Stejně jako v případě a) odtud plyne rovnost

$$x(t) = \frac{5+6t+5t^2}{4(1-t^2)}\,. \tag{2}$$

Funkce (2) má sice definiční interval $(-1, 1)$, ale to ještě neznamená, že je řešením dané rovnice. Měli bychom se ještě přesvědčit, že funkce (2) je skutečně správné řešení. Jde o to, že výraz $\sqrt{x^2-1}$ musí být větší nebo roven nule. Při řešení rovnice jsme totiž použili pouze skutečnosti, že $\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2 = x^2 - 1$. Z předchozích rovnic plyne, že

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{2(1+t)}{1-t} - x = \frac{(t+3)(3t+1)}{4(1-t^2)}\,.$$

Na intervalu $(-1,1)$ je tento výraz větší nebo roven nule pouze na intervalu $\left\langle -\frac{1}{3}, 1\right)$. Proto dává vztah (2) řešení pouze na tomto intervalu. V bodě $t = -\frac{1}{3}$ je $x\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$. Protože z rovnice (2) plyne, že na intervalu $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ je $x'(t) = \frac{(t+3)(3t+1)}{2(1-t^2)^2}$, je $x'\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$. Řešení lze tedy prodloužit na interval $\left(-1, -\frac{1}{3}\right\rangle$ tak, že na tomto intervalu definujeme $x(t) = 1$. Protože z rovnice (1) plyne, že na intervalu $(-1,1)$ je derivace řešení $x'(t) \geq 0$, je funkce na tomto intervalu rostoucí. Proto je funkce

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right\rangle \\ \frac{5+6t+5t^2}{4(1-t^2)} & \text{pro } t \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right) \end{cases} \tag{3}$$

jediné řešení dané Cauchyho úlohy pro diferenciální rovnici (1) na intervalu $(-1,1)$.
Ale když hledáme řešení původní Cauchyho úlohy, lze toto řešení prodloužit i na větší interval. Lze snadno nahlédnout, že řešení (3) lze pro každé $a < -1$ prodloužit na interval $(a,1)$ tak, že položíme $x(t) = 1$ pro $t \in (a, -1\rangle$. V bodě a již není funkce $1 - t^2 = 0$, a proto lze opět vyřešit danou rovnici vzhledem k proměnné x' a získat opět rovnici (1). Na intervalu $(-\infty, a)$ je, jak plyne z rovnice (1), derivace menší nebo rovna nule. Proto selhává náš argument, který jsme použili v intervalu $(-1,1)$ a protože v bodě $[a;1]$ nejsou splněny předpoklady věty o jednoznačnosti, může na intervalu $(-\infty, a)$ existovat řešení, které je různé od konstantního řešení $x(t) = 1$. Na intervalu $(-\infty, a)$ budeme tedy hledat nekonstantní řešení rovnice (1) s počáteční podmínkou $x(a) = 1$. Obvyklou integrací dostaneme

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = \int_a^t \frac{2\,\mathrm{d}\tau}{1-\tau^2}\,.$$

Stejným postupem jako výše dostaneme

$$x + \sqrt{x^2-1} = \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{1-a}{1+a}$$

a odtud

$$x(t) = \frac{(1+t)^2(1-a)^2 + (1-t)^2(1+a)^2}{2(t^2-1)(a^2-1)}\,. \tag{4}$$

Ještě se přesvědčíme, že výraz $\sqrt{x^2-1}$ je na intervalu $(-\infty, a)$ větší nebo roven nule. Po dosazení dostaneme výraz

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{2(at-1)(a-t)}{(t^2-1)(a^2-1)}\,,$$

který je pro $t < a < -1$ větší než nula.
Daná Cauchyho úloha má na intervalu $(-\infty, 1)$ nekonečně mnoho řešení, která jsou dána vztahem (4) pro $t \in (-\infty, a\rangle$, $x(t) = 1$ pro $t \in \left(a, -\frac{1}{3}\right\rangle$ a vztahem (2) pro $t \in \left\langle -\frac{1}{3}, 1\right)$, kde parametr $a \in (-\infty, -1)$ (pro $a = -\infty$ je první interval prázdná množina.)

4a. Najděte řešení Cauchyho úlohy $x' = \sqrt{1-x^2}$, které splňuje počáteční podmínku $x(\pi) = 0$.
Řešení:
Máme řešit Cauchyho úlohu pro diferenciální rovnici prvního řádu se separovanými proměnnými. Funkce $f(t) = 1$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$ a funkce $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ je definována na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a je na tomto intervalu spojitá Nulové body funkce $g(x)$ jsou ± 1. Máme tedy dvě konstantní řešení $x(t) = \pm 1$. Ale funkce $x'(t) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ není definovaná v bodech ± 1. Tedy jestliže pro nějaké t_1

je $x(t_1) = \pm 1$ může být v tomto bodě narušena jednoznačnost řešení dané Cauchyho úlohy. Nejprve najdeme obvyklým způsobem obecné řešení dané rovnice.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \mathrm{d}t + C \quad \text{neboli} \quad \arcsin x = t + C\,.$$

Bylo by ale chybou usoudit z této rovnice, že $x(t) = \sin(t + C)$. Funkce $\arcsin x$ má totiž obor hodnot $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, a proto se pro dané C musíme omezit interval na $t \in \left\langle -\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C \right\rangle$. Funkce $x(t) = \sin(t + C)$ je řešením dané rovnice, ale jen na výše uvedeném intervalu. Zkoumejme, zda je možné toto řešení prodloužit na větší interval. V bodě $t_1 = \frac{\pi}{2} - C$ je hodnota funkce $x(t_1) = 1$ a $x'(t_1) = 0$ proto lze funkci prodloužit pro $t > t_1$ konstantní funkcí $x(t) = 1$. Podobně pro $t < t_2$, kde $t_2 = -\frac{\pi}{2} - C$, lze funkci prodloužit konstantní funkcí $x(t) = -1$. Z původní diferenciální rovnice plyne, že derivace řešení je větší nebo rovna nule. To znamená, že řešení diferenciální rovnice je neklesající funkcí proměnné t. Proto pro $t > t_1$ musí být $x(t) = 1$ a pro $t < t_2$ musí být $x(t) = -1$. Z počáteční podmínky plyne, že $0 = \sin(\pi + C)$. Tedy se musí rovnat $C = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Ale bod $t = \pi$ musí ležet v intervalu, ve kterém řešení není konstantní. Z toho plyne, že musíme volit $C = -\pi$. Existuje tedy jediné řešení dané Cauchyho úlohy, které je dáno vztahy

$$x(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro } \ t \in \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right\rangle \\ \sin(t - \pi) & \text{pro } \ t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle \\ 1 & \text{pro } \ t \in \left\langle \frac{3\pi}{2}, +\infty \right) \end{cases}$$

4b. Najděte řešení diferenciální rovnice $\left(x'\right)^2 + x^2 = 1$, které splňuje počáteční podmínku $x(\pi) = 0$.
Řešení:
Na rozdíl od předchozího zde není rovnice vyřešena vzhledem k proměnné x'. Jestliže tuto rovnici vyřešíme, dostaneme dvě rovnice $x' = \pm\sqrt{1-x^2}$. Na první pohled by se mohlo zdát, že řešení dané diferenciální budou řešení z předešlé úlohy, tj. $x_1(t) = \sin(t - \pi) = -\sin t$ a $x_2(t) = -x_1(t) = \sin t$. To bude pravda, ale pouze v intervalu $\left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$. Ale obě tato řešení lze prodloužit na interval $(-\infty, +\infty)$ nekonečně mnoha způsoby. V každém bodě t_1, ve kterém je řešení $x(t_1) = 1$ lze pokračovat buď konstantní funkcí $x(t) = 1$ nebo vhodně posunutou funkcí $\sin(t + \alpha)$. Podobně lze pokračovat v bodech t_2, ve kterých je $x_(t_2) = -1$.

---

5. Najděte obecné řešení rovnice $x' = \dfrac{2tx}{t^2 - x^2}$.
Řešení:
Máme najít řešení nelineární diferenciální rovnice, která nemá separované proměnné. Ale tato rovnice je tzv. *homogenní rovnice*, tj. rovnice typu $x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$, kterou lze převést na rovnici se separovanými proměnnými tak, že zavedeme novou funkci $y(t)$ vztahem $x(t) = ty(t)$. Když tento vztah derivujeme, dostaneme $x' = ty' + y$. Jestliže dosadíme do dané rovnice, získáme vztah

$$ty' + y = \frac{2t^2 y}{t^2(1-y^2)}\,.$$

Po jednoduché úpravě dostaneme rovnici se separovanými proměnnými

$$ty' = \frac{y(1+y^2)}{1-y^2}\,,$$

kterou již umíme integrovat. Integrace dává

$$\int \frac{1-y^2}{y(1+y^2)}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \Longrightarrow \frac{y}{1+y^2} = C_1 t\,.$$

Když dosadíme nazpět za $y = \dfrac{x}{t}$ dostaneme po jednoduché úpravě a vhodné volbě konstanty řešení původní rovnice v implicitním tvaru

$$x^2 + t^2 = Cx\,,$$

což jsou rovnice systému kružnic, které se dotýkají osy Ot v počátku souřadnic.

---

6. Najděte integrální křivky diferenciální rovnice $(x+t)x' = x - t$.
Řešení:
Daná diferenciální rovnice je prvního řádu a je nelineární. Ale, jak se lze snadno přesvědčit, je homogenní. Proto použijeme novou závisle proměnnou $y(t)$, která je definována vztahem $x = ty$. Dosadíme do dané rovnice a po jednoduchých úpravách získáme vztah

$$ty' = -\frac{y^2+1}{y+1}\,,$$

což už je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Rovnici integrujeme obvyklým způsobem a dostaneme

$$\int \frac{y+1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} \Longrightarrow \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \operatorname{arctg} y = -\ln t + C_1\,.$$

Jestliže dosadíme nazpět za $y = \dfrac{x}{t}$, získáme implicitně definované řešení rovnice ve tvaru

$$\ln\sqrt{x^2+t^2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{t} = C_1\,.$$

Jestliže zavedeme nové proměnná pomocí rovnic $t = r\cos\varphi$ a $x = r\sin\varphi$, lze poslední rovnici psát ve tvaru

$$\ln r + \varphi = C_1 \quad \text{neboli} \quad r = C\mathrm{e}^{-\varphi}\,,$$

což je rovnice logaritmické spirály.

---

7. Najděte soustavu rovinných křivek, které jsou kolmé na systém křivek daný rovnicí $xy = C$, kde C je parametr.
Řešení:
Systém křivek je zadán pomocí implicitní funkce. Normálový vektor ke každé křivce tohoto systému v bodě $[x;y]$ je úměrný $\operatorname{grad}(xy) = (y,x)$. Tečný vektor ke křivce dané rovnicí $y = y(x)$ je úměrný vektoru $(1,y')$. Proto musí platit rovnost

$$(y,x) = \lambda(1,y')\,, \quad \text{tj.}\ \ y = \lambda\,, \quad x = \lambda y' = yy'\,.$$

Soustava hledaných křivek tedy vyhovuje diferenciální rovnici $x = yy'$, jejíž řešení je v implicitním tvaru dáno vztahem

$$y^2 - x^2 = C\,,$$

což je opět rovnice systému rovnoosých hyperbol pootočených o úhel $\dfrac{\pi}{4}$ kolem počátku souřadnic.

Cvičení 3

Homogenní lineární rovnice vyšších řádů

1. Najděte obecné řešení rovnice $2x'' + x' - x = 0$.

Řešení:

Daná rovnice je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Stačí tedy najít její dvě lineárně nezávislá řešení. Protože je to rovnice s konstantními koeficienty, budeme hledat její řešení ve tvaru $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Po dosazení získáme pro λ charakteristickou rovnici

$$2\lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda + 1)(2\lambda - 1) = 0\,,$$

která má dva kořeny $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$. Oba kořeny jsou násobnosti 1. Proto je fundamentální systém řešení této rovnice $u_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ a $u_2(t) = \mathrm{e}^{t/2}$ a obecné řešení

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{t/2}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou konstanty.

---

2. Najděte řešení Cauchyho úlohy $3x'' - 5x' - 2x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -3$.

Řešení:

Máme najít řešení Cauchyho úlohy pro homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Řešení rovnice lze hledat ve tvaru $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice získáme pro λ charakteristickou rovnici

$$3\lambda^2 - 5\lambda - 2 = (\lambda - 2)(3\lambda + 1) = 0\,.$$

Kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -\dfrac{1}{3}$, které jsou násobnosti 1. Tedy obecné řešení dané diferenciální rovnice je

$$u(t) = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{-t/3}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou konstanty. Jestliže dosadíme počáteční podmínky, získáme pro konstanty C_1 a C_2 soustavu lineárních algebraických rovnic

$$C_1 + C_2 = 2 \quad \text{a} \quad 2C_1 - \frac{1}{3}C_2 = -3 \Longrightarrow C_1 = -1\,,\;\; C_2 = 3\,.$$

Hledané řešení Cauchyho úlohy je

$$x(t) = 3\mathrm{e}^{-t/3} - \mathrm{e}^{2t}.$$

---

3. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $x''' - 4x'' + 4x' = 0$, která splňují podmínky $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

Řešení:

Nejprve najdeme obecné řešení dané rovnice. Ta je homogenní lineární diferenciální rovnice třetího řádu a konstantními koeficienty. Proto hledáme řešení ve tvaru $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Po dosazení dostaneme charakteristickou rovnici

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda - 2)^2 = 0\,.$$

Tato rovnice má kořen $\lambda = 0$, který je násobnosti 1, a $\lambda = 2$, což je kořen násobnosti 2. Proto je obecné řešení této diferenciální rovnice

$$u(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{2t} + C_3t\mathrm{e}^{2t}\,,$$

kde C_1, C_2 a C_3 jsou libovolné konstanty. Z počátečních podmínek dostaneme pro tyto konstanty soustavu dvou lineárních algebraických rovnic

$$C_1 + C_2 = 1\,, \quad 2C_2 + C_3 = 2\,,$$

jejíž obecné řešení je např. $C_1 = c$, $C_2 = 1 - c$ a $C_3 = 2c$, kde c je volitelný parametr. Tedy řešení naší rovnice, které splňují dané podmínky je

$$x(t) = c + (1-c)\mathrm{e}^{2t} + 2ct\mathrm{e}^{2t}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

---

4. Najděte řešení Cauchyovy úlohy $x'' + 2x' + 4x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

Řešení:
Máme řešit Cauchyho úlohu pro homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Proto hledáme řešení rovnice ve tvaru $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Po dosazení do rovnice získáme charakteristickou rovnici $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$. Tato rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$. Obecné řešení bychom mohli napsat v komplexním tvaru

$$u(t) = C_1\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})t} + C_2\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})t},$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné komplexní konstanty. Pokud nás ale zajímá reálné řešení, tj. řešení, pro které platí $\overline{u}(t) = u(t)$, musí být konstanty komplexně sdružené, tj. musí platit $C_2 = \overline{C_1}$. Ale z hlediska výpočtu konstant při řešení Cauchyho úlohy je většinou výhodnější volit reálný fundamentální systém řešení, tj.

$$u_1(t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})t}\right) = \mathrm{e}^{-t}\cos\sqrt{3}t \quad \text{a} \quad u_2(t) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})t}\right) = \mathrm{e}^{-t}\sin\sqrt{3}t\,,$$

který je lineární kombinací předchozího. Pomocí tohoto fundamentálního systému řešení lze pak napsat obecné reálné řešení dané diferenciální rovnice jako

$$u(t) = C_1\mathrm{e}^{-t}\cos\sqrt{3}t + C_2\mathrm{e}^{-t}\sin\sqrt{3}t\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné reálné konstanty. Jejich hodnotu dostaneme řešením soustavy lineárních algebraických rovnic

$$C_1 = 1 \quad \text{a} \quad -C_1 + \sqrt{3}C_2 = 2\,,$$

které plynou z počátečních podmínek. Řešení této soustavy je $C_1 = 1$ a $C_2 = \sqrt{3}$. Řešení dané Cauchyho úlohy je tedy

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos\sqrt{3}t + \sqrt{3}\mathrm{e}^{-t}\sin\sqrt{3}t\,.$$

---

5. Najděte fundamentální systém řešení diferenciální rovnice

$$x^{(4)} + 3x''' + 4x'' + 3x' + x = 0\,. \tag{1}$$

Řešení:
Protože (1) je lineární diferenciální rovnice čtvrtého řádu, je fundamentální systém řešení tvořen čtyřmi lineárně nezávislými řešeními této rovnice. Protože je to rovnice s konstantními koeficienty, budeme hledat řešení ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Po dosazení do rovnice (1), získáme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^4 + 3\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^2(\lambda^2+\lambda+1)\,.$$

Tato rovnice má kořen $\lambda = -1$, který je násobnosti 2 a dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{2,3} = \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, které jsou násobnosti 1. Fundamentální systém řešení rovnice (1) je např.

$$u_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\,, \quad u_2(t) = t\mathrm{e}^{-t} \quad u_3(t) = \mathrm{e}^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\, t\,, \quad u_4(t) = \mathrm{e}^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\, t\,.$$

---

6. Když víte, že jedno řešení diferenciální rovnice

$$(2t - t^2)x'' + (t^2 - 2)x' + 2(1 - t)x = 0 \tag{1}$$

je $x_1(t) = \mathrm{e}^t$, najděte její obecné řešení.

Řešení:

Protože koeficient u druhé derivace $2t - t^2 = 0$ pro $t = 0$ a $t = 2$, omezíme se na jeden z intervalů $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ nebo $(2, \infty)$.

Abychom našli obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu, potřebujeme najít dvě lineárně nezávislá řešení. Protože známe jedno řešení $x_1(t) = \mathrm{e}^t$, budeme druhé řešení hledat ve tvaru $x(t) = x_1(t)y(t) = \mathrm{e}^t y(t)$. Derivace funkce $x(t)$ jsou

$$x'(t) = (y' + y)\mathrm{e}^t \quad \text{a} \quad x''(t) = (y'' + 2y' + y)\mathrm{e}^t\,.$$

Když dosadíme do rovnice (1) dostaneme po snadných úpravách rovnici

$$(2t - t^2)y'' - (t^2 - 4t + 2)y' = 0\,.$$

Jestliže označíme $y'(t) = z(t)$, získáme pro funkci $z(t)$ lineární rovnici prvního řádu

$$(2t - t^2)z' = (t^2 - 4t + 2)z \Longrightarrow z = t(2 - t)\mathrm{e}^{-t}\,.$$

Jelikož $z(t) = y'(t) = t(2 - t)\mathrm{e}^{-t}$, dostaneme integrací $y(t) = -t^2\mathrm{e}^{-t}$, a tedy druhé řešení rovnice (1) je $x_2(t) = t^2$. Protože wronskián řešení $x_1(t) = \mathrm{e}^t$ a $x_2(t) = t^2$ je $W(t) = (2t - t^2)\mathrm{e}^t \neq 0$, jsou tato řešení lineárně nezávislá a tvoří tedy fundamentální systém řešení rovnice (1).

---

7. Předpokládejte, že diferenciální rovnice

$$t^2(t - 2)x'' - t(t^2 + 2t - 6)x' + (3t^2 - 6)x = 0 \tag{1}$$

má řešení tvaru $x = t^n$, kde n je konstanta. Najděte obecné řešení této diferenciální rovnice.

Řešení:

Protože koeficient u druhé derivace $2t - t^2 = 0$ pro $t = 0$ a $t = 2$, omezíme se na jeden z intervalů $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ nebo $(2, \infty)$.

Protože máme najít obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu, stačí určit dvě lineárně nezávislá rovnice (1). Nejprve najdeme řešení tvaru $x(t) = t^n$. Když dosadíme tuto funkci do diferenciální rovnice (1), dostaneme po jednoduchých algebraických úpravách vztah

$$(3 - n)(t^2 - nt + 2n - 2) = 0\,,$$

který musí platit pro všechna t. Proto je $n = 3$ a známe tedy jedno řešení $x_1(t) = t^3$ diferenciální rovnice (1). Protože již známe jedno řešení lineární homogenní diferenciální rovnice, lze snížit řád této rovnice tak, že položíme $x(t) = x_1(t)y(t) = t^3y(t)$. Snadno určíme derivace takové funkce $x(t)$:

$$x'(t) = t^3y' + 3t^2y \quad \text{a} \quad x'' = t^3y'' + 6t^2y' + 6ty\,.$$

Tyto derivace dosadíme do diferenciální rovnice (1) a po algebraických úpravách dostaneme rovnici

$$t(t-2)y'' - (t^2 - 4t + 6)y' = 0\,.$$

Jestliže zavedeme novou proměnnou $z(t) = y'(t)$, dostaneme lineární diferenciální rovnici

$$t(t-2)z' = (t^2 - 4t + 6)z \Longrightarrow \ln z = \int \frac{t^2 - 4t + 6}{t(t-2)}\,\mathrm{d}t = \int \left(1 + \frac{1}{t-2} - \frac{3}{t}\right)\mathrm{d}t \Longrightarrow z(t) = \frac{t-2}{t^3}\,\mathrm{e}^t\,.$$

Protože je $z(t) = y'(t)$ najdeme funkci $y(t)$ integrací:

$$y(t) = \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3}\right)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t^2}\,\mathrm{e}^t\,.$$

Tedy jsme našli druhé řešení $x_2(t) = t\mathrm{e}^t$ diferenciální rovnice (1). Protože wronskián řešení $x_1(t) = t^3$ a $x_2(t) = t\mathrm{e}^t$ je $W(t) = t^2(t-3)\mathrm{e}^t \neq 0$, jsou tato řešení lineárně nezávislá, a tedy tvoří fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (1). Obecné řešení této rovnice je

$$x(t) = C_1 t^3 + C_2 t\mathrm{e}^t\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

---

8. Diferenciální rovnice $t^2x'' - tx' - 3x = 0$ má řešení tvaru $x(t) = t^n$, kde n je konstanta. Najděte její řešení, které splňuje podmínku $x(1) = 0$, $x'(1) = 1$.

Řešení:

Máme najít řešení Cauchyho úlohy pro homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu. Nejprve najdeme obecné řešení této rovnice. Protože je tato rovnice druhého řádu, je její fundamentální systém řešení složen ze dvou lineárně nezávislých řešení. Jelikož předpokládáme, že má řešení tvar $x(t) = t^n$, dosadíme tento výraz do dané rovnice a po úpravách získáme pro n rovnici

$$n(n-1) - n - 3 = n^2 - 2n - 3 = (n+1)(n-3) = 0\,.$$

Tato rovnice má dvě řešení $n_1 = -1$ a $n = 3$. Získali jsme tedy dvě řešení dané rovnice $x_1(t) = t^{-1}$ a $x_2(t) = t^3$. Jejich wronskián $W(t) = 4t$, který je pro $t \neq 0$ nenulový. Tedy tato řešení jsou na intervalech $(-\infty, 0,)$, $(0, \infty)$ lineárně nezávislá, a proto tvoří fundamentální systém řešení. Obecné řešení dané rovnice je tedy

$$x(t) = \frac{C_1}{t} + C_2 t^3\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Ty najdeme z počátečních podmínek, které dávají

$$C_1 + C_2 = 0\,,\quad -C_1 + 3C_2 = 1 \Longrightarrow C_1 = -\frac{1}{4}\quad C_2 = \frac{1}{4}\,.$$

Řešení dané Cauchyho úlohy tedy je

$$x(t) = -\frac{1}{4t} + \frac{t^2}{4}\quad \text{pro}\quad t > 0\,.$$

Poznámka: Lineární diferenciální rovnice typu

$$t^n x^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 t x' + a_0 x = f(t)\,,$$

kde a_i jsou konstanty se nazývají *Eulerovy rovnice.* Pro $t > 0$ je lze přenést substitucí $t = \mathrm{e}^\tau$ na lineární rovnice s konstantními koeficienty. Tyto rovnice mají řešení tvaru $t^n \ln^k t$, kde n je kořen charakteristické rovnice, kterou dostaneme, když dosadíme do příslušné diferenciální rovnice $x(t) = t^n$, a k je násobnost tohoto kořene.

9. Diferenciální rovnice $t^2x'' + 3tx' + 2x = 0$ má řešení tvaru $x(t) = t^n$, kde n je konstanta. Najděte její fundamentální systém řešení.

Řešení:

Daná rovnice je homogenní lineární diferenciální druhého řádu. Fundamentální systém řešení se tedy skládá ze dvou nezávislých řešení. Protože je to rovnice Eulerova typu, předpokládáme řešení ve tvaru $x(t) = t^n$. Po dosazení předpokládaného řešení do diferenciální rovnice, dostaneme pro n charakteristickou rovnici

$$n(n-1) + 3n + 2 = n^2 + 2n + 2 = 0 \Longrightarrow n_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}\,.$$

Pro $t > 0$ má tedy rovnice komplexní fundamentální systém řešení

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t^{-1+\mathrm{i}} = t^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln t} = \frac{\cos(\ln t) + \mathrm{i}\sin(\ln t)}{t} \\ x_2(t) &= t^{-1-\mathrm{i}} = t^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ln t} = \frac{\cos(\ln t) - \mathrm{i}\sin(\ln t)}{t}\,. \end{aligned}$$

Je zvykem volit reálný fundamentální systém řešení

$$x_1(t) = \frac{\cos(\ln t)}{t} \quad \text{a} \quad x_2(t) = \frac{\sin(\ln t)}{t}\,,$$

který je lineární kombinace komplexního fundamentálního systému řešení.

---

10. V závislosti na konstantách $p, q > 0$ a q najděte fundamentální systém řešení diferenciální rovnice $x'' + 2px' + q^2x = 0$ (*volné tlumené kmity*).

Řešení:

Daná rovnice je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Její charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2p\lambda + q^2 = 0$ má řešení

$$\lambda_{\pm} = -p \pm \sqrt{p^2 - q^2}\,. \tag{1}$$

Fundamentální systém řešení závisí na hodnotě diskriminantu $p^2 - q^2$ rovnici (1).

1) Je-li diskriminant $p^2 - q^2 = r^2 > 0$ je fundamentální systém řešení $x_1(t) = \mathrm{e}^{-(p-r)t}$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{-(p+r)t}$. Obecné řešení

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-(p-r)t} + C_2\mathrm{e}^{-(p+r)t}$$

je klesající (protože $p > r$) a jeho limita pro $t \to +\infty$ je rovna nule.

Řešení, které splňuje počáteční podmínky $x(0) = x_0$ a $x'(0) = v_0$ je

$$x(t) = \mathrm{e}^{-pt}\left(x_0 \cosh rt + \frac{v_0 + px_0}{r}\sinh rt\right).$$

Toto řešení, pokud není nulové, má tu vlastnost, že může pouze jednou procházet bodem $x = 0$. To nastane v čase $t > 0$, pro který platí rovnost

$$x_0 \cosh rt + \frac{v_0 + (p-r)x_0}{r}\sinh rt = 0 \Longrightarrow t = \frac{1}{2r}\ln\frac{v_0 + (p-r)x_0}{v_0 + (p+r)x_0}$$

Takový pohyb se nazývá *aperiodický.*

2) Je-li diskriminant $p^2 - q^2 = 0$ je fundamentální systém řešení $x_1(t) = \mathrm{e}^{-pt}$ a $x_2(t) = t\mathrm{e}^{-pt}$. Obecné řešení

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-pt} + C_2t\mathrm{e}^{-pt}$$

má v podstatě stejné vlastnosti jako v případě 1). Řešení s danými počátečními podmínkami je

$$x(t) = \mathrm{e}^{-pt}\bigl(x_0 + (v_0 + px_0)t\bigr)\,,$$

které může opět procházet pouze jednou bodem $x = 0$. Takový pohyb se nazývá také aperiodický (ale nejsem si příliš jist, zda nemá nějaký přívlastek).
3) Je-li diskriminant $p^2 - q^2 = -\omega^2 < 0$, $\omega > 0$, je fundamentální systém řešení $x_1(t) = \mathrm{e}^{-pt}\cos\omega t$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t$. Obecné řešení

$$x(t) = \mathrm{e}^{-pt}\bigl(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t\bigr)$$

prochází bodem $x = 0$ pro $t > 0$ nekonečněkrát. Řešení, které splňuje počáteční podmínky je

$$x(t) = \mathrm{e}^{-pt}\left(x_0\cos\omega t + \frac{v_0 + px_0}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Tento pohyb můžeme považovat za vlnění s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{q^2 - p^2} = q\sqrt{1 - \frac{p^2}{q^2}}\,,$$

jehož amplituda A je klesající funkcí času, $A(t) = A_0\mathrm{e}^{-pt}$. V případě, že je *konstanta tlumení* p malá vzhledem k úhlové frekvenci volných netlumených kmitů q, se během jednoho kmitu, tj. za půlperiodu $\dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi}{\sqrt{q^2 - p^2}}$ amplituda změní $\mathrm{e}^{-\frac{p\pi}{\sqrt{q^2-p^2}}}$–krát. Logaritmus tohoto výrazu s opačným znaménkem, tj. $\dfrac{p\pi}{\sqrt{q^2 - p^2}}$ se nazývá *logaritmický dekrement* kmitavého pohybu.

---

11. V závislosti na parametru $r \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení diferenciální rovnice $x'' + rx = 0$, které splňují podmínky: a) $x(0) = 0$, $x'(1) = 1$; b) $x(0) = 0$, $x'(1) = 0$.

Řešení: Tato úloha se liší od všech předešlých úloh tím, že jsou podmínky na řešení dány ve dvou různých bodech. Takové podmínky se nazývají *okrajové podmínky* a úloha najít řešení diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami *okrajová úloha* pro diferenciální rovnici. Řešit okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici je zcela jiný, a zpravidla složitější, problém než najít řešení diferenciální rovnice s počátečními podmínkami.
1) Pro $r < 0$ je obecné řešení diferenciální rovnice

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{\sqrt{r}t} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{r}t}\,.$$

Z okrajových podmínek dostaneme pro konstanty C_1 a C_2 soustavu rovnic

$$C_1 + C_2 = 0\,,\quad \sqrt{r}\bigl(C_1\mathrm{e}^{\sqrt{r}} - C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{r}}\bigr) = \epsilon\,,$$

kde $\epsilon = 1$ v případě a), resp. $\epsilon = 0$ v případě b). Tedy v případě a) je $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{r}\cosh\sqrt{r}}$ a řešení rovnice je

$$x(t) = \frac{\sinh\sqrt{r}t}{\sqrt{r}\cosh\sqrt{r}}\,.$$

V případě b) je $C_1 = C_2 = 0$ a daná rovnice má pouze nulové řešení.

2) Pro $r = 0$ je obecné řešení rovno $x(t) = C_1 + C_2 t$. Z okrajových podmínek pak plyne, že v případě a) je řešení $x(t) = t$ a v případě b) dostáváme opět nulové řešení $x(t) = 0$.

3) Pro $r > 0$ je obecné řešení rovno

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{r} t + C_2 \sin \sqrt{r} t \,.$$

Z okrajových podmínek dostaneme pro konstanty C_1 a C_2 soustavu rovnic

$$C_1 = 0 \,, \quad \sqrt{r} C_2 \cos \sqrt{r} = \epsilon \,.$$

Tedy je-li $r \neq \left(\frac{2k+1}{2} \pi \right)^2$, má rovnice v případě a) řešení $x(t) = \dfrac{\sin \sqrt{r} t}{\sqrt{r} \cos \sqrt{r}}$ a v případě b) pouze nulové řešení $x(t) = 0$.

Ale je-li $r = \left(\frac{2k+1}{2} \pi \right)^2$, nemá rovnice v případě a) žádné řešení, ale v případě b) dostáváme množinu řešení $x(t) = C \sin \sqrt{r} t$, kde C je libovolná konstanta.

Poznámka. Hlavní rozdíl mezi oběma případy spočívá v tom, že úloha v případě a) nemá tu vlastnost, že lineární kombinace řešení je opět řešení, což mají homogenní lineární rovnice, kdežto úloha v případě b) tuto vlastnost má. Tedy z tohoto hlediska není úloha v tomto případě homogenní. Pokud bychom zavedli v případě a) novou proměnnou $y(t) = x(t) - t$ získali bychom nehomogenní rovnici $y'' + ry = rt$, jejíž řešení by vyhovovalo okrajovým podmínkám $y(0) = y'(0) = 0$. Je to vlastně nehomogenní úloha pro případ b), který lze považovat za příslušnou homogenní úlohu. Podrobnější analýzou tohoto příkladu bychom mohli ukázat, že "homogenní" rovnice (případ b) má pouze nulové řešení právě tehdy, když existuje právě jedno řešení "nehomogenní" rovnice (případ a) pro každou pravou stranu, tj. hodnotu $x'(1)$ (*Fredholmova alternativa*).
Tuto větu byste měli znát s teorie soustav lineárních algebraických rovnic a platí i v mnohem obecnějších případech.

---

12. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$x''' = \sqrt{1 + \big(x''\big)^2} \,. \tag{1}$$

Řešení: Protože diferenciální rovnice (1) neobsahuje proměnné x a x', zavedeme novou proměnnou $y(t) = x''(t)$. Z rovnice (1) dostaneme pro tu funkci diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' = \sqrt{1 + y^2} \,,$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Standardním postupem získáme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} = \int \mathrm{d}t \Longrightarrow \operatorname{argsinh} y = t + C_1 \Longrightarrow y(t) = \sinh(t + C_1) \,.$$

Protože $y = x''$, dostaneme dvojnásobnou integrací obecné řešení diferenciální rovnice (1) ve tvaru

$$x(t) = \sinh\big(t + C_1\big) + C_2 t + C_3 \,,$$

kde C_1, C_2 a C_3 jsou libovolné konstanty.

---

13. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$x\big(1 - \ln x\big)x'' + \big(1 + \ln x\big) \cdot \big(x'\big)^2 = 0 \,. \tag{1}$$

Řešení: Protože diferenciální rovnice (1) neobsahuje explicitně nezávisle proměnnou t, zavedeme novou proměnnou $p(x)$ rovnicí $p(x) = x'$. Protože pak platí $x'' = pp'$, získáme z rovnice (1) vztah

$$p\Big(x\big(1 - \ln x\big)p' + \big(1 + \ln x\big)p\Big) = 0 \,. \tag{2}$$

Pokud vyloučíme triviální případ $p = 0$, který odpovídá konstantnímu řešení $x(t) = C$, je rovnice (2) diferenciální rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými. Standardním postupem získáme

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} \Longrightarrow p(x) = C_1 x \big(\ln x - 1\big)^2 . \tag{3}$$

Protože $p = x'$ je diferenciální rovnice (3) rovnicí prvního řádu se separovanými proměnnými. Obvyklým způsobem dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = C_1 x \big(\ln x - 1\big)^2 \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x\big(\ln x - 1\big)^2} = \int C_1 \,\mathrm{d}t \Longrightarrow -\frac{1}{\ln x - 1} = C_1 t + C_2 \Longrightarrow \ln x = 1 - \frac{1}{C_1 t + C_2} .$$

Cvičení 4

Nehomogenní lineární rovnice vyšších řádů

Příklad 1. Najděte řešení Cauchyho úlohy $x'' + x' - 6x = 4te^t$ s počáteční podmínkou $x(0) = 1$; $x'(0) = -2$.

Řešení:
Máme najít řešení Cauchyho úlohy pro nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Nejdříve najdeme obecné řešení příslušné homogenní rovnice $u'' + u' - 6u = 0$. Protože je to lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, budeme hledat její řešení ve tvaru $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Po dosazení do homogenní rovnice dostaneme charakteristickou rovnici $\lambda^2 + \lambda - 6\lambda = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$, která má kořeny $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -3$, které jsou oba násobnosti 1. Proto je obecné řešení homogenní rovnice

$$u(t) = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{-3t}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Partikulární řešení $w(t)$ nehomogenní rovnice lze hledat odhadem. Protože 1 není kořenem charakteristické rovnice, budeme předpokládat, že partikulární řešení má tvar $w(t) = (at + b)\mathrm{e}^t$, kde a a b jsou konstanty. Dosadíme do dané nehomogenní rovnice a pro konstanty a a b získáme vztahy

$$-4at + 3a - 4b = 4t \Longrightarrow -4a = 4\,,\;\; 3a - 4b = 0 \Longrightarrow a = -1\,,\;\; b = -\frac{3}{4}\,.$$

Našli jsme tedy partikulární řešení nehomogenní rovnice $w(t) = -\dfrac{4t+3}{4}\,\mathrm{e}^t$. Proto je obecné řešení dané nehomogenní rovnice

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{-3t} - \frac{4t+3}{4}\,\mathrm{e}^t\,.$$

Abychom našli řešení Cauchyovy úlohy, musíme ještě určit konstanty C_1 a C_2. Z počátečních podmínek dostaneme pro tyto konstanty soustavu dvou algebraických lineárních rovnic

$$C_1 + C_2 - \frac{3}{4} = 1\,,\;\; 2C_1 - 3C_3 - \frac{7}{4} = -2 \Longrightarrow C_1 = 1\,,\;\; C_2 = \frac{3}{4}\,.$$

Tedy hledané řešení Cauchyho úlohy je

$$x(t) = \mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-3t} - \frac{4t+3}{4}\,\mathrm{e}^t\,.$$

Příklad 2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $x'' - 4x' + 5x = t^2$.

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Nejprve najdeme obecné řešení příslušné homogenní rovnice $x'' - 4x' + 5x = 0$. Protože se jedná o rovnici s konstantními koeficienty, budeme řešení této rovnice hledat ve tvaru $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Po dosazení do homogenní rovnice získáme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Longrightarrow (\lambda - 2 - \mathrm{i})(\lambda - 2 + \mathrm{i}) = 0\,.$$

Charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = 2 \pm \mathrm{i}$, které jsou násobnosti 1. Proto lze za fundamentální systém řešení zvolit funkce $u_1(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos t$, $u_2(t) = \mathrm{e}^{2t}\sin t$ a obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(t) = C_1\mathrm{e}^{2t}\cos t + C_2\mathrm{e}^{2t}\sin t\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Protože řešíme diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, pravá strana nehomogenní rovnice $b(t) = t^2$ je polynom stupně 2 a 0 není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru $w(t) = at^2 + bt + c$. Když dosadíme funkci $w(t)$ do dané nehomogenní rovnice dostaneme pro konstanty a, b a c rovnice

$$2a - 4(2at + b) + 5(at^2 + bt + c) = 5at^2 + (5b - 8a)t + 5c - 4b + 2a = t^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 5a = 1\,, \quad 5b - 8a = 0\,, \quad 5c - 4b + 2a = 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{5}\,, \quad b = \frac{8}{25}\,, \quad c = \frac{22}{125}\,.$$

Tedy partikulární řešení nehomogenní rovnice je $w(t) = \dfrac{1}{5}\,t^2 + \dfrac{8}{25}\,t + \dfrac{22}{125}$ a obecné řešení dané rovnice je

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{2t} \cos t + C_2 \mathrm{e}^{2t} \sin t + \frac{1}{5}\,t^2 + \frac{8}{25}\,t + \frac{22}{125}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Příklad 3. Najděte řešení diferenciální rovnice $x''' + x'' + x' + x = 8t\mathrm{e}^t$, které vyhovuje počátečním podmínkám $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$.

Řešení:

Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici třetího řádu. Proto nejprve najdeme řešení homogenní rovnice $x''' + x'' + x' + x = 0$. Protože je to lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, budeme hledat řešení ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Když dosadíme tuto funkci do homogenní rovnice, dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda + 1)(\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})\,.$$

Tedy charakteristická rovnice má tři kořeny $\lambda_1 = -1$. $\lambda_{2,3} = \pm\mathrm{i}$, které jsou všechny násobnosti 1. Proto je fundamentální systém řešení $u_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$, $u_2(t) = \cos t$, $u_3(t) = \sin t$ a obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t\,,$$

kde C_1, C_2 a C_3 jsou libovolné konstanty. Protože máme rovnici s konstantními koeficienty a pravá strana má speciální tvar, budeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice odhadem. Protože 1 není kořenem charakteristické rovnice má partikulární řešení nehomogenní rovnice tvar $w(t) = (at + b)\mathrm{e}^t$. Derivace této funkce jsou $w'(t) = (at + a + b)\mathrm{e}^t$, $w''(t) = (at + 2a + b)\mathrm{e}^t$, $w'''(t) = (at + 3a + b)\mathrm{e}^t$. Když dosadíme do nehomogenní rovnice, získáme pro konstanty a a b vztahy

$$4at + 6a + 4b = 8t \Longrightarrow 4a = 8\,, \quad 6a + 4b = 0 \Longrightarrow a = 2\,, \quad b = -3\,.$$

Tedy partikulární řešení nehomogenní rovnice je $w(t) = (2t - 3)\mathrm{e}^t$ a její obecné řešení je

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t + (2t - 3)\mathrm{e}^t\,,$$

kde C_1, C_2 a C_3 jsou libovolné konstanty. Ty musíme určit tak, aby řešení splňovalo počáteční podmínky. Když dosadíme tyto podmínky do obecného řešení, získáme pro konstanty C_1, C_2 a C_3 soustavu tří lineárních algebraických rovnic

$$C_1 + C_2 - 3 = 1\,, \quad -C_1 + C_3 - 1 = 1\,, \quad C_1 - C_2 + 1 = 1 \Longrightarrow C_1 = C_2 = 2\,, \quad C_3 = 4\,.$$

Hledané řešení diferenciální rovnice je tedy

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 2\cos t + 4\sin t + (2t - 3)\mathrm{e}^t\,.$$

Příklad 4. Najděte řešení diferenciální rovnice $x'' + 2x' + 5x = 17\cos 2t$, které splňuje počáteční podmínku $x(0) = 3$, $x'(0) = 0$.

Řešení:
Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu. Proto nejprve najdeme řešení homogenní rovnice $x'' + 2x' + 5x = 0$. Protože je to lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, budeme hledat řešení ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Když dosadíme tuto funkci do homogenní rovnice, dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = (\lambda + 1 - 2\mathrm{i})(\lambda + 1 + 2\mathrm{i}) = 0\,,$$

která má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2\mathrm{i}$, které jsou oba násobnosti 1. Fundamentální systém řešení je např. $u_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos 2t$, $u_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin 2t$. Odtud dostáváme obecné řešení homogenní rovnice

$$u(t) = C_1\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + C_2\mathrm{e}^{-t}\sin 2t\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Protože se jedná o lineární rovnici s konstantními koeficienty a její pravá strana má speciální tvar, budeme partikulární řešení nehomogenní rovnice hledat odhadem. Protože $2\mathrm{i}$ není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru $w(t) = a\cos 2t + b\sin 2t$, kde a a b jsou konstanty. Po dosazení do původní rovnice získáme pro konstanty a a b soustavu dvou algebraických rovnic

$$(a + 4b)\cos 2t + (-4a + b)\sin 2t = 17\cos 2t \Longrightarrow a + 4b = 17\,,\quad -4a + b = 0 \Longrightarrow a = 1\,,\quad b = 4\,.$$

Tedy jsme našli partikulární řešení nehomogenní rovnice $w(t) = \cos 2t + 4\sin 2t$. Tedy obecné řešení dané nehomogenní rovnice je

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t}\cos 2t + C_2\mathrm{e}^{-t}\sin 2t + \cos 2t + 4\sin 2t\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Ty musíme určit z počátečních podmínek. Po jejich dosazení dostaneme

$$C_1 + 1 = 3\,,\quad -C_1 + 2C_2 + 8 = 0 \Longrightarrow C_1 = 2\,,\quad C_2 = -3\,.$$

Tedy řešení dané Cauchyho úlohy je

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{-t}\cos 2t - 3\mathrm{e}^{-t}\sin 2t + \cos 2t + 4\sin 2t\,.$$

Příklad 5. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $x'' - 6x' + 8x = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t}$.

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Nejprve najdeme obecné řešení homogenní rovnice $x'' - 6x' + 8x = 0$. Protože je to rovnice s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Dosadíme-li do homogenní rovnice, získáme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0\,,$$

která má kořeny $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 4$, které jsou oba násobnosti 1. Proto lze fundamentální systém řešení zvolit ve tvaru $u_1(t) = \mathrm{e}^{2t}$ a $u_2(t) = \mathrm{e}^{4t}$. Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(t) = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{4t}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Protože máme rovnici s konstantními koeficienty a pravá strana nehomogenní rovnice má speciální tvar, lze hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice odhadem. Toto řešení budeme hledat ve tvaru $w(t) = w_1(t) + w_2(t)$, kde $w_1(t)$ je řešení nehomogenní rovnice s pravou stranou e^t a $w_2(t)$ řešení s pravou stranou e^{2t}. Protože 1 není kořenem charakteristické rovnice, hledáme $w_1(t)$ ve tvaru $w_1(t) = a\mathrm{e}^t$. Po dosazení do příslušné nehomogenní rovnice dostaneme vztah $a = \dfrac{1}{3}$. Tedy $w_1(t) = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^t$. Protože je 2 kořen charakteristické rovnice násobnosti 1, hledáme řešení $w_2(t)$ ve tvaru $w_2(t) = at\mathrm{e}^{2t}$. Po dosazení do příslušné nehomogenní rovnice dostaneme $a = -\dfrac{1}{2}$. Tedy $w_2(t) = -\dfrac{t}{2}\,\mathrm{e}^{2t}$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice je proto $w(t) = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^t - \dfrac{t}{2}\,\mathrm{e}^{2t}$ a její obecné řešení je

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{4t} + \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^t - \frac{t}{2}\,\mathrm{e}^{2t}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Příklad 6. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $x'' + x = \sin t \sin 2t$.

Řešení:

Máme najít partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Protože máme rovnici s konstantními koeficienty, a protože její pravá strana $\sin t \sin 2t = \dfrac{1}{2}\big(\cos t - \cos 3t\big)$, lze hledat partikulární řešení $w(t)$ odhadem. Řešení budeme hledat jako součet dvou funkcí $w(t) = w_1(t) + w_2(t)$, kde funkce $w_1(t)$ je partikulární řešení s pravou stranou $\dfrac{\cos t}{2}$ a $w_2(t)$ je partikulární řešení s pravou stranou $\dfrac{\cos 3t}{2}$. Protože charakteristická rovnice příslušné homogenní rovnice je $\lambda^2 + 1 = 0$ a tedy její řešení je $\lambda = \pm\mathrm{i}$, budeme hledat řešení $w_1(t)$ ve tvaru $w_1(t) = at\cos t + bt\sin t$. Protože je $w_1'(t) = (bt+a)\cos t + (-at+b)\sin t$ a $w_1''(t) = (-at+2b)\cos t + (-bt-2a)\sin t$, dostaneme po dosazení do rovnice

$$2b\cos t - 2a\sin t = \frac{\cos t}{2} \Longrightarrow a = 0\,,\;\; b = \frac{1}{4} \Longrightarrow w_1(t) = \frac{t}{4}\,\sin t\,.$$

Protože $3\mathrm{i}$ není řešením charakteristické rovnice, budeme řešení $w_2(t)$ hledat ve tvaru $w_2(t) = a\cos 3t + b\sin 3t$. Po dosazení do příslušné rovnice dostaneme

$$-8a\cos 3t - 8b\sin 3t = -\frac{\cos 3t}{2} \Longrightarrow a = \frac{1}{16}\,,\;\; b = 0 \Longrightarrow w_2(t) = \frac{\cos 3t}{16}\,.$$

Partikulární řešení dané rovnice je např.

$$w(t) = \frac{t}{4}\,\sin t + \frac{\cos 3t}{16}\,.$$

Příklad 7. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $x'' - 4x' + 5x = \mathrm{e}^{2t}\sin t$.

Řešení:

Máme najít partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Protože se jedná o rovnici s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou, budeme hledat partikulární řešení $w(t)$ odhadem. Příslušná charakteristická rovnice $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ má řešení $\lambda_{1,2} = 2 \pm \mathrm{i}$. Proto budeme předpokládat, že $w(t) = at\mathrm{e}^{2t}\cos t + bt\mathrm{e}^{2t}\sin t$. Derivace funkce $w(t)$ jsou

$$\begin{aligned} w'(t) &= \big((2a+b)t + a\big)\mathrm{e}^{2t}\cos t + \big((2b-a)t + b\big)\mathrm{e}^{2t}\sin t \\ w''(t) &= \big((3a+4b)t + 4a + 2b\big)\mathrm{e}^{2t}\cos t + \big((-4a+3b)t - 2a + 4b\big)\mathrm{e}^{2t}\sin t\,. \end{aligned}$$

Když dosadíme do dané rovnice, dostaneme vztah

$$2b\mathrm{e}^{2t}\cos t - 2a\mathrm{e}^{2t}\sin t = \mathrm{e}^{2t}\sin t \Longrightarrow a = -\frac{1}{2}\,,\;\; b = 0 \Longrightarrow w(t) = -\frac{t}{2}\,\mathrm{e}^{2t}\cos t\,.$$

Jiná možnost, jak najít partikulární řešení je tato. Pravou stranu nehomogenní rovnice napíšeme v komplexním tvaru

$$\mathrm{e}^{2t}\sin t = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t} - \mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})t}\Big)$$

a budeme hledat komplexní partikulární řešení $w_1(t)$ pro pravou stranu $b_1(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}$. Protože koeficienty v rovnici jsou reálné platí pro partikulární řešení $w_2(t)$ s pravou stranu $b_2(t) = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{(2-\mathrm{i})t} = \bar{b}_1(t)$ vztah $w_2(t) = \overline{w}_1(t)$ a partikulární řešení celé rovnice je $w(t) = w_1(t) + w_2(t) = 2\,\mathrm{Re}\big(w_1(t)\big)$. Stačí tedy najít řešení $w_1(t)$. Protože je $2+\mathrm{i}$ kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat $w_1(t)$ ve tvaru $w_1(t) = at\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}$, kde a je komplexní konstanta. Derivace funkce $w_1(t)$ jsou

$$w_1'(t) = a\big((2+\mathrm{i})t + 1\big)\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t} \quad \text{a} \quad w_1''(t) = a\Big((3+4\mathrm{i})t + 2(2+\mathrm{i})\Big)\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}\,.$$

Po dosazení do příslušné diferenciální rovnice dostaneme

$$2a\mathrm{i}\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t} \Longrightarrow a = -\frac{1}{4} \Longrightarrow w(t) = -\frac{t}{2}\,\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}\Big) = -\frac{t}{2}\,\mathrm{e}^{2t}\cos t\,.$$

Partikulární řešení dané rovnice je tedy

$$w(t) = -\frac{t}{2}\,\mathrm{e}^{2t}\cos t\,.$$

Příklad 8. Najděte partikulární řešení rovnice $x'' - x = \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}$.

Řešení:
Máme najít jedno řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Protože pravá strana této rovnice nemá speciální tvar, budeme hledat partikulární řešení metodou variace konstant. Příslušná homogenní rovnice $x'' - x = 0$ má charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 1 = 0$, která má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Tedy obecné řešení této homogenní rovnice je

$$u(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru $w(t) = C_1(t)\mathrm{e}^t + C_2(t)\mathrm{e}^{-t}$, kde $C_1(t)$ a $C_2(t)$ jsou diferencovatelné funkce. Derivováním dostaneme

$$w'(t) = C_1'(t)\mathrm{e}^t + C_2'(t)\mathrm{e}^{-t} + C_1\mathrm{e}^t - C_2\mathrm{e}^{-t}\,.$$

V této rovnosti položíme

$$C_1'(t)\mathrm{e}^t + C_2'(t)\mathrm{e}^{-t} = 0$$

a za tohoto předpokladu je $w'(t) = C_1\mathrm{e}^t - C_2\mathrm{e}^{-t}$. Tedy

$$w''(t) = C_1'(t)\mathrm{e}^t - C_2'(t)\mathrm{e}^{-t} + C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t}\,.$$

Když dosadíme do dané rovnice, zjistíme, že funkce $C_1'(t)$ a $C_2'(t)$ splňují soustavu rovnic

$$C_1'(t)\mathrm{e}^t + C_2'\mathrm{e}^{-t} = 0 \quad \text{a} \quad C_1'(t)\mathrm{e}^t - C_2'\mathrm{e}^{-t} = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,.$$

Z této soustavy plyne

$$C_1'(t) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{e}^{-t}\,,\ \ C_2'(t) = -\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{e}^t \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow C_1(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} - \operatorname{arctg}\mathrm{e}^{-t}\,,\ \ C_2(t) = -\frac{\mathrm{e}^t}{2} + \operatorname{arctg}\mathrm{e}^t\,.$$

Tedy partikulární řešení je

$$w(t) = \mathrm{e}^t C_1(t) + \mathrm{e}^{-t} C_2(t) = \mathrm{e}^{-t} \operatorname{arctg} \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t \operatorname{arctg} \mathrm{e}^{-t} .$$

Příklad 9. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $t^2x'' - 2tx' + 2x = t$, které splňuje podmínky $x(1) = 0$ a $x'(1) = 1$.

Řešení:
Vlastně máme řešit Cauchyho úlohu pro nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu. Protože daná rovnice Eulerova typu, budeme řešení příslušné homogenní rovnice $t^2x'' - 2tx' + 2x = 0$ hledat ve tvar $x(t) = t^n$. Po dosazení do homogenní rovnice získáme pro n rovnici $n^2 - 3n + 2 = 0$, která má řešení $n_1 = 1$ a $n_2 = 2$. Proto je řešení homogenní rovnice

$$u(t) = C_1 t + C_2 t^2 ,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Protože se nejedná o diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, budeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice variací konstant. Předpokládáme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru $w(t) = tC_1(t) + t^2C_2(t)$, kde $C_1(t)$ z $C_2(t)$ jsou diferencovatelné funkce proměnné t. V první derivaci funkce $w(t) = tC_1'(t) + t^2C_2'(t) + C_1(t) + 2tC_2(t)$ položíme identicky

$$tC_1'(t) + t^2C_2'(t) = 0 . \tag{1}$$

Za tohoto předpokladu je $w'(t) = C_1(t) + 2tC_2(t)$, a tedy druhá derivace funkce $w(t)$ je $w''(t) = C_1'(t) + 2tC_2'(t) + 2C_2(t)$. Když dosadíme do původní rovnice, získáme, uvažujeme-li podmínku (1), pro funkce $C_1'(t)$ a $C_2'(t)$ soustavu rovnic

$$tC_1'(t) + t^2C_2'(t) = 0 , \quad t^2C_1'(t) + 2t^3C_2'(t) = t \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow C_1'(t) = -\frac{1}{t} , \quad C_2'(t) = \frac{1}{t^2} \Longrightarrow C_1(t) = -\ln t , \quad C_2(t) = -\frac{1}{t} .$$

Našli jsme tedy partikulární řešení $w(t) = -t(\ln t + 1)$. Tedy obecné řešení dané rovnice je

$$x(t) = C_1 t + C_2 t^2 - t(\ln t + 1) ,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Protože hledáme řešení, které splňuje počáteční podmínky musíme ještě určit konstanty. Z nich získáme soustavu rovnic

$$C_1 + C_2 - 1 = 0 , \quad C_1 + 2C_2 - 2 = 1 \Longrightarrow C_1 = -1 , \quad C_2 = 2 .$$

Hledané řešení je tedy

$$x(t) = 2t^2 - t(\ln t + 2) \qquad \text{pro} \;\; t \in (0, \infty) .$$

Příklad 10. V závislosti na parametrech $p, q, \omega > 0$, $q^2 - p^2 > 0$, hledejte obecné řešení diferenciální rovnice $x'' + 2px' + q^2x = \sin \omega t$ (*tlumené kmity vynucené periodickou silou*).

Řešení:
Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Protože se jedná o diferenciální rovnici s konstantními koeficienty budeme hledat řešení příslušné homogenní rovnice ve tvaru $\mathrm{e}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Po dosazení do homogenní rovnice $x'' + 2px' + q^2x = 0$ získáme pro λ charakteristickou rovnici $\lambda^2 + 2p\lambda + q^2 = 0$, která má kořeny $\lambda_{1,2} = -p \pm \mathrm{i}\sqrt{q^2 - p^2} = -p \pm \mathrm{i}r$, kde jsme označili $r = \sqrt{q^2 - p^2}$. Obecné řešení homogenní rovnice je tedy

$$u(t) = C_1 \mathrm{e}^{-pt} \cos rt + C_2 \mathrm{e}^{-pt} \sin rt = C\mathrm{e}^{-pt} \sin(rt + \alpha) ,$$