Cvičení 1 — **Elementární funkce**

Příklad 1. Najděte definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$.

Řešení:

$$2 + x - x^2 \geq 0 \Longrightarrow (2 - x)(1 + x) \geq 0 \Longrightarrow x \in \langle -1, 2 \rangle \Longrightarrow D_f = \langle -1, 2 \rangle\,.$$

Příklad 2. Najděte definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{3 - x^2}}$.

Řešení:

$$\left(\frac{x}{3 - x^2} \geq 0\right) \wedge \left(3 - x^2 \neq 0\right) \Longrightarrow \left(\frac{x}{\left(\sqrt{3} - x\right)\left(\sqrt{3} + x\right)} > 0\right) \wedge \left(x \neq \pm\sqrt{3}\right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left\langle 0, \sqrt{3}\right) \Longrightarrow D_f = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left\langle 0, \sqrt{3}\right)\,.$$

Příklad 3. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f(x) = x^2 - 1$.

Řešení:
Definiční obor dané funkce je celá reálná osa $\mathbb{R}$. Daná funkce není na svém definičním oboru prostá. Proto k této funkci inverzní funkce neexistuje.

Příklad 4. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f_1(x) = x^2 - 1$, jejíž definiční obor je $D_{f_1} = \langle 0, +\infty)$.

Řešení:
Funkce $f_1(x)$ je prostá. Proto inverzní funkce existuje. Obor hodnot této funkce je množina $H_{f_1} = \langle -1, +\infty)$. Pro inverzní funkci $y = f_1^{(-1)}(x)$ platí

$$x = y^2 - 1 \Longrightarrow y^2 = x + 1 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{x + 1}\,.$$

Protože definiční obor $D_{f_1} = \langle 0, +\infty)$ a obor hodnot $H_{f_1} = \langle -1, +\infty)$, je inverzní funkce dána předpisem

$$f_1^{(-1)}(x) = \sqrt{x + 1}\,, \quad D_{f_1^{(-1)}} = H_{f_1} = \langle -1, +\infty) \quad \text{a} \quad H_{f_1^{(-1)}} = D_{f_1} = \langle 0, +\infty)\,.$$

Příklad 5. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f_2(x) = x^2 - 1$, jejíž definiční je $D_{f_2} = (-\infty, -2) \cup (0, 1)$.

Řešení:

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Funkce $f_2(x)$ je prostá. Proto inverzní funkce existuje. Obor hodnot této funkce je množina $H_{f_2} = (-1, 0) \cup (3, +\infty)$. Pro inverzní funkci $y = f_2^{(-1)}(x)$ platí

$$x = y^2 - 1 \Longrightarrow y^2 = x + 1 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{x+1}\,.$$

Protože definiční obor $D_{f_2} = (-\infty, -2) \cup (0, 1)$ a obor hodnot $H_{f_2} = (-1, 0) \cup (3, +\infty)$, je inverzní funkce dána předpisem

$$f_2^{(-1)}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+1} & \text{pro } x \in (3, +\infty) \\ \sqrt{x+1} & \text{pro } x \in (-1, 0) \end{cases}$$
$$D_{f_2^{(-1)}} = H_{f_2} = (-1, 0) \cup (3, +\infty) \quad \text{a} \quad H_{f_2^{(-1)}} = D_{f_2} = (-\infty, -2) \cup (0, 1)\,.$$

Příklad 6. Nalezněte definiční obor funkce $f(x) = \ln\bigl(1 - \ln(x^2 - 5x + 6)\bigr)$.

Řešení:
Definiční obor nalezneme z nerovností $\bigl(1 - \ln(x^2 - 5x + 6) > 0\bigr) \wedge \bigl(x^2 - 5x + 6 > 0\bigr)$. Z nich plyne

$$\begin{aligned}
&\bigl(\ln(x^2 - 5x + 6) < 1\bigr) \wedge \bigl((x-2)(x-3) > 0\bigr) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \bigl(x^2 - 5x + 6 < \mathrm{e}\bigr) \wedge \bigl(x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)\bigr) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \left(x - \frac{5 + \sqrt{1 + 4\mathrm{e}}}{2}\right)\left(x - \frac{5 - \sqrt{1 + 4\mathrm{e}}}{2}\right) < 0 \wedge \bigl(x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)\bigr) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow x \in \left(\frac{5 - \sqrt{1 + 4\mathrm{e}}}{2}, \frac{5 + \sqrt{1 + 4\mathrm{e}}}{2}\right) \cap \Bigl(\bigl(-\infty, 2\bigr) \cup \bigl(3, +\infty\bigr)\Bigr) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow D_f = \left(\frac{5 - \sqrt{1 + 4\mathrm{e}}}{2}, 2\right) \cup \left(3, \frac{5 + \sqrt{1 + 4\mathrm{e}}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Příklad 7. Naleznete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9} + \ln\bigl(x^3 - x\bigr)$.

Řešení:
Definiční obor dané funkce najdeme ze vztahů

$$\begin{aligned}
&\bigl(x^2 - 9 \neq 0\bigr) \wedge \bigl(x^3 - x > 0\bigr) \Longrightarrow \bigl(x \neq \pm 3\bigr) \wedge \bigl(x(x-1)(x+1) > 0\bigr) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty) \Longrightarrow D_f = (-1, 0) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)\,.
\end{aligned}$$

Příklad 8. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f(x) = \mathrm{e}^{x-1} + 2$.

Řešení:

Definiční obor této funkce je $D_f = \mathbb{R}$ a její obor hodnot je $H_f = (2, +\infty)$. Funkce je prostá, a proto k ní inverzní funkce $y = f^{(-1)}(x)$ existuje. Najdeme ji jako řešení rovnice $x = \mathrm{e}^{y-1} + 2$. Z ní snadno dostaneme vztah $y = 1 + \ln(x-2)$. Tedy inverzní funkce je $f^{(-1)}(x) = 1 + \ln(x-2)$. Její definiční obor je $D_{f^{(-1)}} = H_f = (2 + \infty)$ a její obor hodnot je $H_{f^{(-1)}} = D_f = \mathbb{R}$.

Příklad 9. Nalezněte definiční obor funkce $f(x) = \ln\bigl(1 - 2\cos^2 3x\bigr)^{2/3}$.

Řešení:
Definiční obor dané funkce najdeme z podmínky $\bigl(1 - 2\cos^2 3x\bigr)^{2/3} > 0$. To je ekvivalentní vztahu $1 - 2\cos^2 3x \neq 0$. Čili

$$\cos^2 3x \neq \frac{1}{2} \Longrightarrow \cos 3x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow 3x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x \neq \frac{1+2k}{12}\,\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Tedy $D_f = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\dfrac{2k-1}{12}\,\pi, \dfrac{2k+1}{12}\,\pi\right)$.

Příklad 10. Najděte definiční obor funkce $f(x) = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

Řešení:
Definiční obor dané funkce najdeme ze vztahů

$$\left(-1 \leq \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \leq 1\right) \wedge \left(\frac{1-x}{1+x} \geq 0\right) \wedge \bigl(1 + x \neq 0\bigr)\,.$$

Z nich plyne

$$\left(0 \leq \frac{1-x}{1+x} \leq 1\right) \wedge \bigl(x \neq -1\bigr) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bigl((1+x>0) \wedge (1-x \geq 0) \wedge (0 \leq x)\bigr) \vee \bigl((1+x<0) \wedge (1-x \geq 0) \wedge (0 \geq x)\bigr) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bigl(0 \leq x \leq 1\bigr) \Longrightarrow D_f = \langle 0, 1\rangle\,.$$

Příklad 11. Vyjádřete funkce $f(x) = \operatorname{argsinh} x$ pomocí logaritmů.

Řešení:
Funkce $y = \operatorname{argsinh} x$ je inverzní funkcí k funkci $f(x) = \sinh x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$. Tedy je řešením rovnice $x = \dfrac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2}$. Z této rovnice dostaneme

$$\mathrm{e}^{2y} - 2x\mathrm{e}^y - 1 = 0 \Longrightarrow \bigl(\mathrm{e}^y - x\bigr)^2 = 1 + x^2 \Longrightarrow \mathrm{e}^y = x \pm \sqrt{1+x^2}\,.$$

Protože $\mathrm{e}^y > 0$, musíme v posledním vztahu vzít pouze znaménko $+$. Pak snadno dostaneme

$$y = \operatorname{argsinh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{1+x^2}\bigr)\,.$$

Cvičení 2 — **Číselné množiny**

Příklad 1. Najděte definiční obor funkce $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{\arccos\sqrt{x^2-1}}$.

Řešení:
Funkce $f(x)$ je dána předpisem $f(x) = \exp\left(\ln\dfrac{x-2}{x+1}\cdot\arccos\sqrt{x^2-1}\right)$. Proto je její definiční obor dán nerovnostmi

$$\begin{aligned}
&\left(-1 \le \sqrt{x^2-1} \le 1\right) \wedge \left(x^2-1 \ge 0\right) \wedge \left(\frac{x-2}{x+1} > 0\right) \wedge \left(x+1 \ne 0\right) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \left(1 \le x^2 \le 2\right) \wedge \left(x \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)\right) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow x \in \langle -\sqrt{2}, -1) \Longrightarrow D_f = \left\langle -\sqrt{2}, -1\right) .
\end{aligned}$$

Příklad 2. Najděte supremum a infimum množiny $M = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ |x-1| < x\right\}$.

Řešení:
Množina M je dána nerovnostmi

$$x \le 1 \Longrightarrow 1 - x < x \Longrightarrow \frac{1}{2} < x \le 1$$

nebo

$$x \ge 1 \Longrightarrow x - 1 < x \Longrightarrow x \ge 1\,.$$

Tedy množina M je interval $M = (1/2, +\infty)$. Protože množina M není shora omezená, neexistuje v $\mathbb{R}$ supremum. $\inf M = \dfrac{1}{2}$.

Příklad 3. Nech $\mathbb{Q}$ značí množinu všech racionálních čísel. Najděte supremum a infimum množiny $M = \left\{x \in \mathbb{Q}\,;\ x^2 \le 2\right\}$: a) v množině $\mathbb{Q}$; b) v množině $\mathbb{R}$.

Řešení:
Množina M obsahuje všechna racionální čísla x, pro která je $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$. Protože $\sqrt{2}$ není racionální číslo, neexistuje v množině $\mathbb{Q}$ supremum ani infimum této množiny. Naproti tomu v množině reálných čísel $\mathbb{R}$ je $\sup M = \sqrt{2}$ a $\inf M = -\sqrt{2}$.

Příklad 4. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,.$$

Řešení:

Dané tvrzení lze dokázat matematickou indukcí. Nejprve ukážeme, že tvrzení platí pro $n = 1$. To znamená, že $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, což je pravda.

V dalším kroku předpokládáme, že uvedené tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$, a za tohoto předpokladu musíme ukázat, že tvrzení platí pro $n + 1$. Tedy předpokládáme, že platí

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

a musíme ukázat, že z toho plyne vztah

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}\,.$$

Podle předpokladu platí nerovnost

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}\,.$$

Ze vztahu $(2n+1)(2n+3) = 4n^2 + 8n + 3 < 4n^2 + 8n + 4 = (2n+2)^2$ získáme nerovnost $\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$. Z toho a předchozí nerovnosti již plyne požadovaná nerovnost.

Příklad 5. Mezi členy aritmetické posloupnosti platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ vztah $a_{n+1} = a_n + d$, kde d je konstanta. Dokažte, že pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti platí vztah

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right).$$

Řešení:

Tvrzení dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ dostaneme $s_1 = a_1 = \frac{1}{2}\left(a_1 + a_1\right)$. Tedy pro $n = 1$ naše tvrzení platí.

Dále předpokládáme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$. Z tohoto předpokladu musíme ukázat, že tvrzení platí pro $n + 1$. Pro s_{n+1} dostaneme

$$s_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) + a_{n+1}\,.$$

Pro n–tý člen aritmetické posloupnosti platí $a_n = a_1 + (n-1)d$. Toto tvrzení dokážeme opět indukcí. Je zřejmé pro $n = 1$ tvrzení platí. Předpokládejme, že platí pro $n \in \mathbb{N}$. Člen a_{n+1} je dán vztahem $a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n-1)d + d = a_1 + nd$. Tím je vztah $a_n = a_1 + (n-1)d$ dokázán pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Z výše odvozené relace pro s_{n+1} dostaneme

$$s_{n+1} = \frac{n}{2}\big(a_1 + a_1 + (n-1)d\big) + a_1 + nd = (n+1)a_1 + \frac{n(n+1)}{2}\,d =$$
$$= \frac{n+1}{2}\big(a_1 + a_1 + nd\big) = \frac{n+1}{2}\big(a_1 + a_{n+1}\big)\,.$$

Tím je uvedené tvrzení dokázáno pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 6. Mezi členy geometrické posloupnosti platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ vztah $a_{n+1} = qa_n$, kde q je konstanta. Dokažte, že když $q \neq 1$ platí pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti vztah

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1\,\frac{q^n - 1}{q - 1}\,.$$

Řešení:
Důkaz provedeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ má naše tvrzení tvar $s_1 = a_1 = a_1\,\dfrac{q-1}{q-1}$, a tedy platí.
Nyní předpokládáme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$ a z tohoto předpokladu dokážeme jeho platnost pro $n+1$. Protože pro $(n+1)$–ní člen geometrické posloupnosti platí $a_{n+1} = a_1 q^n$, dostáváme

$$s_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} = a_1\,\frac{q^n - 1}{q - 1} + a_1 q^n = a_1\,\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\,.$$

Příklad 7. Nechť $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ a $M = (-\infty, 1)$. Najděte obraz množiny M při zobrazení $f(x)$, tj. množinu $f(M)$.

Řešení:
Funkce $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ je inverzní funkcí k funkci $\operatorname{cotg} x$. Protože je funkce $\operatorname{cotg} x$ klesající, je také funkce $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ klesající. Navíc je funkce $\operatorname{arccotg} x$ spojitá na celé, $\mathbb{R}$. Proto je obraz intervalu $M = (-\infty, 1)$ interval. Protože platí $\operatorname{arccotg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ a pro velká záporná x se hodnota funkce $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ blíží k π, je obraz množiny M roven $f(M) = (\pi/4, \pi)$.

Příklad 8. Nechť má funkce $f(x)$ tvar $f(x) = ax + b$ a platí $f(0) = -2$ a $f(3) = 5$. Najděte $f(1)$ a $f(2)$.

Řešení:

Nejprve určíme konstanty a a b. Z rovností $f(0) = b = -2$ a $f(3) = 3a + b = 5$ dostaneme $a = \dfrac{7}{3}$ a $b = -2$. Tedy $f(x) = \dfrac{7}{3}x - 2$. Odtud plyne $f(1) = \dfrac{1}{3}$ a $f(2) = \dfrac{8}{3}$.

Příklad 9. Najděte funkci $f(x)$ tvaru $f(x) = a + b \cdot c^x$, jestliže je $f(0) = 15$, $f(2) = 30$ a $f(4) = 90$.

Řešení:
Konstanty a, b a c musí splňovat soustavu rovnic

$$f(0) = a + b = 15\,,\ f(2) = a + b \cdot c^2 = 30\,,\ f(4) = a + b \cdot c^4 = 90\,.$$

Z této soustavy rovnic plyne

$$a = 15 - b\,,\ b\bigl(c^2 - 1\bigr) = 15\,,\ b\bigl(c^4 - 1\bigr) = 75 \Longrightarrow \frac{c^4 - 1}{c^2 - 1} = c^2 + 1 = 5 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow c^2 = 4 \Longrightarrow c = \pm 2 \overset{c \geq 0}{\Longrightarrow} c = 2\,,\ b = 5\,,\ a = 10 \Longrightarrow f(x) = 10 + 5 \cdot 2^x\,.$$

Příklad 10. Nechť má funkce $f(x)$ definiční obor $D_f = (0, 1)$. Najděte definiční obor funkce $g(x) = f(\ln x)$.

Řešení:
Definiční obor funkce $g(x)$ určíme z podmínky $0 < \ln x < 1$. To znamená, že $D_g = (1, \mathrm{e})$.

Příklad 11. Najděte z jako funkci x a y, jestliže platí $\operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$.

Řešení:
Podle definice platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnost $\operatorname{tg}\bigl(\operatorname{arctg} x\bigr) = x$. Pro jednoduchost označme $\alpha = \operatorname{arctg} x$ a $\beta = \operatorname{arctg} y$. Pak platí $\operatorname{tg} \alpha = x$ a $\operatorname{tg} \beta = y$. Z definiční rovnice dostaneme

$$z = \operatorname{tg}\bigl(\operatorname{arctg} z\bigr) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{x + y}{1 - xy}\,.$$

Příklad 12. Nechť je $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ a $\psi(x) = \dfrac{1}{x}$. Najděte funkce $\varphi\bigl(\varphi(x)\bigr) = \varphi \circ \varphi(x)$, $\psi\bigl(\psi(x)\bigr) = \psi \circ \psi(x)$, $\varphi\bigl(\psi(x)\bigr) = \varphi \circ \psi(x)$ a $\psi\bigl(\varphi(x)\bigr) = \psi \circ \varphi(x)$.

Řešení:
V případě $\varphi \circ \varphi(x)$ dostaneme pro $x > 0$ rovnost $\operatorname{sgn}\bigl(\operatorname{sgn}(x)\bigr) = \operatorname{sgn}(1) = 1$; pro $x = 0$ dostáváme $\operatorname{sgn}\bigl(\operatorname{sgn}(0)\bigr) = \operatorname{sgn}(0) = 0$ a pro $x < 0$ rovnost $\operatorname{sgn}\bigl(\operatorname{sgn}(x)\bigr) = \operatorname{sgn}(-1) = -1$. Tedy $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

V případě $\psi \circ \psi(x)$ dostaneme $\psi\big(\psi(x)\big) = \dfrac{1}{1/x} = x$, $x \neq 0$.
V případě $\varphi \circ \psi(x)$ dostáváme pro $x > 0$ vztah $\varphi\big(\psi(x)\big) = \operatorname{sgn}\big(1/x\big) = 1$ a pro $x < 0$ vztah $\varphi\big(\psi(x)\big) = \operatorname{sgn}\big(1/x\big) = -1$. Tedy $\varphi \circ \psi = \operatorname{sgn}$ a definiční obor této funkce je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
V případě $\psi \circ \varphi(x)$ je pro $x > 0$ $\psi\big(\varphi(x)\big) = 1$ a pro $x < 0$ je $\psi\big(\varphi(x)\big) = -1$. Tedy $\psi \circ \varphi(x) = \operatorname{sgn}(x)$ s definičním oborem $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 13. Najděte $f(x)$, jestliže platí $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = x^2$.

Řešení:
Označme $y = \dfrac{x}{x+1}$. Pak je $x = \dfrac{y}{1-y}$. Po dosazení do daného vztahu dostaneme $f(y) = \left(\dfrac{y}{1-y}\right)^2$. Tedy $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^2}$.

Příklad 14. Je funkce $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$ sudá nebo lichá?

Řešení:
Platí

$$f(-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = -\ln\frac{1-x}{1+x} = -f(x)\,.$$

Funkce je lichá.

Příklad 15. Najděte nejmenší periodu funkce $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + 3\sin\dfrac{x}{3}$.

Řešení:
Funkce $f(x)$ je součtem tří periodických funkcí $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ a $f_3(x) = 3\sin\dfrac{x}{3}$. Jejich nejmenší periody jsou po řadě $L_1 = 2\pi$, $L_2 = \pi$ a $L_3 = 6\pi$. Nejmenší perioda je nejmenší společný násobek těchto tří period. Tedy nejmenší perioda je $L = 6\pi$.

Příklad 16. Najděte nejmenší periodu funkce $f(x) = \cos x + \sin\big(x\sqrt{2}\big)$.

Řešení:
Funkce $f(x)$ je součtem dvou periodických funkci $f_1(x) = \cos x$ a $f_2(x) = \sin\big(x\sqrt{2}\big)$. Jejich nejmenší periody jsou $L_1 = 2\pi$ a $L_2 = \pi\sqrt{2}$. Protože $\sqrt{2}$ je iracionální číslo, neexistují přirozená čísla p a q taková, že $2p = q\sqrt{2}$. Daná funkce není periodická.

Cvičení 3 — **Limity posloupností**

Příklad 1. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)(3n+2)(3n-8)}{n^3-n^2+1}$.

Řešení:
Daný výraz lze upravit na tvar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(3n+2)(3n-8)}{n^3-n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2+1/n)(3+2/n)(3-8/n)}{1-1/n+1/n^3} = 18\,.$$

Příklad 2. Podle definice ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^3+1} = 0$.

Řešení:
K danému $\varepsilon > 0$ máme najít $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby pro každé $n > n_0$ bylo $\dfrac{2n}{n^3+1} < \varepsilon$.
Platí nerovnosti

$$\frac{2n}{n^3+1} \le \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} \le \frac{2}{n}\,.$$

Proto stačí zvolit $\dfrac{2}{n_0} < \varepsilon$. Tedy lze vzít jakékoliv $n_0 > \dfrac{2}{\varepsilon}$.

Příklad 3. Najděte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$.

Řešení:
Daný výraz lze upravit na tvar

$$\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3} = \frac{8n^3+8n}{2n^3+6n}\,.$$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3} = 4$.

Příklad 4. Najděte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n-1)!}{(2n+1)!-(2n)!}$.

Řešení:
Daný výraz lze například napsat ve tvaru

$$\frac{(2n+1)!+(2n-1)!}{(2n+1)!-(2n)!} = \frac{(2n-1)!\big((2n+1)2n+1\big)}{(2n-1)!\big((2n+1)2n-2n\big)} = \frac{4n^2+2n+1}{4n^2}\,.$$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n-1)!}{(2n+1)!-(2n)!} = 1$.

Příklad 5. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^{n+3}+3^n}{2^{n+8}-3^{n+1}}$.

Řešení:
Po zkrácení 3^n dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^{n+3}+3^n}{2^{n+8}-3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^3\cdot(-2/3)^n+1}{2^8\cdot(2/3)^n-3} = -\frac{1}{3}\,.$$

Příklad 6. Kolik je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{2+a^n}$, kde $a>0$?

Řešení:
Pro $a>1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$. Proto je pro $a>1$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{2+a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2a^{-n}+1} = 1$.
Pro $a=1$ je daný výraz roven konstantě $a_n = \dfrac{1}{3}$, a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{2+a^n} = \dfrac{1}{3}$.
Pro $0<a<1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$. Proto je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{2+a^n} = 0$.

Příklad 7. Najděte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n\sin n!}{n^2+1}$.

Řešení:
Posloupnost $\sin n!$ je omezená, protože $\left|\sin n!\right| \le 1$. Neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n}{n^2+1} = 0$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n\sin n!}{n^2+1} = 0$.

Příklad 8. Najděte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n\cos n}{3n+7}$.

Řešení:
Tato limita neexistuje. Je jednoduché ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n}{3n+7} = \dfrac{5}{3}$. Ale již není tak snadné ukázat, že posloupnost $a_n = \cos n$ nemá limitu. Přesto kdybyste se moc snažili, ukážete, že množina hromadných bodů této posloupnosti je celý interval $\langle -1, 1\rangle$. Ale spíš si to jen pamatujte.

Příklad 9. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{4}{n}\right)^n$.

Řešení:

Jak by měl každý vědět, je tato limita rovna $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-4}$. Nedokazujte to, ale taky si příklady podobného typu spíš pamatujte.

Příklad 10. Kolik je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n+2}$?

Řešení:
Daný výraz lze upravit ne tvar

$$\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n+2} = \left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{3n+2}.$$

Tedy byste měli vědět, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n+2} = \mathrm{e}^6$.

Příklad 11. Najděte $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Řešení:
Protože víme, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Příklad 12. Dokažte, že platí následující věta: Nechť $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = \pm\infty$. Pak je $\lim\limits_{n\to\infty}\big(1+\alpha_n\big)^{\beta_n} = \exp\Big(\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n\beta_n\Big)$.

Řešení:
Daný výraz je typu 1^∞. Proto jej upravíme na tvar

$$\big(1+\alpha_n\big)^{\beta_n} = \mathrm{e}^{\beta_n\ln\left(1+\alpha_n\right)} = \exp\left(\beta_n\cdot\alpha_n\cdot\frac{\ln\big(1+\alpha_n\big)}{\alpha_n}\right).$$

Pak je ale

$$\lim_{n\to\infty}\big(1+\alpha_n\big)^{\beta_n} = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\big(\beta_n\alpha_n\big)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\big(1+\alpha_n\big)}{\alpha_n}\right).$$

Ale podle předchozího příkladu lze tušit (toto tvrzení dokážeme později), že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\big(1+\alpha_n\big)}{\alpha_n} = 1$. Proto platí

$$\lim_{n\to\infty}\big(1+\alpha_n\big)^{\beta_n} = \exp\Big(\lim_{n\to\infty}\alpha_n\beta_n\Big).$$

Příklad 13. Najděte $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2n}{n^3+1}\right)^{n^2+3}$.

Řešení:
Z předcházejícího příkladu plyne, že stačí najít $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{n^3+1}\left(n^2+3\right)\right)=2$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2n}{n^3+1}\right)^{n^2+3}=\mathrm{e}^2$.

Příklad 14. Určete hromadné body posloupnosti

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{7}{8},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \frac{2^n-1}{2^n},\ \ldots.$$

Řešení:
Tato posloupnost je složena ze dvou podposloupností $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ a $\left(\dfrac{2^n-1}{2^n}\right)$. Limity těchto posloupností jsou $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n}=1$. Tedy hromadné body posloupnosti $\left(a_n\right)$ jsou body 0 a 1.

Příklad 15. Najděte hromadné body posloupnosti $a_n=3\left(1-\dfrac{4}{3n}\right)+2\cos n\pi$.

Řešení:
Daná posloupnost je součtem dvou posloupností. První posloupnost $\left(3\left(1-\dfrac{4}{3n}\right)\right)$ má limitu 3. Druhou posloupnost lze napsat ve tvaru $2\cos n\pi=2\cdot(-1)^n$. Tato posloupnost má hromadné body ± 2. Proto jsou hromadné body dané posloupnosti rovny 5 a 1

Příklad 16. Určete hromadné body posloupnosti

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ \ldots.$$

Řešení:
Posloupnost $\left(a_n\right)$ obsahuje všechna racionální čísla z intervalu $(0,1)$. Proto je množina hromadných bodů této posloupnosti celý interval $\langle 0,1\rangle$.

Cvičení 4 — **Limity funkcí**

Příklad 1. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Řešení:
Platí $\lim\limits_{x\to 0}\bigl(x^2-1\bigr) = -1$ a $\lim\limits_{x\to 0}\bigl(2x^2-x-1\bigr) = -1$. Podle věty o podílu limit je tedy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = 1$.

Příklad 2. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Řešení:
Platí $\lim\limits_{x\to 1}\bigl(x^2-1\bigr) = 0$ a $\lim\limits_{x\to 1}\bigl(2x^2-x-1\bigr) = 0$. Proto daný výraz upravíme. Protože je

$$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \frac{x+1}{2x+1} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}\,.$$

Příklad 3. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Řešení:
Platí $\lim\limits_{x\to +\infty}\bigl(x^2-1\bigr) = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to +\infty}\bigl(2x^2-x-1\bigr) = +\infty$. Proto musíme daný výraz upravit. Platí

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1-1/x^2}{2-1/x-1/x^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Příklad 4. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x^2-1}$.

Řešení:
Platí $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$ a $\lim\limits_{x\to 1}\bigl(x^2-1\bigr) = 0$. Proto je daný výraz v okolí bodu $x = 1$ neomezený. Pro $x > 1$ je $x^2-1 > 0$. Tedy výraz je v pravém okolí bodu $x = 1$ kladný. Z toho důvodu je $\lim\limits_{x\to 1_+} \dfrac{x}{x^2-1} = +\infty$. Na druhé straně je pro $0 < x < 1$ výraz $x^2-1 < 0$. Tedy nabývá záporných hodnot. Proto je $\lim\limits_{x\to 1_-} \dfrac{x}{x^2-1} = -\infty$. Protože jsou limity zleva a zprava různé, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x^2-1}$ neexistuje.

Příklad 5. Nechť je $a_n b_m \neq 0$. Dokažte, že platí

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{pro } n = m \\ \pm\infty & \text{pro } n > m \end{cases}$$

Řešení:
Daný výraz lze upravit na tvar

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} =$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^{n-m} + a_{n-1}x^{n-m-1} + \cdots + a_1 x^{1-m} + a_0 x^{-m}}{b_m + b_{m-1}x^{-1} + \cdots + b_1 x^{1-m} + b_0 x^{-m}}\,.$$

Proto je pro $n < m$ tato limita rovna nule, pro $n = m$ je tato limita rovna $\dfrac{a_n}{b_m}$ a pro $n > m$ je limita rovna $\pm\infty$. Navíc je zřejmé, že znaménko této limity je stejné jako znaménko součinu $a_n b_m$.

Příklad 6. Najděte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

Řešení:
Jde o limitu výrazu $\dfrac{0}{0}$. Proto výraz upravíme. Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{6x+11x^2+6x^3}{x} = \lim_{x\to 0}\bigl(6+11x+6x^2\bigr) = 6\,.$$

Příklad 7. Najděte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\bigl(x^2-x-2\bigr)^{10}}{\bigl(x^3-12x+16\bigr)^5}$.

Řešení:
Jde o limitu výrazu typu $\dfrac{0}{0}$. Proto daný výraz upravíme. Protože platí $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$ a $x^3-12x+16 = (x-2)^2(x+4)$, dostaneme

$$\lim_{x\to 2} \frac{\bigl(x^2-x-2\bigr)^{10}}{\bigl(x^3-12x+16\bigr)^5} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{10}(x+1)^{10}}{(x-2)^{10}(x+4)^5} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^{10}}{(x+4)^5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5\,.$$

Příklad 8. Nechť m a n jsou přirozená čísla. Najděte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$.

Řešení:
Jde o limitu výrazu $\dfrac{0}{0}$. Proto výraz nejprve upravíme. Platí $x^m - 1 = (x-1)\big(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1$ a podobně pro n. Proto je daná limita rovna

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1} = \frac{m}{n}\,.$$

Příklad 9. Najděte limitu $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Řešení:
Protože jde o limity výrazu typu $\dfrac{\infty}{\infty}$, nejprve tento výraz upravíme. Po zkrácení $\sqrt{x}$ dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x^{-1} + \sqrt{x^{-3}}}}}{\sqrt{1 + x^{-1}}} = 1\,.$$

Příklad 10. Najděte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

Řešení:
Jde o limitu typu $\dfrac{0}{0}$. Proto výraz upravíme. Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\big(\sqrt{1+x} + 1\big)} = \frac{1}{2}\,.$$

Příklad 11. Najděte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$.

Řešení:
Jde o limitu typu $\dfrac{0}{0}$. Proto daný výraz nejprve upravíme. Platí

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} = \lim_{x\to 3} \left(\frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} \cdot \frac{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}} \right) =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)\big(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}\big)} = -\frac{1}{16}\,.$$

Příklad 12. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

Řešení:
Jde o limitu typu $\dfrac{0}{0}$. Proto daný výraz upravíme. Platí

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \left(\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \right) =$$
$$= \lim_{x\to 4} \left(\frac{2(x-4)}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} \right) = \frac{4}{3}\,.$$

Příklad 13. Dokažte, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Řešení:
Z definice funkce $\sin x$ pomocí jednotkové kružnice plynou pro kladná x z obsahů ploch nerovnosti

$$\frac{1}{2}\sin x \cos x < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} = \frac{\sin x}{2\cos x} \Longrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}\,.$$

Protože $\cos 0 = 1$ dostáváme z věty o sevření vztah $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Protože funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ je sudá, plyne z toho také $\lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Tedy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Příklad 14. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{x}$.

Řešení:
Jde o limitu typu $\dfrac{0}{0}$. Proto výraz nejprve upravíme. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x\cos 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{\cos 3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3\,,$$

protože je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} = 1$.

Příklad 15. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Řešení:
Jde o limitu typu $\dfrac{0}{0}$. Tedy výraz nejprve upravíme. Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2}\,.$$

Příklad 16. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\sin\bigl(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\bigr)$.

Řešení:
Protože je

$$\lim_{x\to+\infty}\bigl(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\bigr) = \lim_{x\to+\infty}\left(\bigl(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\bigr)\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0\,,$$

jde o limitu typu $\infty\cdot 0$. Tedy daný výraz nejprve upravíme. Platí

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sin\bigl(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\bigr) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\bigl(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\bigr)\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\bigl(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\bigr)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,.$$

Protože je $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to+\infty}\bigl(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\bigr) = 0$, je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\bigl(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\bigr)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = 1\,.$$

Dále platí

$$\lim_{x\to+\infty}\Bigl(\sqrt{x}\bigl(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\bigr)\Bigr) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\bigl(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\bigr)\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\,.$$

Tedy $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sin\bigl(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\bigr) = \dfrac{1}{2}$.

Důležité limity jsou $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ a $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$.

Příklad 17. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{3x+1}$.

Řešení:
Daný výraz upravíme na tvar

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{3x+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{3x+1} =$$
$$= \left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{x}\right)^{3}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right) = \mathrm{e}^{15}\,.$$

Příklad 18. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Řešení:
Jde o limitu typu $\dfrac{0}{0}$. Po úpravě dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \ln \mathrm{e} = 1\,.$$

Příklad 19. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

Řešení:
Protože je $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+x}{2+x} = \dfrac{2}{3}$ a $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$, je

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Příklad 20. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$.

Řešení:
Hledaná limita je typu 1^∞. Proto je

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x} = \lim_{x\to 0}(1-2x)^{1/x} = \mathrm{e}^{-2}\,.$$

Příklad 21. Nechť je funkce $y = f(x)$ definována v okolí bodu $x = +\infty$. Přímka $y = kx + q$ se nazývá *asymptota* ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $x = +\infty$, jestliže platí $\lim\limits_{x\to+\infty} \big[f(x) - (kx+q)\big] = 0$. Dokažte, že pro konstanty k a q platí vztahy

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - kx\big]\,.$$

Podobně se definuje asymptota v bodě $x = -\infty$.
Řešení:

Protože musí platit $\lim\limits_{x\to+\infty}\bigl[f(x)-(kx+q)\bigr]=0$, musí platit $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-kx-q}{x}=0$. Z toho plyne, že $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Pro toto k dostaneme ze vztahu $\lim\limits_{x\to+\infty}\bigl[f(x)-(kx+q)\bigr]=0$ pro q výraz $q=\lim\limits_{x\to+\infty}\bigl[f(x)-kx\bigr]$.

Příklad 22. Najděte asymptoty funkce $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x-2}$ v bodech $x=\pm\infty$.

Řešení:
Pro k dostaneme $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x\bigl(x^2+x-2\bigr)}=1$. Konstantu q pak najdeme ze vztahu

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\bigl[f(x)-kx\bigr]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-x^2+2x}{x^2+x-2}\right)=-1\,.$$

Tedy asymptoty v bodech $x=\pm\infty$ jsou $y=x-1$.

Příklad 23. Najděte asymptoty funkce $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ v bodech $x=\pm\infty$.
Řešení:
Směrnici asymptoty k najdeme ze vztahu $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\pm1$. Koeficient q musí splňovat vztah $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\bigl[f(x)-kx\bigr]$. Tedy v bodě $x=+\infty$ dostaneme $q=\lim\limits_{x\to+\infty}\Bigl[\sqrt{x^2+x}-x\Bigr]=\dfrac{1}{2}$. Tedy asymptota v bodě $x=+\infty$ je $y=x+\dfrac{1}{2}$. Podobně v bodě $x=-\infty$ je $q=\lim\limits_{x\to-\infty}\Bigl[\sqrt{x^2+x}+x\Bigr]=-\dfrac{1}{2}$. Tedy asymptota v bodě $x=-\infty$ je $y=-x-\dfrac{1}{2}$.

Příklad 24. Najděte body nespojitosti funkce $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$ a určete jejich charakter.
Řešení:
Funkce $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ je spojitá na celé reálné ose s výjimkou bodu $x=-1$. Protože je $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{(x+1)^2}=-\infty$, je nespojitost funkce $f(x)$ v tomto bodě druhého druhu.

Příklad 25. Najděte body nespojitosti funkce $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$ a určete jejich charakter.

Řešení:
Funkce $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}}$ je spojitá na celé reálné ose s výjimkou bodů $x = 0$ a $x = \pm 1$. Funkci $f(x)$ lze upravit na tvar $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Protože platí $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x+1} = 0$ a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x+1} = -1$, má funkce $f(x)$ v bodech $x = 1$ a $x = 0$ odstranitelnou nespojitost. V bodě $x = -1$ je $\lim\limits_{x\to -1_+} \dfrac{x-1}{x+1} = -\infty$. Tedy bod $x = -1$ je bodem nespojitost funkce $f(x)$ druhého druhu.

Příklad 26. Funkce $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ není definována v bodě $x = 0$. Určete $f(0)$ tak, aby byla funkce v bodě $x = 0$ spojitá.
Řešení:
Aby byla funkce $f(x)$ v bodě $x = 0$ spojitá, musíme ji tam dodefinovat její limitou. Tedy

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+x} \cdot \frac{(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}+1}{(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}+1} \right) = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{3}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 27. Funkce $f(x) = \sin x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$ není definována v bodě $x = 0$. Určete $f(0)$ tak, aby byla funkce v bodě $x = 0$ spojitá.
Řešení:
Aby byla funkce $f(x)$ v bodě $x = 0$ spojitá, musíme ji tam dodefinovat její limitou. Protože je $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ a funkce $\sin \dfrac{1}{x}$ je omezená, je $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot \sin \dfrac{1}{x} = 0$ Tedy musíme položit $f(0) = 0$.

Cvičení 5 — **Derivace**

Příklad 1. Najděte derivaci funkce $f(x) = \big(x^3 - 2x^2 + 1\big)\big(2x^3 + x^2 - x\big)$.

Řešení:
Funkci $f(x)$ lze zapsat ve tvaru

$$f(x) = 2x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x\,.$$

Podle věty o linearitě derivace a známého vztahu $\big(x^n\big)' = nx^{n-1}$ je

$$f'(x) = 12x^5 - 15x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 2x - 1\,.$$

Příklad 2. Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Řešení:
Jestliže napíšeme funkci $f(x)$ ve tvaru $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2 + 1}$, snadno dostaneme

$$f'(x) = \frac{4x}{\big(x^2 + 1\big)^2}\,.$$

Příklad 3. Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$.

Řešení:
Pomocí věty o derivaci podílu získáme

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\,x - (1 + \ln x)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}\,.$$

Příklad 4. Najděte derivaci funkce $f(x) = 2^{x^2}$.

Řešení:
Když napíšeme funkci $f(x)$ ve tvaru $f(x) = \mathrm{e}^{x^2 \ln 2}$, získáme pomocí věty o derivaci složené funkce

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x^2 \ln 2} 2x \ln 2 = 2^{x^2+1} x \ln 2\,.$$

Příklad 5. Najděte derivaci funkce $f(x) = x^{2x}$.

Řešení:

Jestliže napíšeme funkci $f(x)$ ve tvaru $f(x) = \mathrm{e}^{2x \ln x}$, získáme pomocí věty o derivaci složené funkce

$$f'(x) = \mathrm{e}^{2x \ln x} \left(2 \ln x + \frac{2x}{x} \right) = 2x^{2x} \big(\ln x + 1 \big) \, .$$

Příklad 6. Najděte derivaci funkce $f(x) = \ln\big(\operatorname{arctg} x\big)$.

Řešení:
Podle věty o derivaci složené funkce a známých vzorců pro derivace je

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1 + x^2} \, .$$

Příklad 7. Najděte derivaci funkce $f(x) = \log\big(x + \sqrt{x^2 + 1}\big)$.

Řešení:
Podle věty o derivaci složené funkce a známých vzorců pro derivace je

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{\ln 10 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \, .$$

Příklad 8. Najděte derivaci funkce $f(x) = \ln\big(\ln(\ln x)\big)$.

Řešení:
Podle věty o derivaci složené funkce a známých vzorců pro derivace je

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \, .$$

Příklad 9. Najděte derivaci funkce $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$.

Řešení:
Podle věty o derivaci složené funkce a známých vzorců pro derivace je

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \big(\sqrt{x}\big)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1 - x)}} \, .$$

Příklad 10. Najděte derivaci funkce $f(x) = \operatorname{arccotg}\big(\operatorname{tg} x\big)$.

Řešení:
Podle věty o derivaci složené funkce a známých vzorců pro derivace je

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x} = -1\,.$$

Příklad 11. Najděte derivaci funkce $f(x) = x^{\ln x}$.

Řešení:
Funkci $f(x)$ přepíšeme do tvaru $f(x) = \mathrm{e}^{\ln^2 x}$. Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\ln^2 x} \cdot \frac{2\ln x}{x} = 2x^{-1+\ln x} \cdot \ln x\,.$$

Příklad 12. Najděte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

Řešení:
Pomocí vět o derivacích postupně dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\operatorname{tg}(x/2)}\,\frac{1}{\cos^2(x/2)}\,\frac{1}{2} - \frac{-\sin^3 x - 2\sin x\cos^2 x}{2\sin^4 x} = \\ &= \frac{1}{4\sin(x/2)\cos(x/2)} - \frac{-\sin^2 x - 2\cos^2 x}{2\sin^3 x} = \frac{1}{2\sin x} + \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{2\sin^3 x} = \\ &= \frac{2\bigl(\sin^2 x + \cos^2 x\bigr)}{2\sin^3 x} = \frac{1}{\sin^3 x}\,. \end{aligned}$$

Příklad 13. Najděte derivaci funkce $f(x) = -x\operatorname{cotg} x + \ln\bigl(\sin x\bigr) - \dfrac{x^2}{2}$.

Řešení:
Pomocí vět o derivacích postupně dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\operatorname{cotg} x + \frac{x}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin x} - x = \frac{x\bigl(1-\sin^2 x\bigr)}{\sin^2 x} = \\ &= x\,\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = x\operatorname{cotg}^2 x\,. \end{aligned}$$

Příklad 14. Najděte derivaci funkce $f(x) = x\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\ln\bigl(x^2+1\bigr)$.

Řešení:

Pomocí vět o derivacích postupně dostaneme

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} + x\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x = \\
&= \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} + \frac{2x}{(x+1)^2+(x-1)^2} - \frac{x}{x^2+1} = \\
&= \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1} + \frac{2x}{2\bigl(x^2+1\bigr)} - \frac{x}{x^2+1} = \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 15. Najděte derivaci $f'(1)$ funkce $f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$.

Řešení:
V některých případech když hledáme derivaci funkce $f(x)$ v daném bodě, není třeba hledat derivaci v obecném bodě, ale určit derivaci pomocí definice. Například v tomto případě je $f(1) = 1$. Tedy podle definice derivace je

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\left(1+h+h\arcsin\sqrt{\frac{1+h}{2+h}}-1\right)\right] = \\
&= 1 + \lim_{h\to 0}\arcsin\sqrt{\frac{1+h}{2+h}} = 1 + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Jinak lze výpočet zjednodušit i jiným způsobem. Podle věty o derivaci součtu a součinu je

$$
f'(x) = 1 + \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + (x-1)\left[\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right]'.
$$

Protože v bodě $x=1$ je $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ rovno $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ a derivace funkce $\left[\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right]'$ je v tomto bodě omezená je

$$
f'(1) = 1 + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\cdot\left[\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right]'_{\Big|x=1} = 1 + \frac{\pi}{4}\,.
$$

Příklad 16. Nechť je $D(x)$ tzv. *Dirichletova funkce*, která je definována předpisem

$$
D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ iracionální} \\ 0 & \text{pro } x \text{ racionální.} \end{cases}
$$

Najděte derivaci funkce $f(x) = x^2 \cdot D(x)$ v bodě $x = 0$.

Řešení:
Protože funkce $D(x)$ není spojitá dokonce v žádném bodě, musíme se pokusit najít derivaci $f'(0)$ pomocí definice. Podle ní je

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 D(h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \big(hD(h)\big)\,.$$

Protože platí $\big|hD(h)\big| \le \big|h\big|$, je tato limita rovna nule. Tedy $f'(0) = 0$.

Příklad 17. Najděte obě jednostranné derivace funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ v bodě $x = 0$.

Řešení:
Pro $x \ge 0$ je $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} = \mathrm{e}^{-x}$. Tedy $f'_+(0) = -1$.
Pro $x \le 0$ je $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} = \mathrm{e}^{x}$. Tedy $f'_-(0) = 1$.

Příklad 18. Najděte obě jednostranné derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ v bodě $x = 0$.

Řešení:
Derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ je v obecném bodě různém od nuly dána vztahem $f'(x) = \dfrac{2}{3}\,x^{-1/3}$. V bodě $x = 0$ není tato derivace definována. Proto raději určíme jednostranné derivace přímo z definice. Pro $x \ge 0$ platí

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0_+} h^{-1/3} = +\infty\,.$$

Pro $x \le 0$ platí

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0_-} h^{-1/3} = -\infty\,.$$

Příklad 19. Najděte derivaci $f'(0)$ funkce $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ pro $x \ne 0$ a $f(0) = 0$.

Řešení:
Protože je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, je funkce $f(x)$ v bodě $x = 0$ spojitá. Lze se tedy pokusit najít její derivaci. Derivace funkce $f(x)$ v obecném bodě $x \ne 0$ je

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\,.$$

Tato funkce ale nemá limitu v bodě $x = 0$. Přesto je

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{h}\left(h^2 \sin \frac{1}{h} - 0\right)\right] = \lim_{h\to 0} \left(h \sin \frac{1}{h}\right) = 0\,.$$

Tedy derivace funkce $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ v bodě $x = 0$ existuje a je rovna nule. Uvědomte si, že derivace této spojité funkce není v bodě $x = 0$ spojitá.

CVIČENÍ 6 — **Diferenciály a geometrický význam derivace**

Příklad 1. Najděte diferenciál $\mathrm{d}f(x_0;h)$, kde $f(x) = (\sin x)^{x^2} + x$ a $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Řešení:
Diferenciál $\mathrm{d}f(x_0;h)$ funkce $f(x)$ v bodě x_0 je definován vztahem $\mathrm{d}f(x_0;h) = f'(x_0) \cdot h$. Protože platí $f(x) = (\sin x)^{x^2} + x = \mathrm{e}^{x^2 \ln(\sin x)} + x$, je

$$f'(x) = (\sin x)^{x^2} \left(2x \ln(\sin x) + x^2 \frac{\cos x}{\sin x}\right) + 1\,.$$

Tedy $f'(\pi/2) = 1$ a $\mathrm{d}f(\pi/2;h) = h$.

Příklad 2. Najděte diferenciál $\mathrm{d}f(x_0;h)$, kde $f(x) = \left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^{\cosh x} + \mathrm{e}^{2x}$ a $x_0 = 0$.

Řešení:
Diferenciál $\mathrm{d}f(x_0;h)$ funkce $f(x)$ v bodě x_0 je definován vztahem $\mathrm{d}f(x_0;h) = f'(x_0) \cdot h$. Protože platí $f(x) = \left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^{\cosh x} + \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{-\cosh x \cdot \ln(1-x^2)} + \mathrm{e}^{2x}$, je

$$f'(x) = (1-x^2)^{-\cosh x} \left(-\sinh x \cdot \ln(1-x^2) + \cosh x \cdot \frac{2x}{1-x^2}\right) + 2\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Tedy $f'(0) = 2$ a $\mathrm{d}f(0;h) = 2h$.

Příklad 3. Najděte diferenciál $\mathrm{d}f(x_0;h)$, kde $f(x) = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2-x^2}\right)^{\cosh x} + \mathrm{e}^{-3x}$ a $x_0 = 0$.
Řešení:
Diferenciál $\mathrm{d}f(x_0;h)$ funkce $f(x)$ v bodě x_0 je definován vztahem $\mathrm{d}f(x_0;h) = f'(x_0) \cdot h$. Protože platí $f(x) = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2-x^2}\right)^{\cosh x} + \mathrm{e}^{-3x} = \mathrm{e}^{-\cosh x \cdot \ln(\mathrm{e}^2-x^2)} + \mathrm{e}^{-3x}$, je

$$f'(x) = (\mathrm{e}^2-x^2)^{-\cosh x} \left(-\sinh x \cdot \ln(\mathrm{e}^2-x^2) + \cosh x \cdot \frac{2x}{\mathrm{e}^2-x^2}\right) - 3\mathrm{e}^{-3x}\,.$$

Tedy $f'(0) = -3$ a $\mathrm{d}f(0,h) = -3h$.

Příklad 4. Najděte diferenciál $\mathrm{d}f(x_0;h)$, kde $f(x) = (\sin x)^x + 2x$ a $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Řešení:

Diferenciál $\mathrm{d}f(x_0; h)$ funkce $f(x)$ v bodě x_0 je definován vztahem $\mathrm{d}f(x_0; h) = f'(x_0) \cdot h$. Protože platí $f(x) = (\sin x)^x + 2x = \mathrm{e}^{x \ln(\sin x)} + 2x$, je

$$f'(x) = (\sin x)^x \left(\ln(\sin x) + x \frac{\cos x}{\sin x} \right) + 2 .$$

Tedy $f'(\pi/2) = 2$ a $\mathrm{d}f(\pi/2; h) = 2h$.

Příklad 5. Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $2^{1.003}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x .$$

V našem případě zvolíme $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$ a $x - x_0 = \Delta x = 0.003$. Potom je $f(x_0) = f(1) = 2$ a $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$. Tedy $f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot \ln 2$. Protože $\ln 2 \doteq 0.69315$ dostaneme $2^{1.003} \approx 2 + 2 \ln 2 \cdot 0.003 \doteq 2.004$.

Příklad 6. Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $\ln 1.1$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x .$$

V našem případě zvolíme $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$ a $x - x_0 = \Delta x = 0.1$. Potom je $f(x_0) = f(1) = 0$ a $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Tedy $f'(x_0) = f'(1) = 1$. Tedy $\ln 1.1 \approx 0.1$.

Příklad 7. Pomocí diferenciálu najděte přibližně hodnotu $\sqrt{80}$.

Řešení:

Pomocí diferenciálu lze pro hodnotu diferencovatelné funkce $f(x)$ v bodě x přibližně psát

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0; x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x .$$

V našem případě zvolíme $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 81$ a $x - x_0 = \Delta x = -1$. Potom je $f(x_0) = f(81) = 9$ a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Tedy $f'(x_0) = f'(81) = \dfrac{1}{18}$. Tedy $\sqrt{80} \approx 9 + \dfrac{1}{18} \cdot (-1) \doteq 8.9445$.

Příklad 8. Pro měření gravitačního zrychlení pomocí kyvů kyvadla se používá vztah $g = \dfrac{4\pi^2\ell}{T^2}$, kde ℓ je délka kyvadla, T je perioda kyvu kyvadla. Jak se odrazí na hodnotě g relativní chyba δ při měření: a) délky ℓ; b) periody T?

Řešení:
Předpokládejme, že ℓ_0 a T_0 jsou přesné hodnoty délky kyvadla a jeho periody. Pak je přesná hodnota gravitačního zrychlení $g_0 = \dfrac{4\pi^2\ell_0}{T_0^2}$. Jestliže měřením zjistíme délku kyvadla $\ell = \ell_0 + \Delta\ell$, resp. periodu $T = T_0 + \Delta T$ ($\Delta\ell = \ell - \ell_0$ a $\Delta T = T - T_0$ se nazývají *absolutní chyba* a veličiny $\delta\ell = \dfrac{\Delta\ell}{\ell_0}$ a $\delta T = \dfrac{\Delta T}{T_0}$ jsou relativní chyby), najdeme z daného vzorce zrychlení $g = \dfrac{4\pi^2\ell}{T_0}$, resp. $g_0 = \dfrac{4\pi^2\ell_0}{T^2}$. Absolutní chyba nalezeného gravitačního zrychlení je $\Delta g = g - g_0 = \dfrac{4\pi^2(\ell-\ell_0)}{T_0^2}$, resp. $\Delta g = g - g_0 = \dfrac{4\pi^2\ell_0}{T^2} - \dfrac{4\pi^2\ell_0}{T_0^2}$. Relativní chybu měření g pak definujeme jako $\delta g = \dfrac{\Delta g}{g_0}$. pomocí diferenciálů pak dostaneme v prvním případě

$$\Delta g = \frac{4\pi^2}{T_0^2}\cdot\Delta\ell \quad \text{tj.} \quad \delta g = \delta\ell\,.$$

Ve druhém případě je

$$\Delta g = \frac{4\pi^2\ell_0}{(T_0+\Delta T)^2} - \frac{4\pi^2\ell_0}{T_0^2} \approx -\frac{8\pi^2\ell_0}{T_0^3}\cdot\Delta T\,, \ \text{ tedy } \ \delta g = -2\delta T\,.$$

Obecně jestliže je znám vztah mezi dvěmi veličinami $y = f(x)$ a z měření veličiny x určujeme pomocí tohoto vztahu veličinu y, dostaneme pro absolutní a relativní chyby vztahy

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x \quad \text{a} \quad \delta y = \frac{\Delta y}{y_0} \approx \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\cdot\Delta x\,.$$

Příklad 9. Najděte rovnice tečny ke grafu funkce $f(x) = \operatorname{arccotg}\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$ v bodě $M = [1;?]$.

Řešení:
Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je $y - y_0 = f'(x_0)\cdot\big(x - x_0\big)$, kde $y_0 = f(x_0)$. V našem případě je $y_0 = f(1) = \operatorname{arccotg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ a protože

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}\right)^2}\cdot\frac{-(1+\ln x)/x - (1-\ln x)/x}{(1+\ln x)^2}\,,$$

je $f'(1) = 1$. Tedy rovnice hledané tečny je $y - \dfrac{\pi}{4} = x - 1$, neboli $y = x - 1 + \dfrac{\pi}{4}$.

Příklad 10. Najděte rovnice tečny ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{1}{x} \ln \dfrac{1}{x}$ v bodě $M = \big[1; ?\big]$.

Řešení:
Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je $y - y_0 = f'(x_0) \cdot \big(x - x_0\big)$, kde $y_0 = f(x_0)$. V našem případě je $y_0 = f(1) = 0$ a protože

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\,,$$

je $f'(1) = -1$. Tedy rovnice hledané tečny je $y = -(x - 1)$, neboli $y = -x + 1$.

Příklad 11. Najděte rovnice tečny ke grafu funkce $f(x) = \big(x^2 - 1\big)^{\sin x}$ v bodě $M = \big[\pi; ?\big]$.

Řešení:
Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je $y - y_0 = f'(x_0) \cdot \big(x - x_0\big)$, kde $y_0 = f(x_0)$. V našem případě je $y_0 = f(\pi) = 1$ a protože platí $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x \cdot \ln(x^2 - 1)}$, je

$$f'(x) = (x^2 - 1)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x^2 - 1) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2 - 1} \right).$$

Tedy $f'(\pi) = -\ln(\pi^2 - 1)$. Rovnice hledané tečny je $y - 1 = -\ln(\pi^2 - 1) \cdot (x - \pi)$, neboli $y = -x \ln(\pi^2 - 1) + \pi \ln(\pi^2 - 1) + 1$.

Příklad 12. Najděte rovnice tečny ke grafu funkce $f(x) = \big(\cos x\big)^{\cosh x} + 3x$ v bodě $M = \big[0; ?\big]$.

Řešení:
Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je $y - y_0 = f'(x_0) \cdot \big(x - x_0\big)$, kde $y_0 = f(x_0)$. V našem případě je $y_0 = f(0) = 1$ a protože platí $f(x) = \mathrm{e}^{\cosh x \cdot \ln(\cos x)} + 3x$, je

$$f'(x) = (\cos x)^{\cosh x} \big(\sinh x \cdot \ln(\cos x) - \cosh x \cdot \operatorname{tg} x\big) + 3\,.$$

Tedy $f'(0) = 3$. Rovnice hledané tečny je $y - 1 = 3x$, neboli $y = 3x + 1$.

Příklad 13. Najděte rovnice normály ke grafu funkce $f(x) = \left(\dfrac{1}{1 - x^2} \right)^{\cosh x} + \mathrm{e}^{2x}$ v bodě $M = \big[0; ?\big]$.

Řešení:
Rovnice normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je $-f'(x_0)\cdot\big(y-y_0\big) = x - x_0$, kde $y_0 = f(x_0)$. V našem případě je $y_0 = f(0) = 2$ a protože platí $f(x) = \mathrm{e}^{-\cosh x\cdot\ln(1-x^2)} + \mathrm{e}^{2x}$, je

$$f'(x) = (1-x^2)^{-\cosh x}\left(-\sinh x\cdot\ln(1-x^2) + \cosh x\cdot\frac{2x}{1-x^2}\right) + 2\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Tedy $f'(0) = 2$. Rovnice hledané normály je $-2(y-2) = x$, neboli $y = -\frac{x}{2} + 2$.

Příklad 14. Najděte rovnice normály ke grafu funkce $f(x) = \big(\sin x\big)^{2x} + x^2$ v bodě $M = \big[\pi/2;?\big]$.

Řešení:
Rovnice normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je $-f'(x_0)\cdot\big(y-y_0\big) = x - x_0$, kde $y_0 = f(x_0)$. V našem případě je $y_0 = f(\pi/2) = 1 + \frac{\pi^2}{4}$ a protože platí $f(x) = \mathrm{e}^{2x\cdot\ln(\sin x)} + x^2$, je

$$f'(x) = (\sin x)^{2x}\left(2\ln(\sin x) + 2x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right) + 2x\,.$$

Tedy $f'(\pi/2) = \pi$. Rovnice hledané normály je $-\pi\left(y - 1 - \frac{\pi^2}{4}\right) = x - \frac{\pi}{2}$, neboli $y = -\frac{x}{\pi} + \frac{\pi^2}{4} + \frac{3}{2}$.

Příklad 15. Najděte rovnice normály ke grafu funkce $f(x) = \big(\cos x\big)^{\cosh x} + 3x$ v bodě $M = \big[0;?\big]$.

Řešení:
Rovnice normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je $-f'(x_0)\cdot\big(y-y_0\big) = x - x_0$, kde $y_0 = f(x_0)$. V našem případě je $y_0 = f(0) = 1$ a protože platí $f(x) = \mathrm{e}^{\cosh x\cdot\ln(\cos x)} + 3x$, je

$$f'(x) = (\cos x)^{\cosh x}\big(\sinh x\ln(\cos x) - \cosh x\cdot\mathrm{tg}\,x\big) + 3\,.$$

Tedy $f'(0) = 3$. Rovnice hledané normály je $-3(y-1) = x$, neboli $y = -\frac{x}{3} + 1$.

Příklad 16. Najděte rovnice normály ke grafu funkce $f(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ v bodě $M = \big[1/2;?\big]$.

Řešení:

Rovnice normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je $-f'(x_0) \cdot \big(y - y_0\big) = x - x_0$, kde $y_0 = f(x_0)$. V našem případě je $y_0 = f(1/2) = -\dfrac{\ln 3}{2}$. Protože

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{1 - x^2}\,,$$

je $f'(1/2) = \dfrac{8}{3}$. Tedy rovnice hledané normály je $-\dfrac{8}{3}\left(y + \dfrac{\ln 3}{2}\right) = x - \dfrac{1}{2}$, neboli $y = -\dfrac{3}{8}\,x + \dfrac{3}{16} - \dfrac{\ln 3}{2}$.

Příklad 17. Najděte rovnice normály ke grafu funkce $f(x) = \big(\sin x\big)^{x^2} + 3\cos x$ v bodě $M = \big[\pi/2; ?\big]$.

Řešení:
Rovnice normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je $-f'(x_0) \cdot \big(y - y_0\big) = x - x_0$, kde $y_0 = f(x_0)$. V našem případě je $y_0 = f(\pi/2) = 1$ a protože platí $f(x) = \mathrm{e}^{x^2 \cdot \ln(\sin x)} + 3\cos x$, je

$$f'(x) = (\sin x)^{x^2}\left(2x\ln(\sin x) + x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right) - 3\sin x\,.$$

Tedy $f'(\pi/2) = -3$. Rovnice hledané normály je $3(y - 1) = x - \dfrac{\pi}{2}$, neboli $y = \dfrac{x}{3} + 1 - \dfrac{\pi}{6}$.

Příklad 18. Najděte rovnice normály ke grafu funkce $f(x) = \big(4 - x^2\big)^{\sin x} + 3\cos x$ v bodě $M = \big[0; ?\big]$.

Řešení:
Rovnice normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je $-f'(x_0) \cdot \big(y - y_0\big) = x - x_0$, kde $y_0 = f(x_0)$. V našem případě je $y_0 = f(0) = 4$ a protože platí $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x \cdot \ln(4 - x^2)} + 3\cos x$, je

$$f'(x) = (4 - x^2)^{\sin x}\left(\cos x \ln(4 - x^2) - \frac{2x}{4 - x^2} \cdot \sin x\right) - 3\sin x\,.$$

Tedy $f'(0) = \ln 4$. Rovnice hledané normály je $-\ln 4 \cdot (y - 4) = x$, neboli $y = -\dfrac{x}{\ln 4} + 4$.

Příklad 19. Určete rovnici tečny ke grafu funkce $y = x^3 + x - 2$, která je rovnoběžná s přímkou $y = 4x - 1$.

Řešení:
Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je dána rovnicí $y - y_0 = f'(x_0) \cdot \big(x - x_0\big)$, kde $y_0 = f(x_0)$. Protože $f'(x_0)$ je směrnice hledané tečny, která má být rovnoběžná s danou přímkou, jejíž směrnice je $k = 4$, budeme hledat na grafu funkce $y = x^3 + x - 2$ body $\big[x_0; y_0\big]$, ve kterém je $f'(x_0) = 3x_0^2 + 1 = 4$. Z této rovnice najdeme $x_0 = \pm 1$. Proto jsou body dotyku $[1; 0]$ nebo $[-1; -4]$. Rovnice hledané tečny tedy jsou $y = 4(x - 1)$ nebo $y + 4 = 4(x + 1)$. Hledaná rovnice tečny je $y = 4x$, která se grafu funkce dotýká ve dvou bodech $[1; 0]$ a $[-1; -4]$.

Příklad 20. Určete rovnici tečny ke grafu funkce $y = x^3 + 3x^2 - 5$, která je kolmá na přímku $2x - 6y + 1 = 0$.

Řešení:
Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je dána rovnicí $y - y_0 = f'(x_0) \cdot \big(x - x_0\big)$, kde $y_0 = f(x_0)$. Protože $f'(x_0)$ je směrnice hledané tečny, která má být kolmá na danou přímkou, jejíž směrnice je $k = \frac{1}{3}$, budeme hledat na grafu funkce $y = x^3 + 3x^2 - 5$ body $\big[x_0; y_0\big]$, ve kterém je $f'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 = -3$. Z této rovnice najdeme $x_0 = -1$. Proto je bod dotyku $[-1; -3]$. Rovnice hledané tečny tedy je $y + 3 = -3(x + 1)$, neboli $y = -3x - 6$.

Příklad 21. Určete rovnici tečny ke grafu funkce $y = \ln x$, která je kolmá na přímku $y = -2x - 1$.

Řešení:
Směrnice dané přímky je $k_p = -2$. Protože hledáme tečnu kolmou na tuto přímku, musí být její směrnice rovna $k_t = \frac{1}{2}$. Protože směrnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je $k_t = f'(x_0)$, musí pro x_0 platit rovnice $f'(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{2}$. Tedy bod dotyku je $[2; \ln 2]$. Rovnice hledané tečny je tedy $y - \ln 2 = \frac{1}{2}\,(x - 2)$, neboli $y = \frac{x}{2} - 1 + \ln 2$.

Příklad 22. Určete rovnici normály ke grafu funkce $y = x^2 - 4x + 5$, která je rovnoběžná s přímkou $x + 4y = 0$.

Řešení:
Daná přímka má směrnici $k_p = -\frac{1}{4}$. Normála ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 má směrnici $k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Protože hledáme rovnici normály rovnoběžné s danou přímkou, musí pro bod x_0 platit $f'(x_0) = 2x_0 - 4 = 4$. Z toho plyne $x_0 = 4$ a $y_0 = f(x_0) = 5$. Rovnice hledané normály je tedy $y - 5 = -\frac{x - 4}{4}$, neboli $y = -\frac{x}{4} + 6$.

Příklad 23. Určete rovnici normály ke grafu funkce $y = -\sqrt{x} + 2$, která je kolmá na přímkou $y = -\dfrac{x}{2} + 4$.

Řešení:
Daná přímka má směrnici $k_p = -\dfrac{1}{2}$. Přímka kolmá na tuto přímku má směrnici $k = 2$. Normála ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 má směrnici $k_n = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Protože hledáme rovnici normály kolmé danou přímkou, musí pro bod x_0 platit $f'(x_0) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} = -\dfrac{1}{2}$. Z toho plyne $x_0 = 1$ a $y_0 = f(x_0) = 1$. Rovnice hledané normály je tedy $y - 1 = 2(x - 1)$, neboli $y = 2x - 1$.

Příklad 24. Ke grafu funkce $y = \dfrac{x+9}{x+5}$ veďte tečny, které procházejí bodem $[0; 0]$.

Řešení:
Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je $y - y_0 = f'(x_0) \cdot \big(x - x_0\big)$, kde $y_0 = f(x_0)$. Naším úkolem je na grafu funkce $y = f(x)$ najít bod $\big[x_0; y_0\big]$ tak, aby přímka $y - y_0 = f'(x_0) \cdot \big(x - x_0\big)$ procházela bodem $[0; 0]$, tj. bod, pro který platí $y_0 = f'(x_0) \cdot x_0$. Protože je $y_0 = \dfrac{x_0+9}{x_0+5}$ a $f'(x_0) = -\dfrac{4}{(x_0+5)^2}$, budeme hledat řešení rovnice $-\dfrac{x_0+9}{x_0+5} = \dfrac{4x_0}{(x_0+5)^2}$, čili $x_0^2 + 18x_0 + 45 = 0$. Její řešení jsou $x_0 = -3$ nebo $x_0 = -15$. Hledané body dotyku proto jsou $[-3; 3]$ nebo $[-15; 3/5]$. Protože je $f'(-3) = -1$ a $f'(-15) = -\dfrac{1}{25}$, dostáváme dvě tečny $y - 3 = -(x + 3)$, neboli $y = -x$, a $y - \dfrac{3}{5} = -\dfrac{x+15}{25}$, neboli $y = -\dfrac{x}{25}$.

Příklad 25. Ke grafu funkce $y = \dfrac{1}{x}$ veďte tečny, které procházejí bodem $[-1; 1]$.

Řešení:
Rovnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je $y - y_0 = f'(x_0) \cdot \big(x - x_0\big)$, kde $y_0 = f(x_0)$. Naším úkolem je na grafu funkce $y = f(x)$ najít bod $\big[x_0; y_0\big]$ tak, aby přímka $y - y_0 = f'(x_0) \cdot \big(x - x_0\big)$ procházela bodem $[-1; 1]$, tj. bod, pro který platí $1 - y_0 = f'(x_0) \cdot (-1 - x_0)$. Protože je $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$, musí x_0 splňovat rovnici $1 - \dfrac{1}{x_0} = -\dfrac{-1 - x_0}{x_0^2}$, čili $x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0$. Její řešení jsou $x_0 = 1 \pm \sqrt{2}$. Tedy hledané body dotyku jsou $\big[\sqrt{2} + 1; \sqrt{2} - 1\big]$ a $\big[1 - \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}\big]$. Protože je $f'\big(\sqrt{2} + 1\big) = -3 + 2\sqrt{2}$ a $f'\big(1 - \sqrt{2}\big) = -3 - 2\sqrt{2}$, jsou rovnice hledaných tečen

$y - \sqrt{2} + 1 = \left(-3 + 2\sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2} - 1\right)$, neboli $y = \left(-3 + 2\sqrt{2}\right)x - 2 + 2\sqrt{2}$, a $y + 1 + \sqrt{2} = \left(-3 - 2\sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right)$, neboli $y = \left(-3 - 2\sqrt{2}\right)x - 2 - 2\sqrt{2}$.

Příklad 26. Najděte rovnice tečen k hyperbole $7x^2 - 2y^2 = 14$, které jsou kolmé na přímku $2x + 4y - 3 = 0$.

Řešení:

Směrnice dané přímky je $k_p = -\dfrac{1}{2}$. Proto musí být směrnice tečny rovna $k_t = 2$. Budeme tedy na hyperbole hledat body $\left[x_0; y_0\right]$ takové, aby $y_0' = f'(x_0) = 2$. Předpokládejme, že jsme našli řešení $y = y(x)$ rovnice $7x^2 - 2y^2 = 14$. Jestliže derivujeme tuto rovnice, dostaneme v bodě x_0 vztah $14x_0 - 4y_0y_0' = 0$. Hledané body dotyku $\left[x_0; y_0\right]$ tedy musí proto splňovat vztahy $14x_0 - 8y_0 = 0$ a $7x_0^2 - 2y_0^2 = 14$. Řešení této soustavy rovnice nám dá dva body dotyku $[4; 7]$ a $[-4; -7]$. Existují tedy dvě tečny s danými vlastnostmi: $y - 7 = 2(x - 4)$, neboli $y = 2x - 1$, a $y + 7 = 2(x + 4)$, čili $y = 2x + 1$.

Cvičení 7 — **L'Hospitalovo pravidlo, derivace vyšších řádů**

Příklad 1. Dokažte nerovnost $\left|\sin x - \sin y\right| \le \left|x - y\right|$.

Řešení:
Uvažujme funkci $f(x) = x - \sin x$. Protože je $f(0) = 0$ a $f'(x) = 1 - \cos x$, existuje podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě číslo $\xi \in (0, x)$, pro které platí rovnost $f(x) - f(0) = x - \sin x = \big(1 - \cos\xi\big)x$. Protože je $1 - \cos\xi \ge 0$ dostaneme pro $x > 0$ nerovnost $x - \sin x \ge 0$. Tedy pro $x \ge 0$ platí nerovnost $\sin x \le x$.
Pomocí vztahu $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$ dostaneme

$$\left|\sin x - \sin y\right| = \left|2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right| \le 2\sin\frac{|x-y|}{2} \le \left|x - y\right|,$$

protože $\left|\cos\dfrac{x+y}{2}\right| \le 1$ a $\sin\dfrac{|x-y|}{2} \le \dfrac{|x-y|}{2}$.

Příklad 2. Najděte $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x - \cos x}{x^2}$.

Řešení:
Jde o limitu výrazu typu $\dfrac{0}{0}$. Protože čitatel i jmenovatel jsou diferencovatelné funkce, lze použít l'Hospitalovo pravidlo. Pomocí něj dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x + \sin x}{2x}.$$

Limita je opět typu $\dfrac{0}{0}$. Proto použijeme l'Hospitalovo pravidlo ještě jednou a dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x + \sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x + \cos x}{2} = 1.$$

Příklad 3. Najděte $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

Řešení:
Jde o limitu typu $\dfrac{0}{0}$. Všechny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla jsou splněny. Pomocí něj dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\big(1 + \cos x\big) = 2.$$

Příklad 4. Najděte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{cotg} x - 1}{x^2}$.

Řešení:

Nejprve najdeme limitu $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x$. Ta je typu $0 \cdot \infty$. Ale lze psát

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \cos x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1\,.$$

Proto je daná limita typu $\dfrac{0}{0}$. Všechny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla jsou splněny. Proto je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{cotg} x - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cotg} x - \dfrac{x}{\sin^2 x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x - x}{2x \sin^2 x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x - x}{2x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{6x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 x}{6x^2} = -\frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

Příklad 5. Najděte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$.

Řešení:

Jde o limitu typu $\dfrac{0}{0}$. Protože jsou splněny všechny předpoklady pro použití l'Hospitalova pravidla, je jej pro výpočet této limity možné použít. Ale při podrobnějším zkoumání daného výrazu, zjistíme, že se v něm proměnná x vyskytuje pouze ve tvaru x^2. Proto je možné zavést pomocnou proměnnou $t = x^2$ a zkoumat limitu $\lim\limits_{t\to 0_+} \dfrac{1 - \cos t}{t \sin t}$, pro kterou je použití l'Hospitalova pravidla jednodušší. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} = \lim_{t\to 0_+} \frac{1 - \cos t}{t^2} \cdot \lim_{t\to 0_+} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to 0_+} \frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}\,.$$

Příklad 6. Najděte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$.

Řešení:

Jde o limitu typu $\dfrac{0}{0}$. Všechny předpoklady l'Hospitalova pravidla jsou splněny.

Proto lze psát

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{3\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2} =$$
$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}}{2x} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} = 1$$

Příklad 7. Najděte $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{tgh} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

Řešení:
Daný výraz lze psát ve tvaru

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\cosh x}{\sinh x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x\sin x - \cos x\sinh x}{x\sin x\sinh x}.$$

Tato limita je typu $\dfrac{0}{0}$. Protože jsou splněny všechny předpoklady l'Hospitalova pravidla je jej možné k výpočtu této limitu použít. Ale přímé použití tohoto pravidla je poměrně pracné. Protože je $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sinh x} = 1$, je výhodnější psát

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x\sin x - \cos x\sinh x}{x\sin x\sinh x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x\sin x - \cos x\sinh x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sinh x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\sinh x}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x} = \frac{2}{3}.$$

Příklad 8. Najděte $\displaystyle\lim_{x\to 0_+}(\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$.

Řešení:
Protože je $\bigl(\operatorname{cotg} x\bigr)^{\sin x} = \mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln\left(\operatorname{cotg} x\right)}$ a funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ je spojitá v celém $\mathbb{R}$, stačí najít limitu $\displaystyle\lim_{x\to 0_+}\sin x\cdot\ln\bigl(\operatorname{cotg} x\bigr)$. Tato limita je typu $0\cdot\infty$. Proto ji přepíšeme na tvar vhodný pro použití l'Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to 0_+}\sin x\cdot\ln\bigl(\operatorname{cotg} x\bigr) = \lim_{x\to 0_+}\frac{\ln\bigl(\operatorname{cotg} x\bigr)}{\dfrac{1}{\sin x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0_+}\frac{-\dfrac{1}{\operatorname{cotg} x}\cdot\dfrac{1}{\sin^2 x}}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0_+}\frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0.$$

Tedy $\lim\limits_{x\to 0_+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x} = \mathrm{e}^0 = 1.$

Příklad 9. Najděte $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$.

Řešení:
Jde o limitu typu $\infty - \infty$. Proto výraz upravíme. Platí

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x\bigl(\mathrm{e}^x - 1\bigr)}\,.$$

To už je limita typu $\dfrac{0}{0}$. Proto bychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo. Výpočet se zjednoduší, jestliže použijeme známé limity $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$. Pak lze psát

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x\bigl(\mathrm{e}^x - 1\bigr)} = \\ = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Příklad 10. Najděte $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

Řešení:

Máme určit limitu výrazu $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\exp\left(\dfrac{\ln\dfrac{\arcsin x}{x}}{x^2}\right)$. Protože je funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ spojitá, stačí najít limitu $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln\dfrac{\arcsin x}{x}}{x^2}\right)$.

Neboť $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$, jde o limitu typu $\dfrac{0}{0}$. Můžeme se tedy pokusit najít tuto limitu pomocí l'Hospitalova pravidla.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\arcsin x}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x\right)x^{-2}}{2x} = \\ = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}&\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x - \sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}{x^3} = \\ = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x}{3x^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}&\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \frac{1}{6}\,.\end{aligned}$$

Hledaná limita tedy je $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2} = \mathrm{e}^{1/6}$.

Příklad 11. Najděte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$.

Řešení:
Jde o limitu typu $\dfrac{0}{0}$. Můžeme vyzkoušet l'Hospitalovo pravidlo. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\bigl(1/x\bigr)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\bigl(1/x\bigr)-\cos\bigl(1/x\bigr)}{\cos x}\,.$$

Ale limita v pravo neexistuje. Proto v tomto případě nevede použití l'Hospitalova pravidla k cíli. Proto výraz upravíme.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\bigl(1/x\bigr)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0\,,$$

protože první limita je 1 a druhá je rovna nule, neboť $\sin\dfrac{1}{x}$ je omezená funkce a $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

Příklad 12. Najděte y'' pro funkci $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

Řešení:
První derivace této funkce je $y' = 2x\operatorname{arctg} x + 1$. Druhá derivace je derivace první derivace. Tedy

$$y'' = 2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2}\,.$$

Příklad 13. Najděte $y^{(5)}$ pro funkci $y = x\ln x$.

Řešení:
Například postupným derivováním dostaneme

$$y' = \ln x + 1\,,\quad y'' = \frac{1}{x}\,,\quad y''' = -\frac{1}{x^2}\,,\quad y^{(4)} = \frac{2}{x^3}\quad \text{a}\quad y^{(5)} = -\frac{6}{x^4}\,.$$

Příklad 14. Najděte $y^{(100)}$ pro funkci $y = x\sinh x$.

Řešení:

V tomto příkladě je vhodné použít *Leibnizův vzorec* $\big(uv\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$.
Pro $u = x$ je $u' = 1$ a $u^{(n)} = 0$ pro $n > 1$ a pro $v = \sinh x$ je $v^{(2k)} = \sinh x$ a $v^{(2k+1)} = \cosh x$ dostaneme

$$\big(x \sinh x\big)^{(100)} = x \sinh x + \binom{100}{1} \cosh x = x \sinh x + 100 \cosh x\,.$$

Příklad 15. Najděte $\mathrm{d}^6 y$ pro funkci $y = \cos^2 x \cdot \cosh x$.

Řešení:
Šestý diferenciál funkce $f(x)$ je definován vztahem $\mathrm{d}^6 f(x) = f^{(6)}(x)\mathrm{d}x^6$. Proto musíme najít šestou derivaci $f^{(6)}(x)$ funkce $f(x) = \cos^2 x \cdot \cosh x$. Například pomocí Leibnizova vzorce dostaneme

$$\begin{aligned}
\big(\cos^2 x \cosh x\big)^{(6)} &= \cos^2 x \big(\cosh x\big)^{(6)} + \binom{6}{1}\big(\cos^2 x\big)'\big(\cosh x\big)^{(5)} + \\
&\quad + \binom{6}{2}\big(\cos^2 x\big)''\big(\cosh x\big)^{(4)} + \binom{6}{3}\big(\cos^2 x\big)'''\big(\cosh x\big)''' + \\
&\quad + \binom{6}{4}\big(\cos^2 x\big)^{(4)}\big(\cosh x\big)'' + \binom{6}{5}\big(\cos^2 x\big)^{(5)}\big(\cosh x\big)' + \\
&\quad + \binom{6}{6}\big(\cos^2 x\big)^{(6)} \cosh x = \\
&= \cos^2 x \cosh x - 6 \sin 2x \sinh x - 30 \cos 2x \cosh x + 80 \sin 2x \sinh x + \\
&\quad + 120 \cos 2x \cosh x - 96 \sin 2x \sinh x - 32 \cos 2x \cosh x\,.
\end{aligned}$$

Tedy hledaný diferenciál je

$$\mathrm{d}^6 f = \big(\cos^2 x \cosh x - 22 \sin 2x \sinh x + 58 \cos 2x \cosh x\big)\, \mathrm{d}x^6\,.$$

Příklad 16. Najděte $y^{(n)}$ pro funkci $y = \cos^2 x$.

Řešení:
Nejdříve určíme několik derivací dané funkce. Platí $\big(\cos^2 x\big)' = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$. Dále

$$\begin{aligned}
\big(\cos^2 x\big)'' &= -2 \cos 2x = -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), \\
\big(\cos^2 x\big)''' &= -4 \cos 2x = -4 \sin\big(2x + \pi\big), \ \ldots\,.
\end{aligned}$$

Lze odhadnout, že pro $n \geq 1$ může platit vztah

$$\big(\cos^2 x\big)^{(n)} = -2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right).$$

Tento vztah nyní dokážeme indukci. Pro $n = 1$ jsme platnost tohoto vztahu již ověřili. Zbývá nám ukázat, že z jeho platnosti pro n plyne tento vzorec pro $(n+1)$. Derivováním dostaneme

$$\begin{aligned}\left(\cos^2 x\right)^{(n+1)} &= \left[-2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right)\right]' = -2^n\cos\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right) = \\ &= -2^n\sin\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right).\end{aligned}$$

Tedy tento vztah platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 17. Dokažte, že *Čebyševovy polynomy*

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)\,, \qquad m = 1, 2, \dots$$

splňují rovnici

$$(1 - x^2)T''_m(x) - xT'_m(x) + m^2T_m(x) = 0\,.$$

Řešení:
Derivací dostaneme

$$\begin{aligned}T'_m(x) &= \frac{m}{2^{m-1}}\cdot\frac{\sin\left(m\arccos x\right)}{\sqrt{1-x^2}}\\ T''_m(x) &= \frac{m}{2^{m-1}(1-x^2)}\left(-m\cos\left(m\arccos x\right) + \frac{x\sin\left(m\arccos x\right)}{\sqrt{1-x^2}}\right).\end{aligned}$$

Po dosazení těchto derivací se daný vztah snadno ověří.

Příklad 18. *Laguerrovy polynomy* jsou definovány vztahy

$$L_m(x) = \mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(x^m\mathrm{e}^{-x}\right), \qquad m = 0, 1, 2, \dots\,.$$

Dokažte, že $L_m(x)$ splňuje rovnici

$$xL''_m(x) + (1-x)L'_m(x) + mL_m(x) = 0\,.$$

Návod: Použijte rovnici $xu' + (x - m)u = 0$, kde $u = x^m\mathrm{e}^{-x}$.

Řešení:
Nejprve ověříme vztah $xu' + (x-m)u = 0$, kde $u = x^m\mathrm{e}^{-x}$. Snadným derivováním dostaneme

$$x\left(x^m\mathrm{e}^{-x}\right)' = x\left(mx^{m-1}\mathrm{e}^{-x} - x^m\mathrm{e}^{-x}\right) =$$

$$= mx^m \mathrm{e}^{-x} - x^{m+1}\mathrm{e}^{-x} = (m-x)x^m\mathrm{e}^{-x} = (m-x)u\,.$$

Daná rovnice pro funkce $L_m(x)$ lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned}
&x\big(\mathrm{e}^x u^{(m)}\big)'' + (1-x)\big(\mathrm{e}^x u^{(m)}\big)' + m\mathrm{e}^x u^{(m)} = \\
&= x\big(\mathrm{e}^x u^{(m+2)} + 2\mathrm{e}^x u^{(m+1)} + \mathrm{e}^x u^{(m)}\big) + (1-x)\big(\mathrm{e}^x u^{(m+1)} + \mathrm{e}^x u^{(m)}\big) + m\mathrm{e}^x u^{(m)} = \\
&= x\mathrm{e}^x u^{(m+2)} + (1+x)\mathrm{e}^x u^{(m+1)} + (m+1)\mathrm{e}^x u^{(m)} = 0\,.
\end{aligned}$$

Když derivujeme $(m+1)$–krát vztah $xu' + (x-m)u = 0$, získáme, až na vynásobení funkcí e^x právě tuto rovnici.

Příklad 19. *Hermitovy polynomy* jsou definovány vztahy

$$H_m(x) = (-1)^m \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right), \qquad m = 0, 1, 2, \dots\,.$$

Dokažte, že $H_m(x)$ splňuje rovnici

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0\,.$$

Návod: Použijte rovnost $u' + 2xu = 0$, kde $u = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Řešení:

Derivace funkce $u = \mathrm{e}^{-x^2}$ je $u' = -2x\mathrm{e}^{-x^2} = -2xu$. Tedy platí náš pomocný vztah. Danou diferenciální rovnici lze zapsat pomocí funkce $u = \mathrm{e}^{-x^2}$ ve tvaru

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{e}^{x^2} u^{(m)}\right)'' - 2x\left(\mathrm{e}^{x^2} u^{(m)}\right)' + 2m\mathrm{e}^{x^2} u^{(m)} = \\
&= \mathrm{e}^{x^2} u^{(m+2)} + 4x\mathrm{e}^{x^2} u^{(m+1)} + (2+4x^2)\mathrm{e}^{x^2} u^{(m)} - \\
&\qquad - 2x\left(\mathrm{e}^{x^2} u^{(m+1)} + 2x\mathrm{e}^{x^2} u^{(m)}\right) + 2m\mathrm{e}^{x^2} u^{(m)} = \\
&= \mathrm{e}^{x^2}\left(u^{(m+2)} + 2xu^{(m+1)} + 2(m+1)u^{(m)}\right) = 0\,.
\end{aligned}$$

Ale to je až na násobení funkci e^{x^2} vztah, který získáme po $(m+1)$–ní derivaci vztahu $u' + 2xu = 0$.

Cvičení 8 — **Derivace funkce zadané parametricky a implicitně**

Nechť jsou funkce $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in (a, b)$, diferencovatelné. Pokud je $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{\varphi}(t) \neq 0$ pro $t \in (a, b)$ pak existuje inverzní funkce $t = \varphi^{(-1)}(x)$. Její derivace je $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\dot{\varphi}(t)}$ kde předpokládáme, že je za t dosazeno $t = \varphi^{(-1)}(x)$. V takovém případě je funkce $y(x) = \psi \circ \varphi^{(-1)}(x) = \psi\big(\varphi^{(-1)}(x)\big)$ diferencovatelná v intervalu $(\alpha, \beta) = \varphi(a, b)$ a pro její derivaci platí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\psi\big(\varphi^{(-1)}(x)\big)\Big) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi^{(-1)}}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}\,,$$

kde opět bereme $t = \varphi^{(-1)}(x)$. Podobně se najdou i vyšší derivace. Například pro druhou derivaci platí

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = y''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}}\right)\frac{1}{\dot{\varphi}}\,.$$

Příklad 1. Najděte derivaci $y'(x)$ funkce definované parametricky rovnicemi $x = \operatorname{tg} t$ a $y = \dfrac{\sin 2t}{2}$, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Řešení:
Derivace funkcí $x = \operatorname{tg} t$ a $y = \dfrac{\sin 2t}{2}$ jsou $\dot{x}(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ a $\dot{y}(t) = \cos 2t$. Protože je $\dot{x}(t) \neq 0$ pro $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, je funkce $y = y(x)$ dobře definována. Pro její derivaci platí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = \frac{\cos 2t}{1/\cos^2 t} = \cos 2t \cdot \cos^2 t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 t\right)^2} = \frac{1 - x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}\,.$$

Příklad 2. Najděte derivace $y'(x)$ a $y''(x)$ funkce definované parametricky rovnicemi $x = a\cos t$ a $y = b \sin t$, $t \in (0, 2\pi)$.

Řešení:
Protože je $\dot{x}(t) = -a \sin t$ a $\dot{y}(t) = b \cos t$, získáme pomocí obecného vzorce pro derivaci parametricky zadané funkce

$$y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\frac{b}{a}\,\operatorname{cotg} t\,.$$

Druhou derivaci lze určit ze vztahu

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \cdot \frac{1}{\dot{x}(t)} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}\,.$$

Příklad 3. Najděte rovnice tečny ke křivce, která je definována parametricky rovnicemi $x = a\cos^3 t$ a $y = a\sin^3 t$, $t \in (0, 2\pi)$, v bodě t_0.

Řešení:
Rovnici tečny najdeme ze vztahu $y - y_0 = y'(x_0) \cdot \bigl(x - x_0\bigr)$. Zde je $x_0 = a\cos^3 t_0$ a $y_0 = a\sin^3 t_0$. Protože je $\dot{x}(t) = -2a\cos^2 t \sin t$ a $y = 3a\sin^2 t \cos t$, je

$$y'(x_0) = \frac{3a\sin^2 t_0 \cos t_0}{-3a\cos^2 t_0 \sin t_0} = -\operatorname{tg} t_0 .$$

Tedy rovnice hledané tečny je $y - a\sin^3 t_0 = -\operatorname{tg} t_0 \cdot \bigl(x - a\cos^3 t_0\bigr)$.
Všimněte si, že problémy nastanou v bodech, kdy je $\operatorname{tg} t_0 = 0$, tj. v bodech $t_0 = \dfrac{k}{2}\pi$. V těchto bodech jsou totiž obě derivace $\dot{x}$ i $\dot{y}$ rovny nule. Když si načrtnete danou křivku (*asteroidu*), snadno zjistíte, proč nastávají v těchto bodech problémy.
Jiná možnost, jak najít rovnici tečny, je napsat její parametrické rovnice. Tečný vektor je $\boldsymbol{\tau} = (\dot{x}, \dot{y})$. Parametrické rovnice přímky, která prochází bodem $\bigl[x_0; y_0\bigr]$ a má směr $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ jsou $x = x_0 + t\tau_1$, $y = y_0 + t\tau_2$, kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr. Tedy rovnici tečny lze napsat v parametrickém tvaru $x = a\cos^3 t_0 - 3at\cos^2 t_0 \sin t_0$ a $y = a\sin^3 t_0 + 3at\sin^2 t_0 \cos t_0$, kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr.

Příklad 4. Nechť je $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$, kde $r > 0$ a $\varphi \in (0, 2\pi)$. Najděte tečnu ke křivce, která je definována rovnicí $r = 1 + \cos\varphi$ v bodě φ_0.

Řešení:
Křivka je dána parametrickými rovnicemi $x = (1+\cos\varphi)\cos\varphi$ a $y = (1+\cos\varphi)\sin\varphi$, kde $\varphi \in (0, 2\pi)$ je parametr. Derivace těchto funkcí jsou

$$\begin{aligned}
\dot{x}(\varphi) &= -\sin\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi = -(\sin\varphi + \sin 2\varphi) \\
\dot{y}(\varphi) &= \cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos\varphi + \cos 2\varphi .
\end{aligned}$$

Derivace $\dot{x}(\varphi) = 0$ v bodech $\varphi = \pi$, $\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$ a $\varphi = \dfrac{4}{3}\pi$. V těchto bodech není jisté, zda lze najít inverzní funkci k funkci $x(\varphi) = (1 + \cos\varphi)\cos\varphi$ a tedy ani y jako funkci proměnné x. V jiných bodech φ_0 je

$$y'(x_0) = -\frac{\cos\varphi_0 + \cos 2\varphi_0}{\sin\varphi_0 + \sin 2\varphi_0} .$$

Tedy rovnice tečny je

$$y - (1 + \cos\varphi_0)\sin\varphi_0 = -\frac{\cos\varphi_0 + \cos 2\varphi_0}{\sin\varphi_0 + \sin 2\varphi_0} \cdot \bigl(x - (1 + \cos\varphi_0)\cos\varphi_0 .$$

Stojí za zapamatování si uvědomit, že v bodech $\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$ a $\varphi = \dfrac{4}{3}\pi$ lze vyjádřit φ jako funkci y. Proto lze v těchto bodech najít funkci $x = x(y)$ a pomocí této funkce najít tečnu.

Příklad 5. Nechť je funkce $y = y(x)$ definována jako řešení rovnice $\mathrm{e}^y + xy - \mathrm{e} = 0$. Najděte derivací této funkce v bodě $x = 0$, $y = 1$.

Řešení:

Bod $[0; 1]$ vyhovuje dané rovnici. Leží tedy na dané křivce. Proto je možné hledat v okolí tohoto bodu funkci $y = y(x)$.

Předpokládejme, že jsme tuto funkci našli. Pak pro ni platí rovnice $\mathrm{e}^{y(x)} + xy(x) - \mathrm{e} = 0$. Jestliže tuto rovnice zderivujeme podle proměnné x, dostaneme pro derivaci $y'(x)$ rovnici

$$\mathrm{e}^{y(x)}y'(x) + y(x) + xy'(x) = 0 \quad \text{neboli} \quad \big(x + \mathrm{e}^{y(x)}\big)y'(x) = -y(x)\,.$$

Za předpokladu, že $\big(x + \mathrm{e}^{y(x)}\big) \neq 0$ lze z této rovnice vyjádřit $y'(x)$ jako

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x + \mathrm{e}^{y(x)}}\,.$$

Tedy v bodě $[0; 1]$ je $y'(0) = \mathrm{e}^{-1}$.

Příklad 6. Najděte množinu, ve které existuje inverzí funkce $x = x(y)$ k funkci $y = x + \ln x$ a určete derivaci této inverzní funkce.

Řešení:

Definiční obor dané funkce $y = f(x) = x + \ln x$ je $D_f = (0, +\infty)$ a její obor hodnot je $H_f = \mathbb{R}$. Protože je $y'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \neq 0$ a spojitá na celém D_f, existuje inverzní funkce $x = x(y)$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$. Derivace této inverzní funkce je rovna

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y'(x)} = \frac{x}{x+1}\,.$$

Příklad 7. Najděte derivaci funkce $y = y(x)$ definované implicitně rovnicí

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Řešení:

Předpokládejme, že jsme našli funkci $y = y(x)$, která je řešením této rovnice. Pro tuto funkci tedy platí vztah

$$\operatorname{arctg} \frac{y(x)}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2(x)}\,.$$

Jestliže tuto rovnici zderivujeme podle proměnné x a předpokládáme, že $y = y(x)$, dostaneme pro derivaci $y'(x)$ vztah

$$\frac{xy'(x) - y(x)}{x^2 + y^2(x)} = \frac{x + y(x)y'(x)}{x^2 + y^2(x)}\,.$$

Z této rovnice získáme vztah $\big(x - y(x)\big)y'(x) = x + y(x)$. V bodech, kde není $x - y(x) = 0$, tj. v bodech, kde neplatí $\ln\big(x\sqrt{2}\big) = \frac{\pi}{4}$, lze psát

$$y'(x) = \frac{x + y(x)}{x - y(x)}\,.$$

Příklad 8. Nechť je dána funkce $y = f(x)$. Najděte kružnici $(x-x_S)^2 + (y-y_S)^2 = R^2$ tak, aby procházela bodem $\big[x_0; y_0\big]$ grafu funkce $y = f(x)$ a měla v tomto bodě stejnou první a druhou derivaci jako funkce $y = f(x)$ (*oskulační kružnice*).

Řešení:

Jestliže derivujeme rovnici kružnice jako implicitně zadanou funkci v bodě x_0, získáme vztahy

$$x_0 - x_S + \big(y_0 - y_S\big)y_0' = 0 \quad \text{a} \quad 1 + \big(y_0'\big)^2 + \big(y_0 - y_S\big)y_0'' = 0\,,$$

kde $y_0 = f(x_0)$, $y_0' = f'(x_0)$ a $y_0'' = f''(x_0)$. Tedy souřadnice středu kružnice $\big[x_S; y_S\big]$ a její poloměr R musí splňovat vztahy

$$\begin{aligned}
&\big(x_0 - x_S\big)^2 + \big(y_0 - y_S\big)^2 = R^2 \\
&x_0 - x_S + \big(y_0 - y_S\big)y_0' = 0 \\
&1 + \big(y_0'\big)^2 + \big(y_0 - y_S\big)y_0'' = 0\,.
\end{aligned}$$

Řešení této soustavy rovnic je

$$\begin{aligned}
x_S &= x_0 - \frac{1 + \big(y_0'\big)^2}{y_0''}\, y_0' \\
y_S &= y_0 + \frac{1 + \big(y_0'\big)^2}{y_0''}
\end{aligned}$$

$$R = \frac{\left(1 + (y_0')\right)^{3/2}}{|y_0''|}\,.$$

Obvykle se nazývá R poloměr křivosti a $k = \dfrac{1}{R} = \dfrac{\left(1 + (y_0')^2\right)^{3/2}}{|y_0''|}$ *křivost.* Množina všech středů oskulačních kružnic $[x_S; y_S]$ se nazývá *evoluta* dané křivky $y = f(x)$.

Příklad 9. Najděte množinu všech středů křivosti (*evolutu*) elipsy dané parametrickými rovnicemi $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, kde $t \in (0, 2\pi)$.

Řešení:
Podle předcházejícího příkladu máme najít množinu všech bodu $[x_S; y_S]$, kde

$$x_S = x_0 - \frac{1 + (y_0')^2}{y_0''}\, y_0'\,, \qquad y_S = y_0 + \frac{1 + (y_0')^2}{y_0''}\,.$$

Tedy stačí nám najít $y'(x)$ a $y''(x)$. V našem případě jde o parametricky zadanou křivku. Příslušné derivace

$$y'(x) = -\frac{b}{a}\operatorname{cotg} t \quad \text{a} \quad y''(x) = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}$$

jsme již našli v příkladě 2. Po dosazení do příslušných vztahů získáme

$$x_S(t) = a\cos t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{a}\cos t = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$$
$$y_S(t) = b\sin t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{b}\sin t = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t\,,$$

kde $t \in (0, 2\pi)$. To jsou parametrické rovnice evoluty. Jestliže z těchto rovnic vyloučíme parametr t, dostaneme implicitní vyjádření evoluty ve tvaru

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3} = e^{4/3}\,,$$

kde $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ je *excentricita* dané elipsy.

Příklad 10. Hmotný bod M se pohybuje v rovině xy po elipse s poloosami $a \geq b$, jejichž jedno ohnisko leží v počátku souřadnic. V polárních souřadnicích $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ je rovnice takové elipsy dána rovnici $r(1+\varepsilon\cos\varphi) = p$, kde $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ je relativní výstřednost elipsy a $p = \dfrac{b^2}{a}$.

Dále platí, že plošná rychlost pohybu bodu M je konstantní, tj. v polárních souřadnicích platí vztah $S = \frac{1}{2}\, r^2 \dot\varphi = \text{konst.}$

Najděte závislost zrychlení bodu M na jeho souřadnicích.

Řešení:

Parametrické rovnice bodu M jsou $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$ a $y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$. Jejich derivováním dostaneme

$$\begin{aligned}
\dot x &= \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi\\
\dot y &= \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi\\
\ddot x &= \ddot r\cos\varphi - 2\dot r\dot\varphi\sin\varphi - r\ddot\varphi\sin\varphi - r\big(\dot\varphi\big)^2\cos\varphi\\
\ddot y &= \ddot r\sin\varphi + 2\dot r\dot\varphi\cos\varphi + r\ddot\varphi\cos\varphi - r\big(\dot\varphi\big)^2\sin\varphi
\end{aligned}$$

Mezi r a φ platí podle zadání vztah $r = (1+\varepsilon\cos\varphi)p$, neboli $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$. První derivace φ vyhovuje rovnici $\dot\varphi = \dfrac{2S}{r^2}$. Derivací vztahu pro r získáme

$$\dot r = \frac{p\varepsilon\dot\varphi\sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{2p\varepsilon S\sin\varphi}{r^2(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{2\varepsilon S\sin\varphi}{p}\,,$$

kde jsme použili výrazy pro $\dot\varphi$ a p.

Najdeme ještě druhé derivace $\ddot\varphi$ a $\ddot r$. Snadno dostaneme

$$\begin{aligned}
\ddot\varphi &= -\frac{4S\dot r}{r^3} = -\frac{8S^2\varepsilon}{p}\cdot\frac{\sin\varphi}{r^3}\\
\ddot r &= \frac{2S\varepsilon}{p}\,\dot\varphi\cos\varphi = \frac{4S^2\varepsilon}{p}\cdot\frac{\cos\varphi}{r^2}\,.
\end{aligned}$$

Po dosazení do vztahů pro $\ddot x$ a $\ddot y$, získáme

$$\begin{aligned}
\ddot x &= \frac{4S^2\varepsilon}{p}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{r^2} - \frac{8S^2\varepsilon}{p}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + \frac{8S^2\varepsilon}{p}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r^2} - \frac{4S^2}{p}\cdot\frac{\cos\varphi}{r^3} =\\
&= \frac{4S^2}{pr^3}\,(r\varepsilon\cos\varphi - p)\cos\varphi = -\frac{4S^2}{pr^3}\,r\cos\varphi = -\frac{4S^2}{p}\cdot\frac{x}{\big(x^2+y^2\big)^{3/2}}\\
\ddot y &= \frac{4S^2\varepsilon}{p}\cdot\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} + \frac{8S^2\varepsilon}{p}\cdot\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} - \frac{8S^2\varepsilon}{p}\cdot\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} - \frac{4S^2}{p}\cdot\frac{\sin\varphi}{r^3} =\\
&= \frac{4S^2}{pr^3}\,(r\varepsilon\cos\varphi - p)\sin\varphi = -\frac{4S^2}{pr^3}\,r\sin\varphi = -\frac{4S^2}{p}\cdot\frac{y}{\big(x^2+y^2\big)^{3/2}}\,.
\end{aligned}$$

CVIČENÍ 9 — **Taylorův polynom**

Příklad 1. Nechť má funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivace až do řádu n včetně. Najděte polynom

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$$

tak, aby platilo $f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0)$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots, n$.

Řešení:

Pro hodnotu funkce $f(x)$ a hledaného polynomu $P_n(x)$ v bodě $x = x_0$ musí platit $f(x_0) = P_n(x_0) = a_0$. Tedy $a_0 = f(x_0)$.

První derivace polynomu $P_n(x)$ je

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + n(x - x_0)^{n-1}.$$

Tedy v bodě $x = x_0$ musí být $f'(x_0) = P_n'(x_0) = a_1$. Odtud dostaneme $a_1 = f'(x_0)$.
Z druhé derivace polynomu $P_n(x)$, která je

$$P_n''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + 3 \cdot 4a_4(x - x_0)^2 + \cdots + (n - 1)na_n(x - x_0)^{n-2},$$

získáme v bodě $x = x_0$ vztah

$$f''(x_0) = P_n''(x_0) = 2a_2 \Longrightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Z třetí derivace polynomu $P_n(x)$

$$P_n'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x - x_0) + \cdots + (n - 2)(n - 1)na_n(x - x_0)^{n-3},$$

získáme v bodě $x = x_0$ vztah

$$f'''(x_0) = P_n'''(x_0) = 2 \cdot 3a_2 \Longrightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3} = a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Obecně z k–té derivace polynomu v bodě $x = x_0$ dostaneme vztah

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0) = k!a_k \Longrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Hledaný polynom tedy je

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Polynom z příkladu 1 se nazývá *Taylorův polynom* stupně n funkce $f(x)$ se středem v bodě x_0 a budeme jej značit například $T_n(f, x_0; x)$. Pro Taylorův polynom platí vztah

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(f, x_0; x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Platí následující

Věta: *(Taylorův vzorec) Je-li: 1) funkce $f(x)$ definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$; 2) $f(x)$ má na tomto intervalu spojité derivace $f'(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$; 3) pro $a < x < b$ existuje konečná derivace $f^{(n+1)}(x)$, pak*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n+1}(x)\,, \quad a \le x \le b\,,$$

kde $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$, $0 < \theta < 1$, *je zbytek v Lagrangeově tvaru, nebo*
$R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}\big(a+\theta_1(x-a)\big)}{n!} (1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1}$, $0 < \theta_1 < 1$, *je zbytek v Cauchyho tvaru.*

Příklad 2. Najděte Taylorův polynom stupně n se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$. Určete zbytek $R_{n+1}(x)$ tohoto polynomu.

Řešení:
Funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ má spojité derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}$. Protože je $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$, je pro všechna $k \in \mathbb{N}$ $f^{(k)}(0) = 1$. Tedy pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x)\,.$$

Zbytek $R_{n+1}(x)$ lze psát například v Lagrangeově tvaru jako

$$R_{n+1}(x) = \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}\, x^{n+1}\,,$$

kde bod ξ leží mezi body 0 a x.
Všimněte si, že pro $x > 0$ platí pro zbytek $R_{n+1}(x)$ odhad

$$\big|R_{n+1}(x)\big| \le \frac{\mathrm{e}^x}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

a pro $x < 0$ odhad

$$\big|R_{n+1}(x)\big| \le \frac{1}{(n+1)!}\, |x|^{n+1}\,.$$

V obou případech je pro pevné $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \big|R_{n+1}(x)\big| = 0\,.$$

Lze tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ psát

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Poslední vztah se velmi často využívá k definici funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Příklad 3. Najděte Taylorův polynom stupně n se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci $f(x) = \sin x$. Určete zbytek $R_{n+1}(x)$ tohoto polynomu.

Řešení:

Funkce $f(x) = \sin x$ má spojité derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}$. Protože pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(x) &= \sin x\,, & f^{(4k+1)}(x) &= \cos x\,, \\ f^{(4k+2)}(x) &= -\sin x\,, & f^{(4k+3)}(x) &= -\cos x\,, \end{aligned}$$

dostaneme pro derivace funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$ vztahy

$$f^{(4k)}(0) = 0\,, \quad f^{(4k+1)}(0) = 1\,, \quad f^{(4k+2)}(0) = 0\,, \quad f^{(4k+3)}(0) = -1\,.$$

Tedy pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} + R_{2n+3}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} + R_{2n+3}(x)\,. \end{aligned}$$

Zbytek $R_{2n+3}(x)$ lze psát například v Lagrangeově tvaru jako

$$R_{2n+3}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cos\xi}{(2n+3)!}\, x^{2n+3}\,,$$

kde bod ξ leží mezi body 0 a x.
Všimněte si, že pro zbytek $R_{2n+3}(x)$ odhad

$$\bigl|R_{2n+3}(x)\bigr| \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\,.$$

Tedy pro pevné $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{n\to\infty} \bigl|R_{2n+3}(x)\bigr| = 0\,.$$

Lze tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ psát

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}\,.$$

Poslední vztah se velmi často využívá k definici funkce $f(x) = \sin x$.

Příklad 4. Najděte Taylorův polynom stupně n se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci $f(x) = \cos x$. Určete zbytek $R_{n+1}(x)$ tohoto polynomu.

Řešení:
Funkce $f(x) = \cos^x$ má spojité derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}$. Protože pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(x) &= \cos x\,, & f^{(4k+1)}(x) &= -\sin x\,, \\ f^{(4k+2)}(x) &= -\cos x\,, & f^{(4k+3)}(x) &= \sin x\,, \end{aligned}$$

dostaneme pro derivace funkce $f(x) = \cos x$ v bodě $x_0 = 0$ vztahy

$$f^{(4k)}(0) = 1\,, \quad f^{(4k+1)}(0) = 0\,, \quad f^{(4k+2)}(0) = -1\,, \quad f^{(4k+3)}(0) = 0\,.$$

Tedy pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} + R_{2n+2}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,x^{2k} + R_{2n+2}(x)\,. \end{aligned}$$

Zbytek $R_{2n+2}(x)$ lze psát například v Lagrangeově tvaru jako

$$R_{2n+2}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cos\xi}{(2n+2)!}\,x^{2n+2}\,,$$

kde bod ξ leží mezi body 0 a x.
Všimněte si, že pro zbytek $R_{2n+2}(x)$ odhad

$$\big|R_{2n+2}(x)\big| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\,.$$

Tedy pro pevné $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{n\to\infty}\big|R_{2n+2}(x)\big| = 0\,.$$

Lze tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ psát

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,x^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}\,.$$

Poslední vztah se velmi často využívá k definici funkce $f(x) = \cos x$.

Z příkladů 2, 3 a 4 plyne, že pokud definujeme pro reálná x funkci $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, kde i je imaginární jednotka, pomocí řady dostaneme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} + \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} = \cos x + \mathrm{i}\sin x\,.$$

Vztah $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ se nazývá *Eulerův vztah* a v matematice hraje velmi významnou roli.

Příklad 5. Najděte Taylorův polynom stupně n se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci $f(x) = \ln(1+x)$. Určete zbytek $R_{n+1}(x)$ tohoto polynomu.

Řešení:

Postupným derivováním funkce $f(x) = \ln(1+x)$ získáme

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}, \quad \dots .$$

Z těchto několika derivací lze odhadnout, že pro každé $n \geq 1$ může platit vztah

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\,. \tag{1}$$

Tento vztah dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ jsme tento vztah již ukázali. Předpokládejme, že vztah (1) platí pro $n \in \mathbb{N}$. Pak je

$$f^{(n+1)}(x) = \big(f^{(n)}(x)\big)' = \left((-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\right)' = (-1)^{n+2}\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}\,,$$

což je ale dokazovaný vztah (1) pro $n+1$. Tedy vztah (1) platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. V bodě $x_0 = 0$ je $f(0) = 0$ a pro všechna $n \geq 1$ platí $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$. Tedy koeficienty Taylorova polynomu jsou $a_0 = 0$ a pro všechna $n \geq 1$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

Pro všechna $x \in (-1, +\infty)$ lze tedy psát

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,x^n + R_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\,x^k + R_{n+1}(x)\,.$$

Zbytek $R_{n+1}(x)$ lze v Lagrangeově tvaru zapsat pro každé $x \in (-1, +\infty)$ jako

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}\,,$$

kde ξ leží mezi body 0 a x. Pro $x > 0$ platí odhad

$$\big|R_{n+1}(x)\big| \leq \frac{x^{n+1}}{n}$$

a pro $x \in (-1, 0)$ je

$$\left|R_{n+1}(x)\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n(1+x)^{n+1}}\,.$$

Protože pro $x \in (-1, 1\rangle$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \left|R_{n+1}(x)\right| = 0$, lze pro tato x psát

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n\,.$$

Například pro $x = 1$ dostaneme

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

Příklad 6. Najděte Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě $x_0 = 1$ pro funkci $f(x) = x^x - 1$.

Řešení:

Abychom našli Taylorův polynom stupně 3 se středem v bodě $x_0 = 1$ stačí najít v tomto bodě první tři derivace funkce $f(x) = x^x - 1 = \mathrm{e}^{x \ln x} - 1$. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
&f(1) = 0\\
&f'(x) = x^x(\ln x + 1) \Longrightarrow f'(1) = 1\\
&f''(x) = x^x \left((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x}\right) \Longrightarrow f''(1) = 2\\
&f'''(x) = x^x \left((\ln x + 1)^3 + 3\frac{\ln x + 1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \Longrightarrow f'''(1) = 3\,.
\end{aligned}$$

Tedy hledaný Taylorův polynom je

$$T_3(x^x, 1; x) = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}\,(x-1)^3\,.$$

Příklad 7. Funkci $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$, $x > 0$, rozložte podle celých nezáporných mocnin zlomku $\dfrac{1}{x}$ do členu $\dfrac{1}{x^3}$ včetně.

Řešení:

Danou funkci lze přepsat do tvaru $f(x) = x\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} - 1\right)$. Abychom našli rozvoj této funkce v proměnné $\dfrac{1}{x}$, je výhodné zvolit novou proměnnou $t = \dfrac{1}{x}$ a rozložit funkci $\tilde{f}(t) = \dfrac{\sqrt{1+t^2}-1}{t}$ podle proměnné t do Taylorova polynomu stupně 3 se středem v bodě $t_0 = 0$. K tomu ale stačí najít Taylorův polynom funkce $g(t) = \sqrt{1+t^2}$ stupně 4 se středem v bodě $t_0 = 0$. Měli bychom tedy najít v bodě $t_0 = 0$ první čtyři derivace funkce $g(t) = \sqrt{1+t^2}$. Ale pokud si všimneme, že tato funkce je funkcí pouze proměnné $y = t^2$, lze nají Taylorův polynom druhého stupně funkce $\tilde{g}(y) = \sqrt{1+y}$ se středem v bodě $y_0 = 0$. Tedy stačí najít v bodě $y_0 = 0$ pouze dvě derivace. Postupným derivováním a dosazením získáme

$$\begin{aligned}
&\tilde{g}(0) = 1 \\
&\tilde{g}'(y) = \frac{1}{2\sqrt{1+y}} \Longrightarrow \tilde{g}'(0) = \frac{1}{2} \\
&\tilde{g}''(y) = -\frac{1}{4(1+y)^{3/2}} \Longrightarrow \tilde{g}''(0) = -\frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Proto lze přibližně psát

$$\tilde{g}(y) \approx 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} \Longrightarrow g(t) \approx 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8}\,.$$

Ale z toho dostaneme

$$\tilde{f}(t) \approx \frac{1}{t}\left(1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8} - 1\right) = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{8} \Longrightarrow f(x) \approx \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3}\,.$$

Příklad 8. Najděte Taylorův polynom čtvrtého stupně se středem v bodě $x_0 = 0$ pro funkci $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$.

Řešení:
Abychom našli Taylorův polynom stupně 4 dané funkce se středem v bodě $x_0 = 0$ musíme zdánlivě najít první čtyři derivace dané funkce v bodě $x_0 = 0$. Ale jakmile začneme derivovat, snadno zjistíme, že hodnoty těchto derivací musíme hledat pomocí limit.
Existuje ale ještě jiná možnost. Když vyjádříme funkci e^x přibližně pomocí Taylorova polynomu stupně 5 se středem v bodě 0, tj. $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120}$, vidíme, že pro danou funkci platí přibližně vztah

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \approx \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right)^{-1}\,.$$

Proto stačí najít polynom $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, pro který je do mocnin x^4

$$1 \approx \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right)$$

Po vynásobení a srovnání členů u stejných mocnin x do řádu 4, dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1\,, && (x^0)\\
a_1 + \frac{a_0}{2} &= 0\,, && (x^1)\\
a_2 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{6} &= 0\,, && (x^2)\\
a_3 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{24} &= 0\,, && (x^3)\\
a_4 + \frac{a_3}{2} + \frac{a_2}{6} + \frac{a_1}{24} + \frac{a_0}{120} &= 0\,, && (x^4)
\end{aligned}$$

Její řešení je

$$a_0 = 1\,, \quad a_1 = -\frac{1}{2}\,, \quad a_2 = \frac{1}{12}\,, \quad a_3 = 0\,, \quad a_4 = -\frac{1}{720}\,.$$

Tedy hledaný Taylorův polynom je

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720}\,.$$

Příklad 9. Odhadněte absolutní chybu přibližného vztahu $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$ pro $0 \le x \le 1$.

Řešení:

Nejprve najdeme Taylorův polynom stupně 2 funkce $f(x) = \sqrt{1+x}$ se středem v bodě $x_0 = 0$ a jeho zbytek. Protože je

$$\begin{aligned}
&f(0) = 1\\
&f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2}\\
&f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}} \Longrightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}\\
&f'''(x) = -\frac{3}{8(1+x)^{5/2}}\,,
\end{aligned}$$

platí pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ podle Taylorovy věty vztah

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + R_3(x)\,,$$

kde $R_3(x) = \dfrac{x^3}{16(1+\xi)^{5/2}}$, kde $\xi \in (0, 1)$. Z toho dostaneme pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ odhad zbytku

$$\left|R_3(x)\right| \le \frac{x^3}{16} \le \frac{1}{16}\,.$$

Tedy největší možná chyba tohoto vzorce na daném intervalu je $\frac{1}{16}$.

Příklad 10. Pomocí Taylorova polynomu najděte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

Řešení:
Jestliže najdeme Taylorův polynom $T_3(f(x), 0; x)$ funkce $f(x) = e^x \sin x - x(1+x)$, platí vztah

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_3(f(x), 0; x)}{x^3} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{T_3(f(x), 0; x)}{x^3},$$

jestliže alespoň jedna limita existuje. Taylorův polynom funkce $f(x)$ nejsnáze najdeme ze známých Taylorových polynomů stupně 3 se středem v bodě $x_0 = 0$ funkcí $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ a $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$. Pak je do členů x^3

$$e^x \sin x - x(1+x) \approx \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - x(1+x) \approx \frac{x^3}{6}.$$

Tedy $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{6x^3} = \frac{1}{6}$.

Příklad 11. Pomocí Taylorova polynomu najděte

$$\lim_{x\to +\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right).$$

Řešení:
Hledanou limitu přepíšeme do tvaru

$$\lim_{x\to +\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 2\right).$$

Pomocí Taylorova polynomu lze psát pro velmi malá t psát přibližně

$$\sqrt{1+t} \approx 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}.$$

Protože pro $x \to +\infty$ je $\frac{1}{x} \to 0_+$, lze přibližně psát

$$x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 2\right) \approx x^2 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} - 2\right) = -\frac{1}{4}.$$

(Rozmyslete si, proč nepotřebujeme Taylorův polynom funkce $\sqrt{1+t}$ vyššího stupně.) Tedy

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\big(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\big) = -\frac{1}{4}\,.$$

Příklad 12. Najděte konstanty a a b tak, aby platilo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^5}$ byla konečná.

Řešení:
Jedna z možností, jak řešit tuto úlohu je vybrat koeficienty a a b tak, aby Taylorův polynom funkce $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ se středem v bodě $x_0=0$ začínal až mocninou x^5. Ze známých rozvojů funkcí $\cos x$ a $\sin x$ do pátého stupně dostaneme

$$x-(a+b\cos x)\sin x \approx x-\left(a+b-\frac{bx^2}{2}+\frac{bx^4}{24}\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)\approx$$
$$\approx x(1-a-b)+x^3\left(\frac{b}{2}+\frac{a+b}{6}\right)-x^5\left(\frac{b}{24}+\frac{b}{12}+\frac{a+b}{120}\right).$$

Musíme tedy volit koeficienty a a b jako řešení soustavy rovnic

$$a+b=1\,,\ \frac{b}{2}+\frac{a+b}{6}=0 \Longrightarrow a=\frac{4}{3}\,,\ b=-\frac{1}{3}\,.$$

Výsledná limita pak je rovna

$$-\left(\frac{b}{24}+\frac{b}{12}+\frac{a+b}{120}\right)=\frac{1}{30}\,.$$

Cvičení 10 — Funkce rostoucí a klesající, lokální extrémy, funkce konvexní a konkávní, inflexní body

Příklad 1. Najděte oblasti monotonie funkce $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Řešení:

Funkce $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ je definována v celé množině $\mathbb{R}$ a má tam spojité derivace všech řádů. Její první derivace je $y' = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. Protože na intervalu $x \in (-1, 1)$ je $y' > 0$, je funkce na tomto intervalu rostoucí. Na intervalech $x \in (-\infty, -1)$ a $x \in (1, +\infty)$ je první derivace záporná. Proto je tam funkce klesající.
V bodech $x = \pm 1$ je derivace rovna nule. Protože vlevo od bodu $x = -1$ je funkce klesající a vpravo od tohoto budu je rostoucí, má funkce v tomto bodě lokální minimum. Naopak vlevo od bodu $x = 1$ je funkce rostoucí a vpravo od tohoto bodu je funkce klesající, má funkce v tomto bodě lokální maximum.

Příklad 2. Najděte oblasti monotonie funkce $y = x + |\sin 2x|$.

Řešení:

Funkce y je definována na celé množině $\mathbb{R}$. Mimo bodů $x_k = \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, má tato funkce spojité derivace všech řádů.
Pro $x \in \left(k\pi, \dfrac{2k+1}{2}\pi\right)$ je to funkce $y = x + \sin 2x$. Derivace této funkce je $y' = 1 + 2\cos 2x$. Tedy na intervalech $\left(k\pi, \dfrac{3k+1}{3}\pi\right)$ je $y' > 0$ a na intervalech $\left(\dfrac{3k+1}{3}\pi, \dfrac{2k+1}{2}\pi\right)$ je $y' < 0$. Proto je funkce na intervalech $\left(k\pi, \dfrac{3k+1}{3}\pi\right)$ rostoucí a na intervalech $\left(\dfrac{3k+1}{3}\pi, \dfrac{2k+1}{2}\pi\right)$ klesající. V bodě $x = \dfrac{3k+1}{3}\pi$ má funkce lokální maximum.
V intervalech $\left(\dfrac{2k-1}{2}\pi, k\pi\right)$ je $y = x - \sin 2x$. Tedy v těchto intervalech je $y' = 1 - 2\cos 2x$. Tato derivace je větší než nula v intervalech $\left(\dfrac{3k-1}{3}\pi, k\pi\right)$. Tedy funkce je na těchto intervalech rostoucí. V intervalech $\left(\dfrac{2k-1}{2}\pi, \dfrac{3k-1}{3}\pi\right)$ je první derivace záporná a funkce je v těchto intervalech klesající. V bodech $x = \dfrac{3k-1}{3}\pi$ jsou tedy lokální minima dan0 funkce.
Protože vlevo i vpravo od bodů $x = k\pi$ je funkce rostoucí, není v těchto bodech lokální extrém a funkce je v tomto bodě rostoucí. Podobně v bodech $x = \dfrac{2k+1}{2}\pi$ je funkce klesající.

Tedy funkce je rostoucí v intervalech $\left(\dfrac{3k-1}{3}\,\pi, \dfrac{3k+1}{3}\,\pi\right)$ a klesající v intervalech $\left(\dfrac{3k+1}{3}\,\pi, \dfrac{2k+2}{3}\,\pi\right)$. V bodech $x = \dfrac{3k+1}{3}\,\pi$ je lokální maximum a v bodech $x = \dfrac{3k-1}{3}\,\pi$ je lokální minimum.

Příklad 3. Najděte oblasti monotonie funkce $y = \dfrac{x^2}{2^x}$.

Řešení:
Funkce y je definována na celé množině $\mathbb{R}$ a má tam spojité derivace všech řádů. Její první derivace je $y' = 2^{-x}x\bigl(2 - x\ln 2\bigr)$. Tato derivace je větší než nula na intervalu $\left(0, \dfrac{2}{\ln 2}\right)$ a menší než nula na intervalech $(-\infty, 0)$ a $\left(\dfrac{2}{\ln 2}, +\infty\right)$. Tedy funkce je rostoucí na intervalu $\left(0, \dfrac{2}{\ln 2}\right)$ a klesající na intervalech $(-\infty, 0)$ a $\left(\dfrac{2}{\ln 2}, +\infty\right)$. Proto je v bodě $x = 0$ lokální minimum a v bodě $x = \dfrac{2}{\ln 2}$ lokální maximum.

Příklad 4. Dokažte, že pro $x > 0$ platí nerovnosti $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

Řešení:
Funkce $f(x) = x - \ln(1+x)$ má derivaci $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$, která je pro $x > 0$ kladná. Tedy pro $x > 0$ je tato funkce rostoucí. Protože $f(0) = 0$ platí pro $x > 0$ nerovnost $x - \ln(1+x) > 0$.
Funkce $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ má derivaci $f'(x) = 1 - x - \dfrac{1}{1+x}$, která je pro $x > 0$ záporná. Tedy pro $x > 0$ je tato funkce klesající. Protože $f(0) = 0$ platí pro $x > 0$ nerovnost $x - \dfrac{x^2}{2} - \ln(1+x) < 0$.

Příklad 5. Dokažte, že pro $x > 0$ platí nerovnost $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Řešení:
Jak je známo, je $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = \mathrm{e}$. Derivace funkce $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ je

$$\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right].$$

Jestliže dokážeme, že tato derivace je kladná, bude platit nerovnost $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \mathrm{e}$, protože je tato funkce rostoucí a má pro $x \to +\infty$ limitu e. Pro $x \to +\infty$ je

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]=0\,.$$

Derivace této funkce je

$$\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]'=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}\,.$$

Pro $x>0$ je tato derivace záporná. Tedy pro kladná x funkce klesá k hodnotě 0. Proto je první derivace kladná a funkce roste k hodnotě e. Z toho ale plyne, že platí dokazovaná nerovnost.
Naproti tomu je derivace

$$\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\right]'=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right].$$

Stačí ukázat, že tato derivace je menší než nula. Pak totiž daná funkce klesá pro $x>0$ k hodnotě e. Ale pro $x\to+\infty$ se tato derivace blíží k nule. Na druhé straně je pro $x>0$

$$\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right]'=\frac{1}{x^2(x+1)}>0\,.$$

Tedy pro kladná x derivace roste k hodnotě 0. Proto je tato derivace záporná a platí dokazovaná nerovnost.

Příklad 6. Nalezněte lokální extrémy funkce $y=x^3-6x^2+9x-4$.

Řešení:
Funkce $y=x^3-6x^2+9x-4$ má spojité derivace všech řádů na celé množině $\mathbb{R}$. Její derivace je $y'=3x^2-12x+9$. Tato derivace je rovna nule v bodech $x_1=1$ a $x_2=3$. Protože druhá derivace funkce $y''=6x-12$ je v bodě $x_1=1$ záporná, má daná funkce v bodě $x_1=1$ lokální maximum $y(1)=0$. Naopak v bodě $x_2=3$ je druhá derivace kladná. Tedy v tomto bodě má funkce lokální lokální minimum $y(3)=-4$.

Příklad 7. Nalezněte lokální extrémy funkce $y=\sqrt{x}\ln x$.

Řešení:
Definiční obor dané funkce je interval $(0,+\infty)$. Na tomto intervalu má daná funkce spojité derivace všech řádů. Její první derivace

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(2+\ln x\right)$$

je rovna nule v bodě $x = \mathrm{e}^{-2}$. Protože na intervalu $\left(0, \mathrm{e}^{-2}\right)$ je derivace záporná, je na tomto intervalu funkce klesající. Naopak na intervalu $\left(\mathrm{e}^{-2}, +\infty\right)$ je první derivace kladná, je funkce na tomto intervalu rostoucí. Proto má funkce v bodě $x\mathrm{e}^{-2}$ lokální minimum $y\left(\mathrm{e}^{-2}\right) = -2\mathrm{e}^{-1}$.

Druhá derivace dané funkce je $y'' = -\dfrac{\ln x}{4x^{3/2}}$.

Příklad 8. Nalezněte lokální extrémy funkce $y = \dfrac{10}{1 + \sin^2 x}$.

Řešení:

Funkce y má spojité derivace všech řádů na celé množině $\mathbb{R}$. Její první derivace

$$y' = -\frac{10 \sin 2x}{\left(1 + \sin^2 x\right)^2}$$

je rovna nule v bodech $x_k = \dfrac{k\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Druhá derivace této funkce je

$$y'' = -10\, \frac{2 \cos 2x\left(1 + \sin^2 x\right) - 2 \sin^2 2x}{\left(1 + \sin^2 x\right)^3}\,.$$

Tato druhá derivace je v bodech x_k rovna

$$y''\left(\frac{k\pi}{2}\right) = -\frac{80 \cos k\pi}{\left(3 - \cos k\pi\right)^2} = 80 \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{\left(3 - (-1)^k\right)^2}\,.$$

Tedy v bodech $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, je $y''(n\pi) = -20$. V těchto bodech má tedy daná funkce lokální maxima $y(n\pi) = 10$.

Naopak v bodech $x = \dfrac{2n+1}{2}\,\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, je $y''\left(\dfrac{2n+1}{2}\,\pi\right) = 5$. Proto má funkce y v těchto bodech lokální minima $y\left(\dfrac{2n+1}{2}\,\pi\right) = 5$.

Příklad 9. Nalezněte lokální extrémy funkce $y = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\,\ln(1 + x^2)$.

Řešení:

Definiční obor dané funkce je celá množina $\mathbb{R}$ a funkce má na této množině spojité derivace všech řádů. Její první derivace $y' = \dfrac{1 - x}{1 + x^2}$ je rovna nule v bodě $x = 1$. Protože pro $x < 1$ je první derivace kladná a pro $x > 1$ záporná, má funkce y v bodě $x = 1$ lokání maximum $y(1) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln 2}{2}$.

Druhá derivace je

$$y'' = \frac{-1-2x+x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,, \quad y''(1) = -\frac{1}{2} < 0\,.$$

Příklad 10. Nalezněte lokální extrémy funkce $y = \mathrm{e}^x \sin x$.

Řešení:

Funkce je definována na celé množině $\mathbb{R}$ a má na ní derivace všech řádů. Její první derivace

$$y'(x) = \mathrm{e}^x\big(\sin x + \cos x\big)$$

je rovna nule v bodech, kde $\sin x + \cos x = 0$, tj. v bodech $x_k = \dfrac{4k-1}{4}\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Druhá derivace této funkce je

$$y''(x) = 2\mathrm{e}^x \cos x\,.$$

Protože je tato druhá derivace v bodech $x = \dfrac{8k-1}{4}\,\pi$ kladná, má daná funkce v těchto bodech lokální minima $y\left(\dfrac{8k-1}{4}\,\pi\right) = -\dfrac{\mathrm{e}^{(8k-1)\pi/4}}{\sqrt{2}}$.

Naopak v bodech $x = \dfrac{8k+3}{4}\,\pi$ je druhá derivace záporná. Proto má funkce v těchto bodech lokální maxima $y\left(\dfrac{8k+3}{4}\,\pi\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{(8k+3)\pi/4}}{\sqrt{2}}$.

Příklad 11. Nalezněte lokální extrémy funkce $y = |x|\mathrm{e}^{-|x-1|}$.

Řešení:

Funkce je definována na celé množině $\mathbb{R}$, ale její derivace neexistují v bodech $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$. Pro $x \in (-\infty, 0)$ je funkce rovna $y = -x\mathrm{e}^{x-1}$. Tedy její derivace na tomto intervalu je $y' = -\mathrm{e}^{x-1}(1+x)$. Tedy je rovna nule v bodě $x = -1$. Protože druhá derivace $y''(x) = -\mathrm{e}^{x-1}(2+x)$ je v bodě $x = -1$ záporná, má funkce v bodě $x = -1$ lokální maximum $y(-1) = \mathrm{e}^{-2}$.

Na intervalu $(0, 1)$ má daná funkce tvar $y = x\mathrm{e}^{x-1}$. její derivace v tomto intervalu je $y' = \mathrm{e}^{x-1}(x+1)$. Ta je v celém intervalu $(0, 1)$ kladná. Tedy na tomto intervalu nemá daná funkce lokální extrém.

Pro $x \in (1, +\infty)$ je $y(x) = x\mathrm{e}^{-x+1}$. Její derivace je $y' = \mathrm{e}^{-x+1}(1-x)$. tedy je na celém tomto intervalu záporná a funkce zde nemá lokální extrémy.

Derivace neexistuje v bodech $x = 0$ a $x = 1$. V těchto bodech mohou tedy existovat lokální extrémy dané funkce. V intervalu $(-1, 0)$ je $y' < 0$ a pro $x \in (0, 1)$ je $y' > 0$. Proto je v bodě $x = 0$ lokální minimum $y(0) = 0$. Protože v intervalu $(1, +\infty)$ je $y' < 0$, je v bodě $x = 1$ lokální maximum $y(1) = 1$.

Příklad 12. Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = 3x^2 - x^3$.

Řešení:
První dvě derivace funkce y jsou $y' = 6x - 3x^3$ a $y'' = 6 - 6x$. Druhá derivace je kladná na intervalu $(-\infty, 1)$ a záporná na intervalu $(1, +\infty)$. Proto je na intervalu $(-\infty, 1)$ konvexní a na intervalu $(1, +\infty)$ konkávní. Tedy bod $x = 1$ je jejím inflexním bodem.

Příklad 13. Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = x + x^{5/3}$.

Řešení:
První dvě derivace funkce y jsou $y' = 1 + \dfrac{5}{3}\, x^{2/3}$ a $y'' = \dfrac{10}{9}\, x^{-1/3}$. Druhá derivace je záporná na intervalu $(-\infty, 0)$ a kladná na intervalu $(0, +\infty)$. Proto je na intervalu $(-\infty, 0)$ konkávní a na intervalu $(0, +\infty)$ konvexní. Tedy přestože druhá derivace v bodě $x = 1$ neexistuje, je tento bod jejím inflexním bodem.

Příklad 14. Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = \sqrt{1 + x^2}$.

Řešení:
Definiční obor funkce je celá množina $\mathbb{R}$. První dvě derivace jsou $y'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ a $y''(x) = \dfrac{1}{\left(1 + x^2\right)^{3/2}}$. Protože je druhá derivace kladná na celém $\mathbb{R}$, je tato funkce konvexní na celém $\mathbb{R}$.

Příklad 15. Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = x + \sin x$.

Řešení:
Definiční obor funkce je celá množina $\mathbb{R}$. První dvě derivace jsou $y'(x) = 1 + \cos x$ a $y''(x) = -\sin x$. Druhá derivace je kladná na intervalech $\big((2k-1)\pi, 2k\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$, a záporná na intervalech $\big(2k\pi, (2k+1)\pi\big)$. Tedy funkce je konvexní na intervalech $\big((2k-1)\pi, 2k\pi\big)$ a konkávní na intervalech $\big(2k\pi, (2k+1)\pi\big)$. Body $x = k\pi$ jsou inflexní body této funkce.

Příklad 16. Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = x \sin(\ln x)$.

Řešení:
Definiční obor dané funkce je interval $(0, +\infty)$. První dvě derivace jsou $y'(x) = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$ a $y''(x) = \dfrac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x}$. Druhá derivace je kladná na

intervalech $\left(\exp\left[\frac{4k-1}{4}\pi\right], \exp\left[\frac{4k+1}{4}\pi\right]\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Tedy na těchto intervalech je funkce konvexní.
Na intervalech $\left(\exp\left[\frac{4k+1}{4}\pi\right], \exp\left[\frac{4k+3}{4}\pi\right]\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, je druhá derivace záporná. Tedy daná funkce je na těchto intervalech konkávní.
V bodech $x = \exp\left[\frac{4k+1}{4}\pi\right]$ má funkce inflexní body.

Příklad 17. Najděte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body funkce $y = x^x$.

Řešení:
Definiční obor dané funkce je interval $(0, +\infty)$. První dvě derivace jsou $y'(x) = x^x\big(1 + \ln x\big)$ a $y''(x) = x^x\left(\big(1 + \ln x\big)^2 + \frac{1}{x}\right)$. Druhá derivace je kladná na celém definičním oboru. Proto je funkce $y = x^x$ konvexní na $D_f = (0, +\infty)$.

Příklad 18. Pro $x, y > 0$, $x \neq y$ a $n > 1$, dokažte nerovnost $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$.

Řešení:
Funkce $f(x) = x^n$ má druhou derivaci $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. Protože je tato derivace pro $n > 1$ a $x > 0$ kladná, je tato funkce na intervalu $(0, +\infty)$ konvexní.
Jestliže vezmeme body $0 < x < y$, platí pro ně nerovnost $0 < x < \frac{x+y}{2} < y$.
Protože je funkce $f(x) = x^n$ na intervalu $(0, +\infty)$ konvexní, platí nerovnost

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n < \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big) = \frac{1}{2}\left(x^n + y^n\right).$$

Příklad 19. Pro $x, y > 0$ dokažte nerovnost $x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x+y}{2}$.

Řešení:
Funkce $f(x) = x \ln x$ má druhou derivaci $f''(x) = \frac{1}{x}$. Protože je tato derivace pro $x > 0$ kladná, je tato funkce na intervalu $(0, +\infty)$ konvexní.
Jestliže vezmeme body $0 < x < y$, platí pro ně nerovnost $0 < x < \frac{x+y}{2} < y$.
Protože je funkce $f(x) = x \ln x$ na intervalu $(0, +\infty)$ konvexní, platí nerovnost

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{x+y}{2} \ln \frac{x+y}{2} < \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big) = \frac{1}{2}\left(x \ln x + y \ln y\right).$$

Cvičení 11 — **Asymptoty funkce; průběh funkce**

Příklad 1. Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1}$.

Řešení:
Definiční obor dané funkce je $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.
Protože $\lim\limits_{x \to 1_+} \dfrac{2x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1} = +\infty$, je přímka $x = 1$ svislou asymptotou ke grafu funkce $f(x)$.
Protože $\lim\limits_{x \to 1_-} \dfrac{2x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1} = +\infty$, je přímka $x = -1$ svislou asymptotou ke grafu funkce $f(x)$.
V obou bodech $x = \pm\infty$ platí $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^3 + x^2 - 2x}{x(x^2 - 1)} = 2$. Dále je $q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - 2x\big) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 1$. Tedy přímka $y = 2x + 1$ je šikmá asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x = \pm\infty$.

Příklad 2. Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Řešení:
Definiční ober dané funkce je určen nerovnicí $x^2 - 1 > 0$. Tedy $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
Protože $\lim\limits_{x \to 1_+} \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim\limits_{x \to -1_-} \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$, jsou obě přímky $x = \pm 1$ asymptotami ke grafu dané funkce.
V bodě $x = +\infty$ platí $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 4$. Dále je v tomto bodě

$$q = \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - 4x\big) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x\big(x - \sqrt{x^2 - 1}\big)}{\sqrt{x^2 - 1}} = 4 \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0\,.$$

Tedy přímka $y = 4x$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $x = +\infty$.
V bodě $x = -\infty$ platí $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -4$. Dále je v tomto bodě $q = \lim\limits_{x \to -\infty} \big(f(x) + 4x\big) = 0$. Tedy přímka $y = -4x$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $x = -\infty$.

Příklad 3. Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = 2x - \arccos \dfrac{1}{x}$.

Řešení:
Definiční obor funkce je určen nerovností $-1 \le \dfrac{1}{x} \le 1$. Tedy $D_f = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$.

Protože $\lim\limits_{x\to 1_+}\left(2x - \arccos\dfrac{1}{x}\right) = 2$ a $\lim\limits_{x\to -1_-}\left(2x - \arccos\dfrac{1}{x}\right) = -2-\pi$, nejsou přímky $x = \pm 1$ asymptotami ke grafu dané funkce.
V bodech $x = \pm\infty$ je $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 2$. Dále je $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - 2x\big) = -\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arccos\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$. Tedy přímka $y = 2x - \dfrac{\pi}{2}$ je asymptota ke grafu funkce v bodech $x = \pm\infty$.

Příklad 4. Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = x\mathrm{e}^{1/x}$.

Řešení:
Definiční obor dané funkce je $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Protože je $\lim\limits_{x\to 0_+} x\mathrm{e}^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^{-1}} = \lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{-x^{-2}\mathrm{e}^{1/x}}{-x^{-2}} = +\infty$, je přímka $x = 0$ asymptotou ke grafu funkce $f(x)$, přestože je $\lim\limits_{x\to 0_-} x\mathrm{e}^{1/x} = 0$.
V bodech $x = \pm\infty$ je $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$. Dále je

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} x\big(\mathrm{e}^{1/x} - 1\big) = \lim_{t\to 0_\pm}\frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} = 1\,.$$

Tedy přímka $y = x + 1$ je asymptota ke grafu dané funkce v bodech $x = \pm\infty$.

Příklad 5. Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x + 3x$.

Řešení:
Definiční obor dané funkce je celá reálná osa $\mathbb{R}$.
V bodech $x = \pm\infty$ je $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 3$.
Protože $q = \lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) - 3x\big) = \lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$, je přímka $y = 3x + \dfrac{\pi}{2}$ asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $x = +\infty$.
Protože $q = \lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x) - 3x\big) = \lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$, je přímka $y = 3x - \dfrac{\pi}{2}$ asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $x = -\infty$.

Příklad 6. Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + x^{3/2}}$.

Řešení:
Definiční obor dané funkce je interval $\langle 0, +\infty)$.
V bodě $x = 0$ je $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2 + x^{3/2}} = 0$. Proto v tomto bodě neexistuje asymptota ke grafu funkce $f(x)$.
Můžeme se pokusit najít asymptotu ke grafu této funkce v bodě $x = +\infty$. V tomto bodě je $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2 + x^{3/2}}}{x} = 1$.

Protože

$$q = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big) = \lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2+x^{3/2}}-x\big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2+x^{3/2}}+x} = +\infty\,.$$

asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $x=+\infty$ neexistuje.

Příklad 7. Vyšetřete průběh funkce $f(x)=(x+1)(x-2)^2$.

Řešení:
Definiční obor této funkce je celá množina $\mathbb{R}$. Limity v krajních bodech definičního oboru jsou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Protože $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, nemá graf funkce žádné asymptoty. Funkce $f(x)=0$ pro $x=-1$ a $x=2$. Funkce je větší než nula na intervalu $x\in(-1,+\infty)$ a menší než nula na intervalu $x\in(-\infty,-1)$. $f(0)=4$. Žádné další speciální vlastnosti této funkce nejsou na první pohled vidět.
$f'(x)=(x-2)^2+2(x+1)(x-2)=3x(x-2)$. $f'(x)=0$ pro $x=0$ a $x=2$.
$f(x)>0$ pro $x\in(-\infty,0)$ a $x\in(2,\infty)$; na těchto intervalech je funkce $f(x)$ rostoucí.
$f(x)<0$ pro $x\in(0,2)$; na tomto intervalu je funkce $f(x)$ klesající.
V bodě $x=0$ je lokální maximum $f(0)=4$ a v bodě $x=2$ je lokální minimum $f(2)=0$.
$f''(x)=6x-6$. $f'(x)=0$ pro $x=1$.
$f''(x)>0$ pro $x\in(1,+\infty$; v tomto intervalu je funkce $f(x)$ konvexní.
$f''(x)<0$ pro $x\in(-\infty,1)$; v tomto intervalu je funkce konkávní.
Bod $x=1$ je inflexní bod dané funkce.

Příklad 8. Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

Řešení:
Definiční obor dané funkce je $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Limity v krajních bodech definičního oboru jsou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1_+} f(x)=+\infty$ a $\lim\limits_{x\to-1_-} f(x)=-\infty$. Proto je přímka $x=-1$ asymptotou ke grafu funkce $f(x)$.
Protože je

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(x-1)}{(x+1)^2} = 1$$

a $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-x\big) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3x^2-x}{(x+1)^2} = -3$, je přímka $y=x-3$ asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x=\pm\infty$.
$f(0)=0$. Žádné další speciální vlastnosti funkce $f(x)$ na první pohled nevidím.

$f'(x) = \dfrac{x(x^2+3x-2)}{(x+1)^3}$.

$f'(x) = 0$ pro $x = 0$ a $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{3}$.

$f'(x) > 0$ pro $x \in \left(-\infty, -\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$, pro $x \in (-1, 0)$ a pro $x \in \left(\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}, +\infty\right)$; tedy na těchto intervalech je funkce $f(x)$ rostoucí.

$f'(x) < 0$ pro $x \in \left(-\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}, -1\right)$ a pro $x \in \left(0, \dfrac{\sqrt{17}-3}{2}\right)$; na těchto intervalech je funkce $f(x)$ klesající.

Proto je v bodě $x = -\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ lokální maximum; v bodě $x = 0$ také lokální maximum a v bodě $x = \dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$ lokální minimum.

$f''(x) = \dfrac{10x-2}{(x+1)^4}$.

$f''(x) = 0$ pro $x = \dfrac{1}{5}$.

$f''(x) > 0$ pro $x \in \left(\dfrac{1}{5}, +\infty\right)$; v tomto intervalu je tedy funkce $f(x)$ konvexní.

$f''(x) < 0$ pro $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{5}\right)$; v tomto intervalu je tedy funkce $f(x)$ konkávní.

Bod $x = \dfrac{1}{5}$ je inflexní bod dané funkce.

Příklad 9. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$.

Řešení:

Definiční obor funkce je dán nerovností $8x^2 - x^4 \geq 0$, tj. $D_f = \langle -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \rangle$.

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou $\lim\limits_{x \to \pm 2\sqrt{2}} f(x) = 0$.

Funkce je sudá; proto ji stačí vyšetřovat pro $x \geq 0$, tj. v intervalu $\langle 0, 2\sqrt{2} \rangle$.

$f(x) = 0$ pro $x = \pm 2\sqrt{2}$ a $x = 0$.

$f(x) = 0$ pro $x \in (-2\sqrt{2}, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$; $f(x) = 0$.

Asymptoty ke grafu této funkce nejsou.

$$f'(x) = \frac{2x(4-x^2)}{\sqrt{8x^2 - x^4}} = \begin{cases} \dfrac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}} & \text{pro } x > 0 \\ -\dfrac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}} & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Pro $x = 0$ derivace neexistuje.

$f'(x) = 0$ pro $x = \pm 2$.

$f'(x) > 0$ pro $x \in (0, 2)$ a $x \in (-2\sqrt{2}, -2)$; na těchto intervalech je funkce rostoucí.

$f'(x) < 0$ pro $x \in (-2, 0)$ a $x \in (2, 2\sqrt{2})$; na těchto intervalech je funkce klesající (všimněte si, že derivace sudé funkce je vždy funkce lichá).
V bodě $x = 0$ je lokální minimum $f(0) = 0$ a v bodech $x = \pm 2$ jsou lokální maxima $f(\pm 2) = 4$.
Lokální minima jsou i v bodech $x = \pm 2\sqrt{2}$, kde $f(\pm 2\sqrt{2}) = 0$ (?).
$f''(x) = \dfrac{2|x|(x^2 - 12)}{(8 - x^2)^{3/2}}$ kromě bodu $x = 0$, kde druhá derivace neexistuje. Tedy $f''(x) > 0$ na obou intervalech $(-2\sqrt{2}, 0)$ a $(0, 2\sqrt{2})$ (všimněte si, že derivace liché funkce je funkce sudá). Funkce je tedy konvexní v celém D_f.

Příklad 10. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Řešení:
Definiční obor dané funkce je $\mathbb{R}$. Protože $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, jsou asymptoty ke grafu daná funkce $y = 1$ pro $x = +\infty$ a $y = -1$ pro $x = -\infty$.
$f(x) = 0$ pro $x = 2$. $f(x) > 0$ pro $x \in (2, +\infty)$ a $f(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, 2)$; $f(0) = -2$; na první pohled nejsou vidět žádné jiné speciální vlastnosti funkce $f(x)$.
$f('(x) = \dfrac{2x + 1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$; $f'(x) = 0$ pro $x = -\dfrac{1}{2}$; $f'(x) > 0$ pro $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$, tj. na tomto intervalu je funkce $f(x)$ rostoucí; $f'(x) < 0$ pro $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$, tj. na tomto intervalu je funkce $f(x)$ klesající; proto je v bodě $x = -\dfrac{1}{2}$ lokální minimum $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\sqrt{5}$.
$f''(x) = \dfrac{2 - 3x - 4x^2}{(x^2 + 1)^{5/2}}$. $f''(x) = 0$ pro $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}$; $f''(x) > 0$ na intervalu $\left(-\dfrac{3 + \sqrt{41}}{8}, \dfrac{\sqrt{41} - 3}{8}\right)$, tj. na tomto intervalu je daná funkce konvexní; $f''(x) < 0$ na intervalech $x \in \left(-\infty, -\dfrac{3\sqrt{41}}{8}\right)$ a $x \in \left(\dfrac{\sqrt{41} - 3}{8}, +\infty\right)$, tj. na těchto intervalech je funkce $f(x)$ konkávní; body $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}$ jsou inflexní body dané funkce.

Příklad 11. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \cos x - \dfrac{1}{2} \cos 2x$.

Řešení:
Definiční obor dané funkce je celá množina $\mathbb{R}$. Funkce je periodická s periodou $L = 2\pi$ a je sudá. Proto ji stačí vyšetřovat na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
Limity v krajních bodech definičního oboru neexistují.

Nulové body této funkce jsou řešením rovnice $\frac{1}{2} + \cos x - \cos^2 x = 0$. Její řešení na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ je bod $x_0 = \arccos \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ $(1+\sqrt{3} > 2)$. Funkce je kladná v intervalu $\langle 0, x_0)$ a záporná na intervalu $(x_0, \pi\rangle$.
Derivace dané funkce je $f'(x) = -\sin x + \sin 2x$.
$f'(x) = 0$ pro $x = 0$, $x = \pi$ a $x = \frac{\pi}{3}$.
$f'(x) > 0$ na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, tj. na tomto intervalu je rostoucí.
Na intervalu $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ je $f'(x) < 0$, a tedy funkce $f(x)$ je na tomto intervalu klesající.
V bodech $x = 0$ a $x = \pi$ jsou minima $f(0) = \frac{1}{2}$ a $f(\pi) = -\frac{3}{2}$. V bodě $x = \frac{\pi}{3}$ je maximum $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.
Druhá derivace funkce $f(x)$ je $f''(x) = -\cos x + 2\cos 2x$. Ta je na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ rovna nule v bodech $x_{1,2} = \arccos \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$.
Druhá derivace je kladná v intervalech $\left(0, \arccos \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$ a $\left(\arccos \frac{1-\sqrt{33}}{8}, \pi\right)$ v těchto intervalech je tedy funkce konvexní.
V intervalu $\left(\arccos \frac{1+\sqrt{33}}{8}, \arccos \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$ je druhá derivace záporná, a tedy funkce je na tomto intervalu konkávní.
Body $x = \arccos \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$ jsou inflexní body dané funkce.

Příklad 12. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

Řešení:
Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina $\mathbb{R}$. Funkce má periodu $L = 2\pi$ a je lichá. Stačí ji tedy vyšetřovat na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.
Limity v krajních bodech definičního oboru neexistují.
Nulové body funkce $f(x)$ jsou $x = 0$ a $x = \pi$. Funkce $f(x)$ je na intervalu $(0, \pi)$ kladná.
Derivace je $f'(x) = \frac{1 + 2\cos x}{(2 + \cos x)^2}$. Ta je rovna nule v bodě $x = \frac{2}{3}\pi$. V intervalu $\left\langle 0, \frac{2}{3}\pi\right)$ je $f'(x) > 0$, a tedy funkce je v tomto intervalu rostoucí. v intervalu $\left(\frac{2}{3}\pi, \pi\right\rangle$ je $f'(x) < 0$. tedy funkce je v tomto intervalu klesající. V bodě $x = \frac{2}{3}\pi$ je lokální maximum $f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; v bodě $x = -\frac{2}{3}\pi$ je lokální minimum $f\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Druhá derivace dané funkce je $f''(x) = \dfrac{2\sin x\bigl(\cos x - 1\bigr)}{(2+\cos x)^3}$. Tato derivace je na intervalu $(0,\pi)$ záporná. Tedy funkce $f(x)$ je na tomto intervalu konkávní. Protože je tato derivace lichá funkce, je funkce na intervalu $(-\pi,0)$ konvexní. Tedy body $x=0$ a $x=\pi$ jsou inflexní body funkce $f(x)$.

Příklad 13. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$.

Řešení:

Definiční obor funkce $f(x)$ je celá množina $\mathbb{R}$. Funkce je kladná. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, a tedy přímka $y=0$ je asymptota ke grafu funkce $f(x)$ v bodech $x=\pm\infty$. Protože je daná funkce sudá, stačí ji vyšetřovat na intervalu $\langle 0,+\infty)$.

Její derivace je $f'(x) = -2x^3\mathrm{e}^{-x^2}$. Ta je na intervalu $(0,+\infty)$ záporná, a tedy funkce na tomto intervalu klesá. Na intervalu $(-\infty,0)$ je první derivace funkce $f(x)$ kladná. Tedy funkce na tomto intervalu roste. Proto je v bodě $x=0$ lokální maximum vyšetřované funkce $f(0)=1$.

Druhá derivace funkce je $f''(x) = 2x^2\bigl(2x^2-3\bigr)\mathrm{e}^{-x^2}$. Ta je kladná na intervalech $\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$ a $\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}},+\infty\right)$. Na těchto intervalech je tedy funkce $f(x)$ konvexní. Na intervalech $\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$ a $\left(0,\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$ je druhá derivace záporná. Tedy funkce $f(x)$ je konkávní na intervalu $\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}},\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$. Body $x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ jsou inflexní body dané funkce. Bod $x=0$ není jejím inflexním bodem.

Příklad 14. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Řešení:

Definiční obor dané funkce je celá množina $\mathbb{R}$.

Limity v krajních bodech definičního oboru jsou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\bigl(x+\sqrt{x^2+1}\bigr)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0\,.$$

Ale $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\bigl(x+\sqrt{x^2+1}\bigr) = \pm\infty$. Proto nemá funkce $f(x)$ asymptoty.

Protože

$$f(-x) = \ln\bigl(-x+\sqrt{x^2+1}\bigr) = \ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = -\ln\bigl(x+\sqrt{x^2+1}\bigr) = -f(x)\,,$$

je funkce $f(x)$ lichá. Stačí ji tedy vyšetřovat na intervalu $\langle 0,+\infty)$. Pro $x>0$ je funkce $f(x)>0$ a pro $x<0$ je $f(x)<0$. Její jediný nulový bod je $x=0$.

První derivace funkce je $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Ta je kladná na celé množině $\mathbb{R}$. Tedy funkce je rostoucí a nemá lokální extrémy.

Druhá derivace $f''(x) = \dfrac{-x}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}$ je kladná pro $x < 0$ a záporná pro $x > 0$. Tedy funkce $f(x)$ je konvexní na intervalu $(-\infty, 0)$ a konkávní na intervalu $(0, +\infty)$. Bod $x = 0$ je inflexní bod dané funkce.

Příklad 15. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = 2 \arcsin \dfrac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}$.

Řešení:

Definiční obor dané funkce je $D_f = \langle -2, 2 \rangle$. Její limity v krajních bodech definičního oboru jsou $\lim\limits_{x \to 2_-} f(x) = \pi$ a $\lim\limits_{x \to -2_+} f(x) = -\pi$. Protože $f(0) = -2$ má funkce nulový bod v intervalu $(0, 2)$. Na první pohled nejsou zřejmé žádné speciální vlastnosti funkce $f(x)$.

První derivace funkce $f'(x) = \dfrac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}} > 0$ na intervalu $(-2, 2)$. Tedy funkce $f(x)$ je na celém definičním oboru rostoucí. Lokální extrémy funkce $f(x)$ nemá.

Protože druhá derivace $f''(x) = \dfrac{2}{(2-x)\sqrt{4-x^2}}$ je na intervalu $(-2, 2)$ kladná, je funkce $f(x)$ na celém definičním oboru konvexní. Funkce tedy nemá inflexní body.

Cvičení 12 — **Globální extrémy**

Příklad 1. Najděte globální extrémy funkce $f(x) = 2^x$ na intervalu $\langle -1, 5\rangle$.

Řešení:

Derivace funkce je $f'(x) = 2^x \ln 2 \neq 0$. Globální extrémy mohou tedy být pouze v krajních bodech intervalu, tj. $x = -1$ a $x = 5$. Protože $f(-1) = \dfrac{1}{2}$ a $f(5) = 32$ je globální minimum dané funkce rovno $f_{\min} = \dfrac{1}{2}$ v bodě $x = -1$ a globální maximum $f_{\max} = 32$ v bodě $x = 5$.

Příklad 2. Najděte globální extrémy funkce $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$ na intervalu $\langle -10, 10\rangle$.

Řešení:

Protože je $f(x) = \big|(x-2)(x-1)\big|$ je funkce na intervalu $\langle -10, 1)$ definována předpisem $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Derivace funkce na tomto intervalu je $f'(x) = 2x - 3$. Derivace nemá na tomto intervalu nulové body.

Na intervalu $(1, 2)$ je funkce definována předpisem $f(x) = -x^2 + 3x - 2$. Tedy její derivace v tomto intervalu je $f'(x) = -2x + 3$. Ta je rovna nule pro $x = \dfrac{3}{2}$.

Na intervalu $(2, 10\rangle$ je funkce definována předpisem $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Tedy její derivace v tomto intervalu je $f'(x) = 2x - 3$. Derivace nemá na tomto intervalu nulové body.

Protože nevíme, zda má funkce derivaci v bodech $x = 1$ a $x = 2$, mohou být body, kde má funkce lokální extrém $x = -10$, $x = 1$, $x = \dfrac{3}{2}$, $x = 2$ a $x = 10$.

Funkční hodnoty v těchto bodech jsou $f(-10) = 132$, $f(1) = f(2) = 0$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$ a $f(10) = 72$. Tedy globální maximum je $f_{\max} = 132$ v bodě $x = -10$ a globální minimum je $f_{\min} = 0$ v bodech $x = 1$ a $x = 2$.

Příklad 3. Najděte infimum a supremum funkce $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^4}$ na intervalu $(0, +\infty)$.

Řešení:

Funkce $f(x)$ má na daném intervalu derivaci $f'(x) = \dfrac{2x\big(1 - 2x^2 - x^4\big)}{\big(1 + x^4\big)^2}$. Ta je rovna nule v bodě x_0, pro který je $x_0^2 = -1 + \sqrt{2}$. Supremum a infimum proto může daná funkce nabývat pouze v bodech $x = 0$, $x = x_0$ a $x = +\infty$. Protože je $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, $f(x_0) = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$ a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ je $\sup f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$ a $\inf f(x) = 0$.

Příklad 4. Najděte infimum a supremum funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \cos x^2$ na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Řešení:
Funkce je diferencovatelná na celém $\mathbb{R}$. Její derivace je $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\big(\cos x^2 + \sin x^2\big)$. Tato derivace je rovna nule v bodech $x_0 = 0$ a $x_k^2 = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Proto její supremum a infimum může být pouze v bodech $x_0 = 0$, $x_k = \pm\sqrt{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi}$ nebo $x = \pm\infty$. Protože je $f(0) = 1$, $f(x_k) = \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \exp\left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right)$ a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, je $\sup f(x) = 1$ a $\inf f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-3\pi/4}$.

Příklad 5. Dokažte nerovnost $\dfrac{x+a}{2^{(n-1)/n}} \le \sqrt[n]{x^n + a^n} \le x + a$ pro $x > 0$, $a > 0$ a $n > 1$.

Řešení:
Uvažujme funkci $f_1(x) = x + a - \sqrt[n]{x^n + a^n}$ a hledejme její infimum na intervalu $(0, \infty)$. Derivace této funkce je

$$f_1'(x) = 1 - x^{n-1}\big(x^n + a^n\big)^{(1-n)/n} = 1 - \left(\frac{x}{\sqrt[n]{x^n + a^n}}\right)^{n-1} > 0\,.$$

Protože je $f_1(0) = 0$ a funkce $f_1(x)$ je rostoucí, je na intervalu $(0, +\infty)$ splněna nerovnost $f_1(x) = x + a - \sqrt[n]{x^n + a^n} > 0$.
Nyní vezměme funkci $f_2(x) = \sqrt[n]{x^n + a^n} - \dfrac{x+a}{2^{(n-1)/n}}$ a hledejme její infimum na intervalu $(0, +\infty)$. Derivace této funkce je $f_2'(x) = \left(\dfrac{x}{\sqrt[n]{x^n + a^n}}\right)^{n-1} - \dfrac{1}{2^{(n-1)/n}}$.
Tato derivace je rovna nule pouze v bodě $x = a$. Tedy funkce $f_2(x)$ může nabývat infima pouze v bodech $x = 0$, $x = a$ nebo v bodě $x = +\infty$. Protože $f_2(0) = a - \dfrac{a}{2^{(n-1)/n}} > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{x^n + a^n} - \frac{x+a}{2^{(n-1)/n}}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[n]{1 + \frac{a^n}{x^n}} - \frac{1 + a/x}{2^{(n-1)/n}}\right) = +\infty$$

a $f_2(a) = 0$, platí nerovnost $f_2(x) \ge 0$.

Příklad 6. *Absolutní odchylkou* dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ se nazývá číslo $\triangle = \sup\limits_{a\le x\le b} |f(x) - g(x)|$. Určete absolutní odchylku funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = x^3$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Řešení:
Na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ máme najít supremum funkce $f(x) = \big|x^2 - x^3\big| = x^2 - x^3$. Protože derivace této funkce je $f'(x) = 2x - 3x^2$, která je rovna nule v bodech $x = 0$ a $x = \dfrac{2}{3}$,

může mít tato funkce supremum pouze v bodech $x = 0$ $x = \frac{2}{3}$ nebo $x = 1$. Funkční hodnoty v těchto bodech jsou $f(0) = f(1) = 0$ a $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$. Tedy pro dané funkce na daném intervalu je $\triangle = \frac{4}{27}$.

Příklad 7. Určete nejmenší hodnotu součtu n–té a m–té mocniny, $n > 0$, $m > 0$, dvou kladných čísel, jejichž součin je roven a.

Řešení:
Máme najít nejmenší hodnotu funkce dvou proměnných $F(x, y) = x^n + y^m$, kde $xy = a$ a $x, y > 0$. Z této rovnice plyne $y = \frac{a}{x}$. Proto máme najít na intervalu $(0, +\infty)$ infimum funkce $f(x) = x^n + \frac{a^m}{x^m}$. Derivace funkce $f(x)$ je $f'(x) = nx^{n-1} - m\,\frac{a^m}{x^{m+1}}$. Tato derivace je rovna nule pouze v bodě $x_0 = \left(\frac{m}{n}\right)^{1/(n+m)} a^{m/(n+m)}$. Protože pro toto x_0 je $y_0 = \left(\frac{n}{m}\right)^{1/(n+m)} a^{n/(n+m)}$ a v bodech $x = 0$ a $x = +\infty$ je limita funkce $f(x)$ rovna $+\infty$, je nejmenší hodnota rovna $(n+m)\left(\frac{a^{nm}}{m^m n^n}\right)^{1/(n+m)}$.

Příklad 8. Ze všech obdélníků s daným obsahem S najděte ten, který má nejmenší obvod.

Řešení:
Označme x a y strany obdélníka. Podle zadání splňuje x a y vztah $xy = S$, neboli $y = \frac{S}{x}$. Obvod obdélníka je $f(x) = 2(x + y) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right)$. Máme tedy najít minimum této funkce na intervalu $x \in (0, +\infty)$. Její derivace $f'(x) = 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right)$ je rovna nule v bodě $x = \sqrt{S}$. Protože $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, je má hledaný obdélník strany $x = y\sqrt{S}$. Je to tedy čtverec.

Příklad 9. Najděte pravoúhlý trojúhelník s největším obsahem, je-li součet jedné jeho odvěsny a přepony konstantní.

Řešení:
Označme odvěsny pravoúhlého trojúhelníka a a b a jeho přeponu c. Podle Pythagorovy věty je $a^2 + b^2 = c^2$, neboli $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Podle zadání úlohy je $a + c = k$, kde k je daná konstanta. Tedy $c = k - a$. Obsah trojúhelníka je $P = \frac{ab}{2}$. Máme tedy najít maximum funkce $f(a) = \frac{a}{2}\sqrt{k(k - 2a)}$ na intervalu $a \in (0, k/2)$. Její derivace

$f'(a) = \dfrac{k(k-3a)}{2\sqrt{k(k-2a)}}$ je rovna nule pro $a = \dfrac{k}{3}$. Pak je $c = \dfrac{2}{3}\,k$ a $b = \dfrac{k}{\sqrt{3}}$. Je zřejmé, že pro funkce $f(a)$ má v tomto bodě maximum, které je rovno $P_{\max} = \dfrac{k^2}{6\sqrt{3}}$.

Příklad 10. Pro jaké rozměry má uzavřený válec s daným objemem V nejmenší povrch?

Řešení:
Nechť je r poloměr a h výška válce. Jeho objem pak je $V = \pi r^2 h$. Tedy $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$. Povrch tohoto válce je $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. Máme tedy najít minimum funkce $f(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$ na intervalu $r \in (0, +\infty)$. Její derivace $f'(r) = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2}$ je rovna nule pro $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Pro tuto hodnotu r je $h = 2r$ a $S = \sqrt[3]{54\pi V^2}$. Protože $\lim\limits_{r\to 0_+} f(r) = \lim\limits_{r\to+\infty} f(r) = +\infty$, jsou hledané rozměry válce $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ a $h = 2r = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$.

Příklad 11. Do koule s poloměrem R vepište válec s největším objemem.

Řešení:
Jestliže je poloměr válce roven r a jeho výška $2h$, je objem válce $V = 2\pi r^2 h$. Dále musí platit vztah $r^2 + h^2 = R^2$, a tedy $r^2 = R^2 - h^2$. Máme tedy najít maximum funkce $f(h) = 2\pi h\bigl(R^2 - h^2\bigr)$ pro $h \in (0, R)$. Derivace této funkce $f'(h) = 2\pi\bigl(R^2 - 3h^2\bigr)$ je rovna nule pro $h = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$. Pro toto h je $r = \sqrt{\dfrac{2}{3}}R$ a $V = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}\,R^3$. Protože pro $h = 0$ a $h = R$ je $V = 0$, je poloměr hledaného válce $r = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,R$ a jeho výška $v = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,R$.

Příklad 12. Najděte nejkratší vzdálenost bodu $M = [p;p]$ od paraboly $y^2 = 2px$.

Řešení:
Nechť je bod $[x;y]$ libovolný bod paraboly $y^2 = 2px$. Čtverec vzdálenosti tohoto bodu od bodu $[p;p]$ je $d^2 = (x-p)^2 + (y-p)^2$. Jestliže z rovnice paraboly vypočteme $x = \dfrac{y^2}{2p}$ a dosadíme, dostaneme $d^2 = \dfrac{y^4}{4p^2} - 2py + 2p^2$. Máme najít minimum funkce $f(y) = \sqrt{\dfrac{y^4}{4p^2} - 2py + 2p^2}$ pro $y \in \mathbb{R}$. Protože jde o kladnou funkci, stačí najít

minimum její druhé mocniny, tj. funkce $g(y) = f^2(y) = \dfrac{y^4}{4p^2} - 2py + 2p^2$. Její derivace $g'(y) = \dfrac{y^3}{p^2} - 2p$ se rovna nule v bodě $y = \sqrt[3]{2}p$. Protože pro $y \to \pm\infty$ je $d \to +\infty$, je v tomto bodě minimální vzdálenost $d_{\min} = p\sqrt{2 - 3 \cdot 2^{-2/3}}$.

Příklad 13. Najděte nejmenší a největší vzdálenost bodu $A = [2; 0]$ od kružnice $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení:

Uvažujme libovolný bod $[x; y]$ kružnice $x^2 + y^2 = 1$. Čtverec vzdálenosti mezi body $[2; 0]$ a $[x, y]$ je $d^2 = (x-2)^2 + y^2$. Protože ale $y^2 = 1 - x^2$ máme najít minimum a maximum funkce $f(x) = 5 - 4x$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Její derivace $f'(x) = -4 \neq 0$. Tedy jedinými body, kde má funkce $f(x)$ extrém jsou krajní body intervalu body $x = \pm 1$. Tedy $d_{\min} = 1$ a $d_{\max} = 3$.

Příklad 14. Na elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ najděte v prvním kvadrantu bod $M = [x_0; y_0]$ tak, aby byl obsah trojúhelníka tvořeného souřadnicovými osami a tečnou k elipse v tomto bodě nejmenší.

Řešení:

Rovnice tečny ke grafu funkce, která prochází bodem $[x_0; y_0]$ je $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$. Z rovnice elipsy plyne, že $y_0 = -\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$. Derivaci y_0' nejsnáze najdeme derivací rovnice elipsy v implicitním tvaru. Z té plyne rovnost $\dfrac{2x_0}{a^2} + \dfrac{2y_0}{b^2}\,y_0' = 0$, tj. $y_0' = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$. Tedy rovnice tečny v tomto bodě je $y - y_0 = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}\,(x - x_0)$. Označíme-li r vzdálenost průsečíku této tečny s osou Ox dostaneme $r = x_0 + \dfrac{a^2}{x_0} \cdot \dfrac{y_0^2}{b^2} = \dfrac{a^2}{x_0}$. Je-li s vzdálenost průsečíku této tečny s osou Oy dostaneme $s = \dfrac{b^2}{y_0}$. Obsah daného trojúhelníka je $P = \dfrac{rs}{2} = \dfrac{a^2b^2}{2x_0y_0}$. Naší úlohou je najít minimum funkce $f(x_0) = \dfrac{a^3b}{x_0\sqrt{a^2 - x_0^2}}$ pro $x_0 \in (0, a)$. Derivace této funkce $f'(x_0) = \dfrac{a^3b(2x_0^2 - a^2)}{x_0^2\big(a_2 - x_0^2\big)^{3/2}}$ je rovna nule v bodě $x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Pak je $y_0 = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$ a $P = ab$.

Příklad 15. Jakou výseč je třeba vyřezat z kruhu s poloměrem R, aby ze zbytku bylo možné svinout trychtýř, který má největší objem?

Řešení:

Označme α úhel zbylé výseče. Délka části kružnice je $R\alpha$. Je-li r poloměr podstavy trychtýře, musí platit $R\alpha = 2\pi r$, neboli $r = \dfrac{\alpha}{2\pi} R$. Pro výšku h trychtýře dostaneme vztah $r^2 + h^2 = R^2$, tj. $h = \dfrac{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{2\pi} R$. Protože objem kužele je $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, je naším úkolem najít maximum funkce $f(\alpha) = \dfrac{R^3}{24\pi^2}\,\alpha^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$ pro $\alpha \in (0, 2\pi)$. Její derivace je $f'(\alpha) = \dfrac{R^3}{24\pi^2} \cdot \dfrac{\alpha(8\pi^2 - 3\alpha^2)}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}$. Nulové body derivace jsou $\alpha = 0$ a $\alpha = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Je zřejmé, že maximum funkce $f(\alpha)$ je v bodě $\alpha = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Musíme tedy vyřezat výseč se středovým úhlem $2\pi - \alpha = 2\pi\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Příklad 16. Podnik A je od železnice, která směřuje z jihu na sever a prochází městem B, vzdálen a km (počítá se nejkratší vzdálenost). Pod jakým úhlem φ vzhledem k železnici je třeba postavit příjezd od podniku A, aby převoz nákladů z A do B byl co nejekonomičtější, jestliže převoz tuny nákladu do vzdálenosti 1 km stojí po příjezdu k železnici p Kč a po železnici q Kč, $p > q$, a město B je o b km severněji než závod A?

Řešení:
Délka x příjezdu k železnici je dána vztahem $x = \dfrac{a}{\sin\varphi}$ a délka y od konce příjezdu do místa B pro $\operatorname{tg}\varphi \geq \dfrac{a}{b}$ je $y = b - \dfrac{a}{\operatorname{tg}\varphi}$. Náklady na přepravu jsou v takovém případě $N = px + qy$. Máme tedy najít minimum funkce $f(\varphi) = \dfrac{pa}{\sin\varphi} + q(b - a\operatorname{cotg}\varphi)$ pro $\varphi \in \left(\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Derivace této funkce $f'(\varphi) = \dfrac{-pa\cos\varphi + qa}{\sin^2\varphi}$ se rovná nule pro $\varphi = \arccos\dfrac{p}{q}$. Snadno se přesvědčíme, hledaný úhel $\varphi = \arccos\dfrac{p}{q}$ pro $\arccos\dfrac{p}{q} \geq \operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$ a $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$ pro $\arccos\dfrac{p}{q} < \operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$.

Příklad 17. K řece se šířkou a m je sestrojen pod pravým úhlem kanál šířky b m. Jaká je největší délka lodí, které mohou vplout do tohoto kanálu?

Řešení:
Zvolme počátek souřadnic O v bodě řeky, kde začíná kanál. Je zřejmé, že loď projede pokud bude nejmenší délka úsečky, která spojuje bod A na břehu řeky a bod B na břehu kanálu a prochází počátkem O větší než délka lodi. Nechť je φ úhel, který svírá tato úsečka z břehem řeky. Délka takové úsečky ℓ se skládá ze dvou částí. Z úsečky, která leží v řece a jejíž délku označíme ℓ_1, a z úsečky, která leží v kanále, jejíž délku označíme ℓ_2. Pak je $\ell = \ell_1 + \ell_2$, kde $\ell_1 = \dfrac{a}{\sin\varphi}$ a $\ell_2 = \dfrac{b}{\cos\varphi}$. Naším úkolem

tedy je najít minimum funkce $f(\varphi) = \dfrac{a}{\sin\varphi} + \dfrac{b}{\cos\varphi}$, kde $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Derivace této funkce $f'(\varphi) = -\dfrac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \dfrac{b\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ je rovna nule pro $\operatorname{tg}\varphi = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/3}$. Protože je $\sin\varphi = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \dfrac{a^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}$ a $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \dfrac{b^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}$, dostaneme pro délku $\ell = \left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$.

Příklad 18. Do poháru, který má tvar polokoule s poloměrem a, pustíte tyč délky $\ell > 2a$. Určete rovnovážnou polohu tyče.

Řešení:

Zvolme počátek ve středu polokoule a za rovinu xy vezmeme tu rovinu, ve které leží tyč v rovnováze. Protože $\ell > 2a$, opírá se tyč o vrchní část poháru. Nechť jsou souřadnice bodu, ve kterém se tyč opírá $[a;0]$ a pohár leží v záporném směru osy Oy. Lze předpokládat, že průnik roviny xy s polokoulí je hlavní polokružnice, tj. že má rovnici $x^2+y^2=a^2$, $y<0$.

Naší úlohu lze formulovat tak, že máme najít takovou polohu tyče, aby její těžiště bylo co nejníže.

Označme φ úhel, který svírá tyč a kladným směrem osy Ox, $\left[x_1;y_1\right]$ bod, ve kterém se tyč dotýká dna poháru a $\left[x_2;y_2\right]$ bod, ve kterém se nachází druhý konec tyče. y–ová souřadnice těžiště tyče je $y_T = \dfrac{y_1+y_2}{2}$. Protože tyč leží v přímce $y = (x-a)\operatorname{tg}\varphi$, splňují souřadnice bodů $\left[x_1;y_1\right]$ a $\left[x_2;y_2\right]$ rovnice

$$\begin{aligned} y_1 &= \big(x_1-a\big)\operatorname{tg}\varphi\,, & y_2 &= \big(x_2-a\big)\operatorname{tg}\varphi\,,\\ x_1^2+y_1^2 &- a^2\,, & \big(x_2-x_1\big)^2+\big(y_2-y_1\big)^2 &= \ell\,. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} &x_2-x_1=\ell\cos\varphi\,,\quad y_2-y_1=\ell\sin\varphi\,,\quad y_1=\big(x_1-a\big)\operatorname{tg}\varphi\,,\\ &y_T=y_1+\frac{\ell}{2}\sin\varphi=\big(x_1-a\big)\operatorname{tg}\varphi+\frac{\ell}{2}\sin\varphi\,,\quad x_1^2+\big(x_1-a\big)^2\operatorname{tg}^2\varphi=a^2\,. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic plyne, že $x_1 = 2\big(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi\big)$. Tedy máme najít minimum funkce $f(\varphi) = -2a\sin\varphi\cos\varphi + \dfrac{\ell}{2}\sin\varphi$ pro $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Derivace této funkce $f'(\varphi) = -2a\cos^2\varphi + 2a\sin^2\varphi + \dfrac{\ell}{2}\cos\varphi$ je rovna nule pro $\cos\varphi = \dfrac{\ell+\sqrt{128a^2+\ell^2}}{16a}$. Protože $0 \le \cos\varphi \le 1$, je rovnovážná poloha tyče pro $\ell \le 4a$ dána úhlem $\varphi = \arccos\left(\dfrac{\ell+\sqrt{128a^2+\ell^2}}{16a}\right)$ s pro $\ell > 4a$ rovnovážná poloha neexistuje.

Cvičení 13 — **Jednoduché primitivní funkce**

Příklad 1. Najděte neurčitý integrál $\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože $(1-x)(1-2x)(1-3x) = 1 - 6x + 11x^2 - 6x^3$, je

$$\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - 6\int x\,\mathrm{d}x + 11\int x^2\,\mathrm{d}x - 6\int x^3\,\mathrm{d}x =$$
$$= x - 3x^2 + \frac{11}{3}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^4 + C\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 2. Najděte neurčitý integrál $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože platí rovnost $\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 = \left(-1 + \frac{1}{x}\right)^2 = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$, je

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C\,, \quad x \neq 0\,.$$

Příklad 3. Najděte neurčitý integrál $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Neboť $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} + x^{-1/2}$, je

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{1/2}\,\mathrm{d}x + \int x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C\,, \quad x \in (0, +\infty)\,.$$

Příklad 4. Najděte neurčitý integrál $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože $\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} = x^{1/4} - 2x^{5/12} + x^{-1/4}$, je

$$\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{1/4}\,\mathrm{d}x - 2\int x^{5/12}\,\mathrm{d}x + \int x^{-1/4}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{4}{5}\,x^{5/4} - \frac{24}{17}\,x^{17/12} + \frac{4}{3}\,x^{3/4} + C\,, \quad x > 0\,.$$

Příklad 5. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože platí $\dfrac{x^2}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$, je

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 6. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Neboť $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, je

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} =$$
$$= \arcsin x + \ln\bigl(x + \sqrt{1+x^2}\bigr) + C = \arcsin x + \operatorname{argsinh} x + C\,, \quad x \in (-1,1)\,.$$

Příklad 7. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože platí rovnost $\dfrac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} = \dfrac{2^{x+1}-5^{x-1}}{2^x\cdot 5^x} = 2\cdot 5^{-x} - \dfrac{2^{-x}}{5}$, je

$$\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,\mathrm{d}x = 2\int 5^{-x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{5}\int 2^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\ln 5}\,5^{-x} + \frac{2^{-x}}{5\ln 2} + C\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 8. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože lze psát

$$\sqrt{1-\sin 2x} = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x} = \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = \bigl|\cos x - \sin x\bigr|$$

je pro $\cos x - \sin x > 0$

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x = \sin x + \cos x + C\,, \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{4k-1}{4}\,\pi, \frac{4k+1}{4}\,\pi\right)$$

a pro $\cos x - \sin x < 0$ je

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x = -\sin x - \cos x + C\,, \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{4k+1}{4}\,\pi, \frac{4k+3}{4}\,\pi\right).$$

Příklad 9. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Neboť platí $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$, je

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + C\,, \quad x \neq \frac{2k+1}{2}\,\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Příklad 10. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \operatorname{cotgh}^2 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Neboť platí $\operatorname{cotgh}^2 x = \dfrac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \dfrac{1+\sinh^2 x}{\sinh^2 x} = \dfrac{1}{\sinh^2 x} + 1$, je

$$\int \operatorname{cotgh}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} + \int \mathrm{d}x = \operatorname{cotgh} x + x + C\,, \quad x \neq 0\,.$$

Příklad 11. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(5x-2)^{5/2}}$.

Řešení:
Substitucí $5x-2=y$, pro kterou je $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{5}$, dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(5x-2)^{5/2}} = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^{5/2}} = -\frac{2}{15y^{3/2}} + C = -\frac{2}{15(5x-2)^{3/2}} + C\,, \quad x > \frac{2}{5}\,.$$

Příklad 12. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}$.

Řešení:
Substitucí $x = y\sqrt{\frac{2}{3}}$, pro kterou je $\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{d}y$, dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{\operatorname{arctg} y}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}}\, x + C\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 13. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}}$.

Řešení:
Substitucí $x = y\sqrt{\frac{2}{3}}$, pro kterou je $\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{3}}\mathrm{d}y$, dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\bigl(y + \sqrt{y^2-1}\bigr) + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\bigl(\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2-2}\bigr) + C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{argcosh} \sqrt{\frac{3}{2}}x + C_2\,, \quad x > \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Příklad 14. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

Řešení:
Protože platí rovnost $\dfrac{1}{1+\cos x} = \dfrac{1}{2\cos^2 x/2}$, je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x/2} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C\,, \quad x \neq (2k+1)\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Příklad 15. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Integrál najdeme integrací per partes.

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C\,, \quad x > 0\,.$$

Příklad 16. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

Integrál najdeme integrací per partes.

$$\int x^2 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \int x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x} =$$
$$= -\frac{2x^2+2x+1}{4}\,\mathrm{e}^{-2x} + C\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 17. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int x^3 \cosh 3x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Integrál najdeme integrací per partes.

$$\begin{aligned}\int x^3 \cosh 3x\,\mathrm{d}x &= \frac{x^3}{3}\sinh 3x - \int x^2 \sinh 3x\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{x^3}{3}\sinh 3x - \frac{x^2}{3}\cosh 3x + \frac{2}{3}\int x\cosh 3x\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{x^3}{3}\sinh 3x - \frac{x^2}{3}\cosh 3x + \frac{2}{9}x\sinh 3x - \frac{2}{9}\int \sinh 3x\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{3x^3+2x}{9}\,\sinh 3x - \frac{9x^2+2}{27}\,\cosh 3x + C\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Příklad 18. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Použijeme integraci per partes. Po troše přemýšlení lze dostat

$$\int x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2+1}{2}\,\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x = \frac{x^2+1}{2}\,\operatorname{arctg} x - x + C\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 19. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože platí $\dfrac{x^2}{1+x} = x - 1 + \dfrac{1}{1+x}$, je

$$\int \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \frac{x^2}{2} - x + \ln|1+x|\,, \quad x \neq -1\,.$$

Příklad 20. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

Řešení:
Protože platí $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}$ je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{3}\Big((x+1)^{3/2} - (x-1)^{3/2}\Big) + C\,, \quad x \in (1,+\infty)\,.$$

Příklad 21. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+2}$.

Řešení:
Protože platí vztah $x^2-x+2 = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4}$, použijeme substituce $x-\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}\,y$. Z toho dostaneme $\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{7}}{2}\,\mathrm{d}y$. Proto je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+2} = \frac{2}{\sqrt{7}} \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} y = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{7}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 22. Najděte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$.

Řešení:
Protože platí vztah $x-x^2 = \dfrac{1}{4} - \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$, použijeme substituci $x-\dfrac{1}{2} = \dfrac{y}{2}$. Z toho dostaneme $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{2}$. Integrál tedy je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y + C = \arcsin(2x-1) + C\,, \quad x \in (0,1)\,.$$

Cvičení 14 — **Primitivní funkce**

Příklad 1. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Řešení:
Substitucí $x^2 = y$, pro kterou je $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$, dostaneme

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y}} = -\sqrt{1-y} + C = -\sqrt{1-x^2} + C\,, \quad x \in (-1,1)\,.$$

Příklad 2. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{4+x^4}$.

Řešení:
Substitucí $x^2 = y$, pro kterou je $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$, dostaneme

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{4+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{4+y^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + C\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 3. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Řešení:
Substitucí $x = y^2$, pro kterou je $\mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$, dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}} = \int \frac{2\mathrm{d}y}{1+y^2} = 2\operatorname{arctg} y + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C\,, \quad x > 0\,.$$

Příklad 4. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

Řešení:
Substitucí $x = \dfrac{1}{y}$, pro kterou je $\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2}$, dostaneme

$$\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\int \sin y\,\mathrm{d}y = \cos y + C = \cos\frac{1}{x} + C\,, \quad x \neq 0\,.$$

Příklad 5. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

Řešení:

Protože $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$, dostaneme po substituci $\mathrm{e}^x = y$, pro kterou je $\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + 1} = \operatorname{arctg} y + C = \operatorname{arctg} \mathrm{e}^x + C\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 6. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x \ln(\ln x)}$.

Řešení:
Substitucí $\ln x = y$, pro kterou je $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}y$, získáme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y \ln y}\,.$$

Další substitucí $\ln y = t$, pro kterou je $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}t$, dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y \ln y} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \\ = \ln\bigl|\ln y\bigr| + C = \ln\bigl|\ln(\ln x)\bigr| + C\,, \quad x \in (1, \mathrm{e}) \cup (\mathrm{e}, +\infty)\,.$$

Příklad 7. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Pomocí vztahu $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}\,(1 - \cos 2x)$ dostaneme

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 8. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \sin 3x \cdot \sin 5x \,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Pomocí vztahu $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2}\bigl(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\bigr)$ dostaneme

$$\int \sin 3x \cdot \sin 5x \,\mathrm{d}x \frac{1}{2} \int \bigl(\cos 2x - \cos 8x\bigr)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 8x}{16}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 9. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$.

Řešení:
Protože platí $\mathrm{d}(\operatorname{tg} x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$ a $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, je výhodné použít substituce $\operatorname{tg} x = y$. Pak je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = \int (1+y^2)\,\mathrm{d}y = y + \frac{y^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C\,, \quad x \neq \frac{2k+1}{2}\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Příklad 10. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Je výhodné použít integrace per partes. Pomocí ní dostaneme

$$\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\,, \quad x \in (-1,1)\,.$$

Příklad 11. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Daný integrál lze najít tak, že nejprve integrujeme per partes. Pomocí této integrace dostaneme získáme

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+x}\,.$$

Druhý integrál najdeme pomocí substituce $x = y^2$. Pak je $\mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$ a

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{1+x} &= 2\int \frac{y^2\,\mathrm{d}y}{1+y^2} = 2\int \mathrm{d}y - 2\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \\ &= 2y - 2\operatorname{arctg} y + C = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C\,.\end{aligned}$$

Tedy

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C\,, \quad x > 0\,.$$

Ale bylo by možné najít tento integrál přímo integrací per partes. Stačilo by zvolit v první integraci místo x funkci $x+1$, jejíž derivace je také rovna 1. Pak bychom přímo dostali

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C\,, \quad x > 0\,.$$

Příklad 12. Najděte primitivní funkci $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Integrály tohoto typu lze s výhodou řešit pomocí substituce $x = a\sin t$. Pak je totiž $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$ a $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$. Pro $x \in (-a, a)$ je tedy daný integrál

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = a^2 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\,t + \frac{a^2}{4}\,\sin 2t + C =$$
$$= \frac{a^2}{2}\,t + \frac{a^2}{2}\,\sin t\sqrt{1 - \sin^2 t} + C = \frac{a^2}{2}\,\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\,x\sqrt{a^2 - x^2} + C\,.$$

Příklad 13. Najděte primitivní funkci $\int x^2\sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Integrály tohoto typu lze často řešit substitucí $x = a\sinh t$. Protože je $\mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t$ a $\sqrt{a^2 + x^2} = a\cosh t$, dostaneme

$$\int x^2\sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = a^4 \int \sinh^2 t\cosh^2 t\,\mathrm{d}t\,.$$

Tento integrál lze vyřešit pomocí vztahů $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, $\cosh^2 t + \sinh^2 t = \cosh 2t$ a $2\sinh t\cosh t = \sinh 2t$, které jsou podobné vztahům pro goniometrické funkce. Jiná možnost je použít definičních vztahů $\cosh t = \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$ a $\sinh t = \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}$. Pomocí těchto vztahů získáme

$$\int x^2\sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^4}{16}\int \left(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)^2\mathrm{d}t = \frac{a^4}{64}\left(\mathrm{e}^{4t} - \mathrm{e}^{-4t}\right) - \frac{a^4}{8}\,t + C_1\,.$$

Z rovnice $x = a\,\dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}$ dostaneme $\mathrm{e}^t = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{a}$ a $\mathrm{e}^{-t} = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2} - x}{a}$. Po dosazení a volbě jiné integrační konstanty C dostaneme

$$\int x^2\sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\,x\left(a^2 + 2x^2\right)\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^4}{8}\,\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Podobně lze integrály, které obsahují výrazy $\sqrt{x^2 - a^2}$, mnohdy řešit substitucí $x = a\cosh t$.
Povšimněte si, že jsme v našem příkladě mohli zvolit substituci $t = x + \sqrt{a^2 + x^2}$. Substituce tohoto typu se nazývají *Eulerovy* substituce a seznámíme se s nimi později.

Příklad 14. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \frac{x^{11}\,\mathrm{d}x}{x^8+3x^4+2}$.

Řešení:
Protože jmenovatel integrovaného výrazu je funkcí pouze x^4, $x^{11}=x^3\cdot x^8$ a $\left(x^4\right)'=4x^3$, je výhodné použít substituce $x^4=y$. Pak je $4x^3\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$ a daný integrál je

$$\int \frac{x^{11}\,\mathrm{d}x}{x^8+3x^4+2}=\frac{1}{4}\int\frac{y^2\,\mathrm{d}y}{y^2+3y+2}=\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{3y+2}{y^2+3y+2}\right)\mathrm{d}y=$$
$$=\frac{y}{4}-\frac{1}{4}\int\frac{3y+2}{y^2+3y+2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Poslední integrál lze najít pomocí tzv. rozkladu na parciální zlomky. Protože platí $y^2+3y+2=(y+1)(y+2)$, budeme se snažit najít reálná čísla A a B tak, aby identicky platila rovnost $\dfrac{3y+2}{y^2+3y+2}=\dfrac{A}{y+1}+\dfrac{B}{y+2}$. Z toho dostaneme, že pro všechna $y\in\mathbb{R}$ musí platit rovnost $3y+2=A(y+2)+B(y+1)$. Pro $y=-1$ získáme $A=-1$ a pro $y=-2$ dostaneme $B=4$. Tedy

$$\int\frac{3y+2}{y^2+3y+2}\,\mathrm{d}y=-\int\frac{\mathrm{d}y}{y+1}+4\int\frac{\mathrm{d}y}{y+2}=-\ln\left|y+1\right|+4\ln\left|y+2\right|.$$

Z tohoto vztahu tak dostaneme

$$\int \frac{x^{11}\,\mathrm{d}x}{x^8+3x^4+2}=\frac{y}{4}-\frac{1}{4}\ln\left|y+1\right|+\ln\left|y+2\right|+C=$$
$$=\frac{x^4}{4}-\frac{1}{4}\ln\left|x^4+1\right|+\ln\left|x^4+2\right|+C\,,\quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Příklad 15. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Na první pohled je vidět, že problémy nám bude dělat $\sqrt{x}$ v exponentu. Proto zavedeme novou proměnnou $y^2=x$. Pak je $\mathrm{d}x=2y\,\mathrm{d}y$ a $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2\int y^5\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y$. Tento integrál najdeme pomocí integrace per partes. Dostaneme

$$\int x^2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2\bigl(y^5-5y^4+20y^3-60y^2+120y-120\bigr)\mathrm{e}^y+C=$$
$$=2\bigl(x^{5/2}-5y^2+20y^{3/2}-60y+120y^{1/2}-120\bigr)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+C\,,\quad x>0\,.$$

Příklad 16. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Integrály tohoto typu lze najít integrací per partes. Pomocí ní získáme vztah

$$\int \mathrm{e}^{-2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x + \frac{3}{2}\int \mathrm{e}^{-2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x - \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-2x}\cos 3x - \frac{9}{4}\int \mathrm{e}^{-2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x\,.$$

To je rovnice, ze které lze vypočítat hledaný integrál. Snadno z ní dostaneme

$$\int \mathrm{e}^{-2x}\sin 3x = -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{13}\big(2\sin 3x + 3\cos 3x\big) + C\,,\qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

Příklad 17. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

Řešení:
V tomto případě lze použít substituci $\mathrm{e}^x = y$ (i když je asi lepší substituce $\mathrm{e}^{-x} = y$). Pak je $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{y}$. Odtud dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y(1+y)^2}\,.$$

Tento integrál se najde tak, že integrovaný výraz rozložíme na zlomky. Jak ukážeme později, lze psát $\dfrac{1}{y(1+y)^2} = \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{1+y} + \dfrac{C}{(1+y)^2}$, kde A, B a C jsou konstanty. Po vynásobení společným jmenovatelem $y(1+y)^2$ získáme pro tyto konstanty vztah $1 = A(1+y)^2 + By(1+y) + Cy$, která musí platit pro všechna $y\in\mathbb{R}$. Pro $y=0$ dostaneme $A=1$ a pro $y=-1$ dostaneme $C=-1$. Po dosazení těchto hodnot získáme vztah $y + y^2 + B\big(y+y^2\big) = 0$. Z této rovnice plyne $B=-1$. Proto platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} - \int \frac{\mathrm{d}y}{1+y} - \int \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2} =$$
$$= \ln|y| - \ln|1+y| + \frac{1}{1+y} + C = \ln\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + C\,,\qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

Příklad 18. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}$.

Řešení:

Bylo by možné použít substituci $\mathrm{e}^x = y$, ale protože $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}} = \int \frac{\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x}}}$, vede rychleji k cíli substituce $\mathrm{e}^{-x/2} = y$. Pak je $-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ a z integrálu dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}} = -2\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - y^2}} = -2\arcsin y + C = -2\arcsin \mathrm{e}^{-x/2} + C\,, \quad x > 0\,.$$

Příklad 19. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Tento integrál lze snadno najít metodou per partes. Pomocí ní dostaneme

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\,x^{3/2}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x} - \frac{1}{3}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x} = \\ &= \frac{2}{3}\,x^{3/2}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x} - \frac{1}{3}\int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{3}\,x^{3/2}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}\,\ln|1+x| + C\,, \quad x > 0\,.\end{aligned}$$

Příklad 20. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int x \ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Daný integrál lze najít integrací per partes. Zvolíme-li $u' = x$ a $v = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$, dostaneme $v' = \dfrac{2}{1-x^2}$. Proto je výhodnější zvolit $u = \dfrac{x^2-1}{2}$. Při této volbě dostaneme pro $x \in (-1,1)$

$$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2-1}{2}\,\ln\frac{1+x}{1-x} + \int \mathrm{d}x = \frac{x^2-1}{2}\,\ln\frac{1+x}{1-x} + x + C\,.$$

Příklad 21. Najděte primitivní funkci $\displaystyle\int \mathrm{tgh}\,x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože je $\mathrm{tgh}\,x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ a $\big(\cosh x\big)' = \sinh x$, je

$$\int \mathrm{tgh}\,x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\cosh x)}{\cosh x} = \ln(\cosh x) + C\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 22. Odvoďte vzorce pro snížení řádu v integrálech

$$\text{a) } I_n = \int \sin^n x \, \mathrm{d}x\,; \qquad \text{b) } K_n = \int \cos^n x \, \mathrm{d}x \qquad (n \geq 2)$$

a s jejích pomocí určete $\displaystyle\int \sin^6 x \, \mathrm{d}x$ a $\displaystyle\int \cos^8 x \, \mathrm{d}x$.

Řešení:
Oba tyto integrály lze počítat integrací per partes. Jestliže napíšeme $\sin^n x = \sin x \cdot \sin^{n-1} x$, získáme touto metodou

$$\begin{aligned} I_n &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x = \\ &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \left(1 - \sin^2 x\right) \cdot \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x = \\ &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \,. \end{aligned}$$

Jestliže z této rovnosti vypočítáme I_n, dostaneme

$$I_n = -\frac{1}{n} \cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \,.$$

Zcela analogicky lze získat vztah

$$K_n = \frac{1}{n} \sin x \cdot \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} K_{n-2} \,.$$

Pomocí těchto vztahů snadno najdeme pro $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int \sin^6 x \, \mathrm{d}x &= -\frac{1}{6} \cos x \cdot \sin^5 x + \frac{5}{6} \int \sin^4 x \, \mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{6} \cos x \cdot \sin^5 x - \frac{5}{24} \cos x \cdot \sin^3 x + \frac{5}{8} \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{6} \cos x \cdot \sin^5 x - \frac{5}{24} \cos x \cdot \sin^3 x - \frac{5}{16} \cos x \cdot \sin x + \frac{5}{16} x + C \,. \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \int \cos^8 x \, \mathrm{d}x = K_8 &= \frac{1}{8} \sin x \cdot \cos^7 x + \frac{7}{8} K_6 = \\ &= \frac{1}{8} \sin x \cdot \cos^7 x + \frac{7}{48} \sin x \cdot \cos^5 x + \frac{35}{48} K_4 = \\ &= \frac{1}{8} \sin x \cdot \cos^7 x + \frac{7}{48} \sin x \cdot \cos^5 x + + \frac{35}{192} \sin x \cdot \cos^3 x + \frac{35}{64} K_2 = \\ &= \frac{1}{8} \sin x \cdot \cos^7 x + \frac{7}{48} \sin x \cdot \cos^5 x + + \frac{35}{192} \sin x \cdot \cos^3 x + \\ &\qquad + \frac{35}{128} \sin x \cdot \cos x + \frac{35}{128} x + C \,. \end{aligned}$$

Cvičení 15 — **Integrace racionálních funkcí**

Příklad 1. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Řešení:
Integrand rozložíme na parciální zlomky. Z rovnosti

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

plyne vztah $x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. pro $x = -1$ dostaneme $A = -\dfrac{1}{2}$, pro $x = -2$ dostaneme $B = 2$ a pro $x = -3$ získáme $C = -\dfrac{3}{2}$. Tedy

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} - \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+3} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C\,, \quad x \neq -1\,,\ -2\,,\ -3\,.$$

Příklad 2. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože je $\dfrac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \dfrac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}$ a $x^3-5x^2+6x = x(x-2)(x-3)$, stačí najít reálné konstanty A, B a C tak, aby

$$\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}\,.$$

Z této rovnice plyne vztah $5x^2-6x+1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)$. Pro $x = 0$ dostaneme $A = \dfrac{1}{6}$, pro $x = 2$ je $B = -\dfrac{9}{2}$ a pro $x = 3$ získáme $C = \dfrac{28}{3}$. Tedy

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x = x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + C\,, \quad x \neq 0, 2, 3\,.$$

Příklad 3. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

Integrand rozložíme na parciální zlomky. Z rovnosti $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$ plyne vztah $x^2+1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$. Pro $x=1$ dostaneme $A = \dfrac{1}{2}$ a pro $x=-1$ máme $C=-1$. Srovnáním koeficientů u x^2 dostaneme $A+B=1$, tj. $B=\dfrac{1}{2}$. tedy

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + \frac{1}{x+1} + C\,, \quad x \neq \pm 1\,.\end{aligned}$$

Příklad 4. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$.

Řešení:
Integrand rozložíme na parciální zlomky. Tedy máme najít reálné konstanty A, B a C, pro které platí $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$. Z této rovnice plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ musí platit rovnost $1 = A(x^2+1) + Bx(x+1) + C(x+1)$. Pro $x=-1$ dostaneme $A = \dfrac{1}{2}$. Srovnáním koeficientů u x^2 a x^0 dostaneme vztahy $A+B=0$ a $A+C=1$. Z nich plyne, že $B = -\dfrac{1}{2}$ a $C = \dfrac{1}{2}$. Tedy

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \\ &= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C\,, \quad x \neq -1\,.\end{aligned}$$

Příklad 5. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

Řešení:
Protože $\dfrac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = \dfrac{1}{(x-2)^2\big((x-2)^2+1\big)}$, je výhodné zavést novou proměnnou $y = x-2$. Pak dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} &= \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2(y^2+1)} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} - \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \\ &= -\frac{1}{y} - \operatorname{arctg} y + C = -\frac{1}{x-2} - \operatorname{arctg}(x-2) + C\,, \quad X \neq 2\,.\end{aligned}$$

Příklad 6. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

Řešení:
Integrand rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}\,.$$

Z této rovnice plyne pro všechna $x \in \mathbb{C}$ vztah $x = A(x-1)(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) + Cx(x-1)^2 + D(x-1)^2$.Pro $x = 1$ dostaneme $B = \frac{1}{5}$. Jestliže derivujeme tuto rovnici v bodě $x = 1$ dostaneme $1 = 5A + 4B$, tj. $A = \frac{1}{25}$. Srovnáním členů u x^3 získáme vztah $A + C = 0$, tj. $C = -\frac{1}{25}$. A konečně pro bod $x = 0$ dostáváme rovnost $-2A + 2B + D = 0$, tj. $D = -\frac{8}{25}$. Tedy pro $x \neq 1$ je

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{1}{25}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} - \frac{1}{25}\int \frac{(x+8)\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} =$$
$$= \frac{1}{25}\ln|x-1| - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{1}{50}\int \frac{(2x+2)\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} - \frac{7}{25}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} =$$
$$= \frac{1}{25}\ln|x-1| - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{1}{50}\ln(x^2+2x+2) - \frac{7}{25}\operatorname{arctg}(x+1) + C\,.$$

Příklad 7. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)(1+x+x^2)}$.

Řešení:
Integrand rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x+x^2}\,.$$

Tedy konstanty A, B, C a D splňují pro všechna $x \in \mathbb{C}$ rovnici

$$1 = A(1+x)(1+x+x^2) + Bx(1+x+x^2) + Cx^2(1+x) + Dx(1+x)\,.$$

Pro $x = 0$ dostaneme $A = 1$ a pro $x = -1$ získáme $B = -1$. Srovnáním členů u x^3 a x^2 dostaneme $A + B + C = 0$ a $2A + B + C + D = 0$. Z těchto rovnic plyne $C = 0$ a $D = -1$. Tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+1/2\right)^2 + 3/4} =$$
$$= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,, \quad x \neq 0, -1\,.$$

Příklad 8. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

Řešení:
Protože je $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, budeme hledat rozklad na parciální zlomky ve tvaru $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$. Z tohoto vztahu dostaneme $1=A(x^2-x+1)+Bx(x+1)+C(x+1)$. Odtud pro $x=-1$ máme $A=\dfrac{1}{3}$. Pro $x=0$ dostaneme $A+C=1$, tj. $C=\dfrac{2}{3}$. Srovnáním členů u x^2 dostaneme $A+B=0$, neboli $B=-\dfrac{1}{3}$. Tedy

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\frac{1}{3}\int \frac{(x-2)\,\mathrm{d}x}{x^2-x+1}= \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)\,\mathrm{d}x}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-1/2\right)^2+3/4}= \\ &= \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\,, \quad x\neq -1\,.\end{aligned}$$

Příklad 9. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3-1}$.

Řešení:
Protože je $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, budeme hledat rozklad na parciální zlomky ve tvaru $\dfrac{x}{x^3+1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$. Z tohoto vztahu dostaneme $x=A(x^2+x+1)+Bx(x-1)+C(x-1)$. Odtud pro $x=1$ máme $A=\dfrac{1}{3}$. Pro $x=0$ dostaneme $A-C=0$, tj. $C=\dfrac{1}{3}$. Srovnáním členů u x^2 dostaneme $A+B=0$, neboli $B=-\dfrac{1}{3}$. Tedy

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3-1} &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{1}{3}\int \frac{(x-1)\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}= \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int \frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+1/2\right)^2+3/4}= \\ &= \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\,, \quad x\neq= 1\,.\end{aligned}$$

Příklad 10. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$.

Řešení:
Integrand rozložíme na parciální zlomky. Protože platí

$$\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{1+x}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x}\,,$$

je

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C\,,\quad x\neq\pm1\,.$$

Příklad 11. Najděte integrál $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$.

Řešení:
Protože je $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=\big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$, budeme hledat rozklad na parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}\,.$$

Z toho dostaneme $1=Ax\big(x^2-x+1\big)+B\big(x^2-x+1\big)+Cx\big(x^2+x+1\big)+D\big(x^2+x+1\big)$. Srovnáním členů u stejných mocnin dostaneme

$$A+C=0\,,\quad -A+B+C+D=0\,,\quad A-B+C+D=0\,,\quad B+D=1\,.$$

Řešení těchto rovnic je $A=B=D=\dfrac{1}{2}$, $C=-\dfrac{1}{2}$. Tedy

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{(x-1)\,\mathrm{d}x}{x^2-x+1}=\\&=\frac{1}{4}\int\frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{(2x-1)\,\mathrm{d}x}{x^2-x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\\&=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C\,,\quad x\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Příklad 12. Najděte integrál $\displaystyle\int\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{(x-1)^{100}}$.

Řešení:
Rozložme funkci $f(x)=x^3$ do Taylorovy řady se středem v bodě $x=1$. Protože je $f(1)=1$, $f'(1)=3$, $f''(1)=6$, $f'''(1)=6$ a $f^{(n)}(1)=0$ pro $n\geq4$, dostaneme $x^3=1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$. Proto je pro $x\neq1$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{(x-1)^{100}}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{100}}+3\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{99}}+3\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{98}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{97}}=\\&=-\frac{1}{99}\,\frac{1}{(x-1)^{99}}-\frac{3}{98}\,\frac{1}{(x-1)^{98}}-\frac{3}{97}\,\frac{1}{(x-1)^{97}}-\frac{1}{96}\,\frac{1}{(x-1)^{96}}+C\,.\end{aligned}$$

Příklad 13. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^8-1}$.

Řešení:
Substitucí $x^2 = y$, pro kterou je $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ dostaneme

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^8-1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^4-1} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} y + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^2 + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2-1}\right| + C\,, \quad x \neq \pm 1\,.$$

Příklad 14. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8+3}$.

Řešení:
Substitucí $x^4 = y$, pro kterou je $4x^3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ dostaneme

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8+3} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+3} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{3}} + C\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 15. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{(x^4-3)\,\mathrm{d}x}{x(x^8+3x^4+2)}$.

Řešení:
Tento integrál by bylo možné řešit přímo rozkladem na parciální zlomky. Ale tento rozklad je poměrné složitý. Jestliže si ale uvědomíme, že

$$\int \frac{(x^4-3)\,\mathrm{d}x}{x(x^8+3x^4+2)} = \int \frac{x^3(x^4-3)}{x^4(x^8+3x^4+2)}\,,$$

lze snadno nahlédnout, že je výhodná substituce $x^4 = y$. Pak je $4x^3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ a

$$\int \frac{(x^4-3)\,\mathrm{d}x}{x(x^8+3x^4+2)} = \frac{1}{4}\int \frac{(y-3)\,\mathrm{d}y}{y(y^2+3y+2)}\,.$$

Rozklad této funkce na parciální zlomky je podstatně jednodušší. Snadno se ukáže, že platí $\displaystyle\frac{y-3}{y(y^2+3y+2)} = -\frac{3}{2y} + \frac{4}{y+1} + \frac{5}{2(y+2)}$. Proto je

$$\int \frac{(x^4-3)\,\mathrm{d}x}{x(x^8+3x^4+2)} = -\frac{3}{8}\ln|y| + \ln|y+1| + \frac{5}{8}\ln|y+2| + C =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|x| + \ln|x^4+1| + \frac{5}{8}\ln|x^4+2| + C\,, \quad x \neq 0\,.$$

Jiná a možná ještě jednodušší možnost je přepsat

$$\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)} = \frac{1-3x^{-4}}{x^{-5}(1+3x^{-4}+2x^{-8})}$$

a použít substituce $x^{-4} = y$. Tento postup ukážeme v následujícím příkladě.

Příklad 16. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+2)}$.

Řešení:
Protože lze psát $\dfrac{1}{x(x^{10}+2)} = \dfrac{1}{x^6(x^5+2x^{-5})}$, je výhodné použít substituce $x^{-5} = y$. Pak je $-5\,\dfrac{\mathrm{d}x}{x^6} = \mathrm{d}y$ a

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+2)} = -\frac{1}{5}\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{1+2y^2} =$$
$$= -\frac{1}{20}\,\ln(1+2y^2) + C = -\frac{1}{20}\,\ln\frac{x^{10}+2}{x^{10}} + C\,, \quad x \neq 0\,.$$

Příklad 17. Odvoďte rekurentní vzorec pro výpočet integrálu

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}\,, \quad a \neq 0\,,\ b^2-4ac \neq 0\,.$$

Pomocí tohoto vztahu určete $I_3 = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^3}$.

Řešení:
Rekurentní vzorec lze odvodit integrací per partes. Pomocí ní dostaneme

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n} + n\int \frac{x(2ax+b)\,\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^{n+1}} = \\
&= \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n} + 2n\int \frac{(ax^2+bx+c)}{(ax^2+bx+c)^{n+1}}\,\mathrm{d}x - n\int \frac{(bx+2c)\,\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^{n+1}} = \\
&= \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n} + 2nI_n - \frac{nb}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^{n+1}} + \frac{n}{2a}\,(b^2-4ac)I_{n+1} = \\
&= \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{b}{2a}\,\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} + 2nI_n + \frac{n}{2a}\,(b^2-4ac)I_{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Tedy
$$I_{n+1} = \frac{2ax+b}{n(4ac-b^2)} \cdot \frac{x}{(ax^2+bx+c)^n} + \frac{2a}{4ac-b^2} \cdot \frac{2n-1}{n} I_n \,.$$
V našem případě je $a = b = c = 1$ a $4ac - b^2 = 3$. Proto je
$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + I_2 = \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3} I_1 = \\ &= \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \,, \end{aligned}$$
Protože je
$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \,.$$

Příklad 18. Pro výpočet integrálu $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n(x+b)^m}$, kde n a m jsou přirozená čísla, použijte substituci $t = \dfrac{x+a}{x+b}$.

Pomocí této substituce určete $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2(x+3)^3}$.

Řešení:

Substituce $t = \dfrac{x+a}{x+b}$ dává $x = \dfrac{bt-a}{1-t}$. Tedy $\mathrm{d}x = \dfrac{b-a}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t$ Protože $x + a = \dfrac{t(b-a)}{1-t}$ a $x + b = \dfrac{b-a}{1-t}$, dostaneme po dosazení
$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^n(x+b)^m} = \frac{1}{(b-a)^{n+m-1}} \int \frac{(1-t)^{n+m-2}}{t^n} \,\mathrm{d}t \,.$$
V našem případě je $a = -2$, $b = 3$, $n = 2$ a $m = 3$. Tedy
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2(x+3)^3} = \frac{1}{625} \int \frac{(1-t)^3}{t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{625} \left(-\frac{1}{t} - 3\ln|t| + 3t - \frac{t^2}{2} \right) + C \,,$$
kde $t = \dfrac{x-2}{x+3}$.

Cvičení 16 — **Integrály, které lze převést na racionální funkce**

Příklad 1. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

Řešení:
Po substituci $x = y^2$ dostaneme $\mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$ a

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{1+y} = 2\Big(y-\ln(1+y)\Big)+C = 2\Big(\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})\Big)+C\,, \quad x>0\,.$$

Příklad 2. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 je 6, použijeme substituci $x+1=y^6$. Pak je $\mathrm{d}x = 6y^5\,\mathrm{d}y$ a

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x &= 6\int \frac{y^5(1-y^3)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \\ &= 6\int\left(-y^6+y^4+y^3-y^2-y+1+\frac{y-1}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y = \\ &= -\frac{6}{7}\,y^7+\frac{6}{5}\,y^5+\frac{3}{2}\,y^4-2y^3-3y^2+6y+3\ln\big(1+y^2\big)-6\operatorname{arctg} y+C\,,\end{aligned}$$

kde $y=\sqrt[6]{x+1}$ a $x>-1$.

Příklad 3. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Tento integrál lze převést na integrál z racionální funkce substitucí $\dfrac{x-1}{x+1}=y^2$. Ale je asi jednodušší rozšířit zlomek výrazem $\big(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\big)$. Pak dostaneme

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int\big(x-\sqrt{x^2-1}\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Druhý integrál najdeme substitucí $x=\cosh y$. Pak je $\mathrm{d}x=\sinh z$ a

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \sinh^2 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\big(\cosh 2y-1\big)\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\big(\cosh y\sinh y-y\big) = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2-1}-\operatorname{argcosh} x\big)\,.\end{aligned}$$

Tedy

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(x^2 - x\sqrt{x^2-1} + \operatorname{argcosh} x\big) + C\,, \quad x > 1\,.$$

Příklad 4. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

Řešení:

V tomto integrálu zavedeme substituci $\mathrm{e}^x = y$. Pak je $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{y}$ a dostaneme integrál

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} = \int \frac{y\,\mathrm{d}y}{1+y} = \int \mathrm{d}y - \int \frac{\mathrm{d}y}{1+y} =$$
$$= y - \ln(1+y) + C = \mathrm{e}^x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 5. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-2}$.

Řešení:

Po substituci $\mathrm{e}^x = y$ dostaneme $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{y}$ a integrál je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-2} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y(y^2+y-2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}y}{y-1} + \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}y}{y+2} =$$
$$= -\frac{1}{2}\,\ln y + \frac{1}{3}\,\ln|y-1| + \frac{1}{6}\,\ln(y+2) + C =$$
$$= -\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\,\ln|\mathrm{e}^x-1| + \frac{1}{6}\,\ln(\mathrm{e}^x+2) + C\,, \quad x \neq 0\,.$$

Příklad 6. Najděte integrál $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

Nejprve bych zavedl novou proměnnou $y = \mathrm{e}^x$. Pak je $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{y}$ a z integrálu dostaneme

$$\int \sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\cdot\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}\,\mathrm{d}y\,.$$

Tento integrál převedeme na integrál z racionální lomené funkce substitucí $\dfrac{y-1}{y+1} = t^2$. Pak je $y = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ a $\mathrm{d}y = \dfrac{4t\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}$. Po dosazení dostaneme

$$\int \sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot t\cdot\frac{4t\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2} = \int \frac{4t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1-t^2)} =$$

$$= -2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \int \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -2\operatorname{arctg} t + \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$
$$= -2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}} + \ln\left(\mathrm{e}^x + \sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}\right) + C\,, \quad x > \mathrm{e}\,.$$

Příklad 7. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$.

Řešení:
Protože platí $R(\cos x, \sin x) = \dfrac{1}{(2+\cos x)\sin x} = -R(\cos x, -\sin x)$, zavedeme novou proměnnou $y = \cos x$. Pak je $-\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ a z integrálu dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x} = -\int \frac{\mathrm{d}y}{(2+y)(1-y^2)} &= \\ = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}y}{2+y} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y} - \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y} &= \\ = \frac{1}{3}\,\ln(2+y) - \frac{1}{2}\,\ln(1+y) + \frac{1}{6}\,\ln(1-y) + C &= \\ = \frac{1}{6}\,\ln\frac{(2+\cos x)^2(1-\cos x)}{(1+\cos x)^3} + C\,, \quad x \neq k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

Příklad 8. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+3\cos x}$.

Řešení:
Tento integrál převedeme na integrál z racionální funkce substitucí $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$. Pro jednoduchost složíme tuto substituci pomocí substituce $x = 2y$ a substituce $\operatorname{tg} y = t$. Po první substituci dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+3\cos x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}y}{1+3\cos^2 y - 3\sin^2 y} = \int \frac{\mathrm{d}y}{2\cos^2 y - \sin^2 y}\,.$$

Protože pro substituci $\operatorname{tg} y = t$ je $\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ a $\cos^2 y = \dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 y = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+3\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{2-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \left(\frac{1}{t+\sqrt{2}} - \frac{1}{t-\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}t &= \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}(x/2)-\sqrt{2}}\right| + C\,.\end{aligned}$$

Příklad 9. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \, \mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$.

Řešení:
Protože integrovaná funkce má vlastnost

$$R(\cos x, \sin x) = \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} = R(-\cos x, -\sin x)\,,$$

použijeme substituci $\operatorname{tg} x = t$. Protože $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ a $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, dostaneme

$$\int \frac{\sin^2 x \, \mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{t^2 \, \mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+2t^2)} = \int \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+2t^2} \right) \mathrm{d}t =$$
$$= \operatorname{arctg} t - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} t\sqrt{2} + C = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\big(\sqrt{2} \operatorname{tg} x\big) + C\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 10. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \, \mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože integrand nemá žádnou speciální symetrii, převedeme jej na integrál z racionální funkce substitucí $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$. Pak je $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ a $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Z daného integrálu po úpravách dostaneme

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = \int \frac{4t(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2(1+2t-t^2)}\,.$$

Ale tento integrál je na výpočet poměrně pracný. Proto zvolíme jinou metodu výpočtu. Snadno se přesvědčíme, že platí

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}} + \dfrac{\cos x}{\sqrt{2}} \right)} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{2} \cos\big(x - \pi/4\big)}\,.$$

Proto je výhodné použít nejprve substituci $x - \dfrac{\pi}{4} = y$. Pak dostaneme

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\cos 2y}{\cos y} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\cos y} \, \mathrm{d}y\,.$$

V tomto integrálu můžeme zřejmě použít substituci $\sin y = t$ a dostaneme

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{1-2t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) \mathrm{d}t = \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + C = \\
&= \frac{\sin\bigl(x-\pi/4\bigr)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1-\sin\bigl(x-\pi/4\bigr)}{1+\sin\bigl(x-\pi/4\bigr)} + C = \\
&= \frac{1}{2}\,(\sin x - \cos x) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-\sin x + \cos x}{\sqrt{2}+\sin x - \cos x} + C\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 11. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

Protože je $R(\cos x, \sin x) = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = R(-\cos x, -\sin x)$, lze převést tento integrál na integrál z racionální funkce substitucí $\operatorname{tg} x = t$. Protože $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, dostaneme

$$
\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2-1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t\,.
$$

Ale výpočet tohoto integrálu je poměrně složitý. Proto integrovaný výraz upravíme. Platí

$$
\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{-\cos 2x}{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x - 2}\,.
$$

V tomto integrálu je výhodná substituce $\sin 2x = t$. Pak je $2\cos 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ a integrál je

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}} \right) \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-t}{\sqrt{2}+t} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x} \right| + C\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 12. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

Protože platí vztah $R(\cos x, \sin x) = \dfrac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} = -R(-\cos x, \sin x)$, lze převést tento integrál na integrál z racionální funkce substitucí $\sin x = t$. Po této substituci z integrálu dostaneme

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1 + t^4}\,.$$

Snadno lze vidět, že integrál lze snadno řešit substitucí $t^2 = y$. Pak je $2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}y$ a platí

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \frac{1}{2}\,\operatorname{arctg} y + C = \frac{1}{2}\,\operatorname{arctg}\bigl(\sin^2 x\bigr) + C\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 13. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Řešení:
V tomto integrálu je výhodné použít Eulerovu substituci $x + \sqrt{x^2 + x + 1} = y$. Z tohoto vztahu plyne, že $x = \dfrac{y^2 - 1}{2y + 1}$. Po derivaci dostaneme $\mathrm{d}x = \dfrac{2(y^2 + y + 1)}{(2y + 1)^2}\,\mathrm{d}y$ a integrál přejde na

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= \int \frac{2(y^2 + y + 1)}{y(2y + 1)^2}\,\mathrm{d}y = \int \left(\frac{2}{y} - \frac{3}{2y + 1} - \frac{3}{(2y + 1)^2}\right)\mathrm{d}y = \\ &= 2\ln|y| - \frac{3}{2}\,\ln|2y + 1| + \frac{3}{2(2y + 1)} + C = 2\ln\bigl(x + \sqrt{x^2 + x + 1}\bigr) - \\ &\quad - \frac{3}{2}\ln\bigl(2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}\bigr) + \frac{3}{2\bigl(2x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}\bigr)} + C\,.\end{aligned}$$

Příklad 14. Najděte integrál $\displaystyle\int x\sqrt{x^2 - 2x + 2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Integrál by bylo možné řešit Eulerovou substitucí. Ale tato metoda je na výpočet dost pracná. Proto ukážeme jinou možnost řešení tohoto integrálu. Když napíšeme $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{(x - 1)^2 + 1}$, je vidět, že je vhodná substituce $x - 1 = \sinh t$. Pak dostaneme $\mathrm{d}x = \cosh t\,\mathrm{d}t$ a

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2 - 2x + 2}\,\mathrm{d}x &= \int (\sinh t + 1)\cosh^2 t\,\mathrm{d}t = \\ &= \int \sinh t \cosh^2 t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int (\cosh 2t + 1)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{3}\,\cosh^3 t + \frac{1}{2}\,(\sinh t \cosh t + t) + C =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\sinh^2 t\right)^{3/2} + \frac{1}{2}\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t} + \frac{t}{2} + C =$$
$$= \frac{1}{3}\left(x^2-2x+2\right)^{3/2} + \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\operatorname{argsinh}(x-1) + C\,.$$

Příklad 15. Najděte integrál $\displaystyle\int \sqrt{x^3+x^4}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Eulerova substituce opět vede na integraci racionální funkce, ale vzniklý integrál je jako většinou poměrně složitý. Proto použijeme opět jiné substituce. Když napíšeme

$$\sqrt{x^3+x^4} = x\sqrt{x+x^2} = x\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{(2x+1)^2-1}\,.$$

Proto je vhodné použít substituci $2x+1=\cosh t$. Pak je $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sinh t\,\mathrm{d}t$ a z integrálu dostaneme

$$\int \sqrt{x^3+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int(\cosh t-1)\sinh^2 t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{8}\int \cosh t\sinh^2 t\,\mathrm{d}t - \frac{1}{16}\int(\cosh 2t-1)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{24}\sinh^3 t - \frac{1}{16}(\sinh t\cosh t - t) + C =$$
$$= \frac{1}{24}\left((2x+1)^2-1\right)^{3/2} - \frac{1}{16}(2x+1)\sqrt{(2x+1)^2-1} - \frac{1}{16}\operatorname{argcosh}(2x+1) + C =$$
$$= \frac{1}{3}(x^2+x)^{3/2} - \frac{1}{8}(2x+1)\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{16}\operatorname{argcosh}(2x+1) + C\,.$$

Příklad 16. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Řešení:
Tento integrál lze vyřešit substitucí $1-x^2=y$. Pak je $x^2=1-y$ a $x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}y}{2}$.
Po dosazení do integrálu dostaneme

$$\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int\frac{(1-y)^2}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 2\sqrt{y} + y^{3/2}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= -\sqrt{y} + \frac{2}{3}y^{3/2} - \frac{1}{5}y^{5/2} + C = -\frac{8+4x^2+3x^4}{15}\sqrt{1-x^2} + C\,.$$

Cvičení 17 — **Výpočet určitých integrálů**

Příklad 1. Najděte integrál $\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Tento integrál najdeme integrací per partes. Platí

$$\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = \bigl[-x\cos x\bigr]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = \pi + \bigl[\sin x\bigr]_0^\pi = \pi\,.$$

Příklad 2. Najděte integrál $\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože pro $x \in (\mathrm{e}^{-1}, 1)$ je $\ln x < 0$ a pro $x \in (1, \mathrm{e})$ je $\ln x > 0$, rozdělíme integrál na dva integrály. Oba pak najdeme integrací per partes.

$$\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}} \bigl|\ln x\bigr|\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x = -\bigl[x\ln x - x\bigr]_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} + \bigl[x\ln x - x\bigr]_1^{\mathrm{e}} =$$
$$= -\bigl(-1 + \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-1}\bigr) + \bigl(\mathrm{e} - \mathrm{e} + 1\bigr) = 2\bigl(1 - \mathrm{e}^{-1}\bigr)\,.$$

Příklad 3. Najděte integrál $\int_0^1 \arccos x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Daný integrál najdeme nejsnáze integrací per partes. Platí

$$\int_0^1 \arccos x\,\mathrm{d}x = \bigl[x\arccos x\bigr]_0^1 + \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\Bigl[\sqrt{1-x^2}\Bigr]_0^1 = 1\,.$$

Příklad 4. Najděte integrál $\int_{-1}^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}$.

Řešení:
Hledaný integrál najdeme nejsnáze pomocí substituce $5 - 4x = y^2$. Pak je $\mathrm{d}x = -\frac{y}{2}\,\mathrm{d}y$, $x = \frac{5-y^2}{4}$, bod $x = -1$ přejde na bod $y = 3$ a bod $x = 1$ na bod $y = 1$. Protože jsou splněny předpoklady věty o substituci, platí

$$\int_{-1}^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}} = \int_3^1 \frac{5-y^2}{4y}\Bigl(-\frac{y}{2}\Bigr)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{8}\int_1^3 \bigl(5-y^2\bigr)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{8}\Bigl[5y - \frac{y^3}{3}\Bigr]_1^3 = \frac{1}{6}\,.$$

Příklad 5. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Daný integrál lze najít substitucí $x = a\sin t$. Pak je $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$ a obraz intervalu $(0,a)$ je $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Protože jsou splněny předpoklady věty o substituci, platí

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = a^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{a^4}{8}\int_0^{\pi/2}\bigl(1-\cos 4t\bigr)\,\mathrm{d}t = \frac{a^4}{8}\left[t-\frac{\sin 4t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{a^4\pi}{16}\,.$$

Příklad 6. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
V integrálu nejprve použijeme substituci $\mathrm{e}^x = y$. Pak je $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{y}$ a interval $(0,\ln 2)$ se zobrazí prostě na interval $(1,2)$. Protože jsou splněny předpoklady věty o substituci, platí

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^2\frac{\sqrt{y-1}}{y}\,\mathrm{d}y\,.$$

Tento integrál vyřešíme opět substitucí. Položíme $y = t^2+1$. Pak je $\mathrm{d}y = 2t\,\mathrm{d}t$ a interval $(1,2)$ se prostě zobrazí na interval $(0,1)$. Protože jsou splněny předpoklady věty o substituci, platí

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{2t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = 2\Bigl[t-\operatorname{arctg} t\Bigr]_0^1 = 2-\frac{\pi}{2}\,.$$

Příklad 7. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Daný integrál lze najít substitucí $x^2 = y$. Pak je $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ a interval $(0,1)$ se prostě zobrazí na interval $(0,1)$. Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, platí

$$\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1(2-y)^{12}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{26}\Bigl[(2-y)^{13}\Bigr]_0^1 = \frac{2^{13}-1}{26}\,.$$

Příklad 8. Najděte integrál $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$.

Řešení:
Tento integrál najdeme standardní metodou známou z výpočtu neurčitého integrálu. Platí

$$\int_{-1}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-1/2\right)^2+3/4} =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\ln\big(x^2+x+1\big)\Big]_{-1}^{1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1} = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,.$$

Příklad 9. Najděte integrál $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} (x\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Integrál snadno najdeme integrací per partes.

$$\int_{1}^{\mathrm{e}} x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\,x^3\ln^2 x\right]_{1}^{\mathrm{e}} - \frac{2}{3}\int_{1}^{\mathrm{e}} x^2\ln x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^3 - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}\,x^3\ln x\right]_{1}^{\mathrm{e}} + \frac{2}{9}\int_{1}^{\mathrm{e}} x^2\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^3 - \frac{2}{9}\,\mathrm{e}^3 + \frac{2}{27}\big(\mathrm{e}^3-1\big) = \frac{5\mathrm{e}^3-2}{27}\,.$$

Příklad 10. Najděte integrál $\displaystyle\int_{1}^{9} x\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Integrál lze najít substitucí $1-x=y^3$, tj. $x=1-y^3$. Pak je $\mathrm{d}x=-3y^2\,\mathrm{d}y$, bod $x=1$ přejde na bod $y=0$ a bod $x=9$ na bod $y=-2$. Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, platí

$$\int_{1}^{9} x\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{-2} \big(1-y^3\big)y\big(-3y^2\big)\,\mathrm{d}y = 3\int_{-2}^{0}\big(y^3-y^6\big)\,\mathrm{d}y =$$
$$= 3\left[\frac{y^4}{4}-\frac{y^7}{7}\right]_{-2}^{0} = -\frac{468}{7}\,.$$

Příklad 11. Najděte integrál $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Řešení:
Integrál lze najít například tak, že nejprve použijeme substituci $x^2 - 1 = y$. Pak je $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$, bod $x = -2$ přejde na bod $y = 3$ a bod $x = -1$ na bod $y = 0$. Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, je

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int_3^0 \frac{\mathrm{d}y}{(y+1)\sqrt{y}} = -\frac{1}{2}\int_0^3 \frac{\mathrm{d}y}{(y+1)\sqrt{y}}\,.$$

Tento integrál lze najít substitucí $y = t^2$. Pro ni je $\mathrm{d}y = 2t\,\mathrm{d}t$ a interval $(0,3)$ se prostě zobrazí na interval $\bigl(0,\sqrt{3}\bigr)$. Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, je

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = -\bigl[\operatorname{arctg} t\bigr]_0^{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{3}\,.$$

Integrál by bylo také možné řešit substitucí $x = \dfrac{1}{y}$, ale pozor na znaménka!

Příklad 12. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože je $x^{15} = x^8 \cdot x^7$ je vhodné použít nejprve substituci $x^8 = y$. Pak je $8x^7\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ a interval $(0,1)$ se prostě zobrazí na interval $(0,1)$. Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, je

$$\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^1 y\sqrt{1+3y}\,\mathrm{d}y\,.$$

Tento integrál najdeme substitucí $1 + 3y = t^2$. Pro ni je $y = \dfrac{t^2-1}{3}$, $\mathrm{d}y = \dfrac{2}{3}\,t\,\mathrm{d}t$ a interval $(0,1)$ se prostě zobrazuje na interval $(1,2)$. Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, je

$$\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{36}\int_1^2 \bigl(t^2-1\bigr)t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{36}\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{29}{270}\,.$$

Příklad 13. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože platí vztahy $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2}\bigl(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\bigr)$ a $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}\bigl(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\bigr)$ je

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}\bigl(\sin 3x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \cos 3x\bigr) = \frac{1}{4}\bigl(\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x\bigr)\,.$$

Tedy daný integrál je

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \bigl(\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x\bigr) =$$
$$= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{6} \cos 6x \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}\,.$$

Příklad 14. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože je $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}\bigl(1 + \cos 2x\bigr)$ a $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\pi} - 1$, stačí najít integrál $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 2x \,\mathrm{d}x$. Tento integrál najdeme integrací per partes.

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 2x \,\mathrm{d}x = \bigl[\mathrm{e}^x \cos 2x\bigr]_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{e}^{\pi} - 1 + 2\bigl[\mathrm{e}^x \sin 2x\bigr]_0^{\pi} - 4 \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 2x \,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{e}^{\pi} - 1 - 4 \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 2x \,\mathrm{d}x\,.$$

Z této rovnice najdeme $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 2x \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\pi} - 1}{5}$. Proto je hledaný integrál

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{\pi} - 1 + \frac{\mathrm{e}^{\pi} - 1}{5} \right) = \frac{3}{5}\bigl(\mathrm{e}^{\pi} - 1\bigr)\,.$$

Příklad 15. Najděte rekurentní vzorec pro snížení řádu v integrálu

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x\,, \quad n > 1\,.$$

Řešení:
Napíšeme $\sin^n x = \sin x \cdot \sin^{n-1} x$ a budeme integrovat per partes. Pak dostaneme

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}x =$$
$$= \Bigl[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x\Bigr]_0^{\pi/2} - (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \left(1-\sin^2 x\right)\cdot \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n\,.$$

Z tohoto vztahu snadno zjistíme, že $I_n = \dfrac{n-1}{n}\, I_{n-2}$.

Příklad 16. Najděte rekurentní vzorec pro snížení řádu v integrálu

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x\,, \quad n > 1\,.$$

Řešení:
Napíšeme $\cos^n x = \cos x \cdot \cos^{n-1} x$ a budeme integrovat per partes. Pak dostaneme

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \cos^{n-1} x \,\mathrm{d}x = \\ &= \Big[\sin x \cdot \cos^{n-1} x\Big]_0^{\pi/2} - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x = \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2 x\right)\cdot \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n\,. \end{aligned}$$

Z tohoto vztahu snadno zjistíme, že $I_n = \dfrac{n-1}{n}\, I_{n-2}$.

Příklad 17. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^2 |1-x| \,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Integrovaná funkce $f(x) = \big|1-x\big|$ je pro $x \in (0,1)$ dána předpisem $f(x) = 1-x$ a pro $x \in (1,2)$ je $f(x) = x-1$. Proto je hledaný integrál

$$\int_0^2 \big|1-x\big| \,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 = 1\,.$$

Příklad 18. Najděte integrál $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$, $0 < \alpha < \pi$.

Řešení:
Protože je $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = (x-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha$, dostaneme

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \operatorname{arctg}\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

Protože je $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ a $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}$ a pro $x > 0$ platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, je $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \frac{\pi}{2\sin\alpha}$.

Příklad 19. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože je integrovaná funkce $f(x) = \sqrt{1-\cos 2x}$ periodická s periodou $L = \pi$, platí

$$\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x = 100\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x = 100\cdot\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x =$$
$$= 100\cdot\sqrt{2}\big[-\cos x\big]_0^{\pi} = 200\cdot\sqrt{2}\,.$$

Příklad 20. Najděte derivaci $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}\right)$.

Řešení:
Protože je integrovaná funkce $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ spojitá, existuje k ní primitivní funkce $F(t)$, pro kterou platí $F'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$. Protože platí

$$\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = F\big(x^3\big) - F\big(x^2\big)\,,$$

je hledaná derivace rovna

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(F\big(x^3\big) - F\big(x^2\big)\Big) = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}\,.$$

Příklad 21. Najděte $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}$.

Řešení:

Protože je $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t = 0$, lze použít l'Hospitalovo pravidlo. Neboť platí $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t\right) = \cos x^2$, je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\cos x^2 = 1$.

Příklad 22. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } 0 \le x \le 1\,, \\ 2-x & \text{pro } 1 < x \le 2\,; \end{cases}$.

Řešení:
Protože pro $x \in (0,1)$ je $f(x) = x^2$ a pro $x \in (1,2)$ je $f(x) = 2-x$, je hledaný integrál

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6}\,.$$

Příklad 23. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože je $x - x^3 > 0$ pro $x \in (0,1)$ a $x - x^3 < 0$ pro $x \in (1,3)$, je $\operatorname{sgn}(x-x^3) = 1$ na intervalu $(0,1)$ a $\operatorname{sgn}(x-x^3) = -1$ na intervalu $(1,3)$. Proto je

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x - \int_1^3 \mathrm{d}x = -1\,.$$

Příklad 24. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^\pi x\operatorname{sgn}(\cos x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože $\cos x > 0$ pro $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ a $\cos x < 0$ pro $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, je $x\operatorname{sgn}(\cos x) = x$ pro $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ a $x\operatorname{sgn}(\cos x) = -x$ pro $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$. Hledaný integrál tedy je

$$\int_0^\pi x\operatorname{sgn}(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{d}x - \int_{\pi/2}^\pi x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\pi/2}^\pi = -\frac{\pi^2}{4}\,.$$

Příklad 25. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

Doposud jsme u všech počítaných určitých integrálů mohli najít primitivní funkci a pak použít Newton–Leibnizovu formuli. Ale u tohoto integrálu primitivní funkci pomocí elementárních funkcí najít nelze. Přesto je možné tento integrál najít. Jestliže totiž použijeme substituci $\frac{\pi}{4} - x = y$, dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x &= -\int_{\pi/4}^{0} \ln\Big(1 + \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4} - y\Big)\Big)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1 + \operatorname{tg} x}\right)\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\pi/4} \Big(\ln 2\,\mathrm{d}x - \ln(1 + \operatorname{tg} x)\Big)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{\pi}{4}\,\ln 2 - \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Z tohoto vztahu již snadno dostaneme $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\,\ln 2$.
Všimněte si toho, že v obecných mezích bychom tento integrál nespočítali.

Cvičení 18 — **Použití určitých integrálů**

Příklad 1. Najděte obsah obrazce omezeného parabolou $y = 2x - x^2$ a přímkou $x + y = 0$.

Řešení:

Dané křivky se protínají v bodech, pro které platí $-x = 2x - x^2$, tj. v bodech $x = 0$ a $x = 3$. Protože pro $0 \le x \le 3$ platí $-x \le 2x - x^2$, je hledaný obsah obrazce roven

$$\int_0^3 \big(2x - x^2 + x\big)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3\right]_0^3 = \frac{9}{2}\,.$$

Příklad 2. Najděte obsah obrazce omezeného přímkou $y = x$ a křivkou $y = x + \sin^2 x$, kde $0 \le x \le \pi$.

Řešení:

Protože je $x \le x + \sin^2 x$ je obsah obrazce roven

$$\int_0^\pi \big(x + \sin^2 x - x\big)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(1 - \cos 2x\big) = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}\,.$$

Příklad 3. Najděte obsah elipsy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Řešení:

Vnitřek elipsy je omezen funkcemi $y = \pm\dfrac{b}{a}\,\sqrt{a^2 - x^2}$, kde $-a < x < a$. Proto je obsah elipsy P pomocí integrálu dán vztahem

$$P = \int_{-a}^a 2\frac{b}{a}\,\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

Tento integrál najdeme substitucí $x = a\sin t$. Pak je $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$ a interval $(-a, a)$ se prostě zobrazí na interval $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, je

$$P = 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(1 + \cos 2t\big)\,\mathrm{d}t = ab\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi ab\,.$$

Příklad 4. Najděte obsah obrazce omezeného křivkou $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$, kde $x \ge 0$.

Řešení:

Obrazec je omezen funkcemi $y = \pm x\sqrt{a^2 - x^2}$, kde $0 \le x \le a$. Proto je obsah P daného obrazce dán integrálem

$$P = \int_0^a 2x\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Tento integrál najdeme substitucí $a^2 - x^2 = y$. Pak je $2x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}y$, bod $x = 0$ přejde na bod $y = a^2$ a bod $x = a$ na bod $y = 0$. Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, je

$$P = \int_0^a 2x\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{a^2}^0 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = -\frac{2}{3}\Big[y^{3/2}\Big]_{a^2}^0 = \frac{2}{3}\,a^3\,.$$

Příklad 5. Najděte délku oblouku křivky $y = x^{3/2}$, kde $0 \le x \le 4$.

Řešení:

Protože je $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$, je délka s daného oblouku dána integrálem

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}\,x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Tento integrál najdeme substitucí $1 + \dfrac{9}{4}\,x = t$. Pak je $\mathrm{d}x = \dfrac{4}{9}\,\mathrm{d}t$ a interval $(0,4)$ se prostě zobrazí na interval $(1,10)$. Protože jsou splněny všechny předpoklady věty o substituci, je

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}\,x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}\int_1^{10} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{8}{27}\Big[t^{3/2}\Big]_1^{10} = \frac{8}{27}\big(10\sqrt{10} - 1\big)\,.$$

Příklad 6. Najděte délku oblouku křivky $x = \dfrac{1}{4}\,y^2 - \dfrac{1}{2}\,\ln y$, kde $1 \le y \le \mathrm{e}$.

Řešení:

Protože je $x' = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{y^2 - 1}{2y}$ a $\sqrt{\big(x'\big)^2 + 1} = \dfrac{y^2 + 1}{2y}$, je délka s daného oblouku dána integrálem

$$s = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{y^2 + 1}{2y}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{4} + \frac{1}{2}\,\ln y\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}\,.$$

Příklad 7. Najděte délku oblouku křivky dané parametrickými rovnicemi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, kde $0 \le t \le 2\pi$.

Řešení:
Délka s oblouku křivky dané parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ je dána integrálem $s = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$, kde $\dot{x}(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ a $\dot{y}(t) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.
V našem případě je $\dot{x} = a(1 - \cos t)$, $\dot{y} = a \sin t$ a $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|$. Protože pro $t \in (0, 2\pi)$ je $\sin\dfrac{t}{2} > 0$, je délka s daného oblouku rovna

$$s = \int_0^{2\pi} 2a \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = -4a\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a\,.$$

Příklad 8. Najděte délku oblouku křivky dané parametrickými rovnicemi $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, kde $0 \le t \le 2\pi$.

Řešení:
Délka s oblouku křivky dané parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ je dána integrálem $s = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$, kde $\dot{x}(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ a $\dot{y}(t) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.
V našem případě je $\dot{x} = at\cos t$, $\dot{y} = at \sin t$ a $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = at$. Tedy délka s daného oblouku je rovna

$$s = \int_0^{2\pi} at\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\left[t^2\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 a\,.$$

Příklad 9. Najděte objem komolého kužele, jehož základny jsou elipsy s poloosami A, B a a, b a který má výšku h.

Řešení:
Jestliže rozdělíme kužel na elementární vrstvy rovinami kolmými k ose Oz, které mají šířku $\mathrm{d}z$, je elementární objem $\mathrm{d}V$ takové vrstvy roven $\mathrm{d}V = S(z)\,\mathrm{d}z$, kde $S(z)$ je obsah kolmého řezu ve výšce z. Proto je objem V tělesa mezi rovinami z_1 a z_2 roven $V = \displaystyle\int_{z_1}^{z_2} S(z)\,\mathrm{d}z$.
V našem případě je $S(z) = \pi a(z) b(z)$, kde $a(z)$ a $b(z)$ jsou poloosy elipsy, která je řezem kužele ve výšce z. Jestliže pro $z = 0$ je $a(z) = A$, $b(z) = B$ a pro $z = h$ je $a(z) = a$, $b(z) = b$, jsou v obecné výšce $z \in \langle 0, h\rangle$ poloosy dány vztahem $a(z) = A + \dfrac{z}{h}(a - A)$ a $b(z) = B + \dfrac{z}{h}(b - B)$. Hledaný objem V je tedy dán integrálem

$$V = \frac{\pi}{h^2}\int_0^h \big(Ah + (a - A)z\big)\big(Bh + (b - B)z\big)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{6}\,h\big((2A + a)B + (2a + A)b\big)\,.$$

Příklad 10. Najděte objem rotačního paraboloidu, jehož základna má obsah S a jehož výška je h.

Řešení:

Objem tělesa lze určit pomocí integrálu $V = \displaystyle\int_{z_1}^{z_2} S(z)\,\mathrm{d}z$, kde $S(z)$ je obsah řezu kolmého na osu Oz. Protože v našem případě jde o rotační těleso, je $S(z) = \pi r^2(z)$, kde $r(z)$ je poloměr kruhu, který je kolmým řezem k ose OZ ve výšce z. Křivka, jejíž rotací vzniká rotační paraboloid, je parabola. Jestliže její vrchol zvolíme v počátku souřadnic, pak je její rovnice $y = ar^2$, kde a je konstanta. Protože pro $z = h$ je $S = \pi r^2(h) = \dfrac{\pi h}{a}$, dostaneme $a = \dfrac{\pi h}{S}$. Pak ale je $z = \dfrac{\pi h}{S}\,r^2$, a tedy $S(z) = \dfrac{S}{h}\,z$. Z toho plyne, že objem V daného rotačního paraboloidu je

$$V = \int_0^h \frac{s}{h}\,z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\,Sh\,.$$

Příklad 11. Najděte objem elipsoidu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Řešení:

Objem V elipsoidu určíme pomocí integrálu $V = \displaystyle\int_{-c}^{c} S(z)\,\mathrm{d}z$, kde $S(z) = \pi a(z)b(z)$, $a(z)$ a $b(z)$ jsou poloosy elipsy, která je kolmým řezem k ose Oz daného elipsoidu ve výšce z. Protože

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} \Longrightarrow \frac{c^2}{a^2\bigl(c^2 - z^2\bigr)}\,x^2 + \frac{c^2}{b^2\bigl(c^2 - z^2\bigr)}\,y^2 = 1\,,$$

jsou poloosu $a(z) = \dfrac{a\sqrt{c^2 - z^2}}{c}$ a $b(z) = \dfrac{b\sqrt{c^2 - z^2}}{c}$. Tedy $S(z) = \dfrac{\pi ab}{c^2}\bigl(c^2 - z^2\bigr)$. Z toho plyne, že objem V daného elipsoidu je

$$V = \frac{\pi ab}{c^2}\int_{-c}^{c}\bigl(c^2 - z^2\bigr)\,\mathrm{d}z = \frac{4}{3}\,\pi abc\,.$$

Příklad 12. Dokažte, že objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce $0 \le a \le x \le b$, $0 \le y \le y(x)$, kde $y(x)$ je spojitá funkce, kolem osy Oy, je roven

$$V_y = 2\pi\int_a^b xy(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení:

Úsečku ab rozdělíme na elementární úseky délky Δx. Rotací úsečky $0 \le y \le y(x)$ pro pevné $x \in \langle a, b\rangle$ vznikne válcová plocha s obsahem $S(x) = 2\pi x y(x)$. Objem elementárního válce tedy je $\Delta V(x) = 2\pi x y(x)\Delta x$. Protože funkce $xy(x)$ je podle předpokladu spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, dostaneme po sečteni pro $\Delta x \to 0$, že $V_y = 2\pi \int_a^b xy(x)\,\mathrm{d}x$.

Příklad 13. Najděte objem tělesa omezeného plochou, která vznikne rotací křivky $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$: a) kolem osy Ox; b) kolem osy Oy.

Řešení:

V případě a) rotuje křivka $z = \sin x$, $x \in \langle 0, \pi\rangle$ kolem osy Ox. Jestliže tedy rozdělíme interval $\langle 0, \pi\rangle$ na elementární úseky Δx, je elementární objem těchto úseků roven $\Delta V = \pi y^2 \Delta x.$. Proto je v tomto případě objem

$$V_x = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \bigl(1 - \cos 2x\bigr)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}\,.$$

V případě b) rotuje křivka kolem osy Oy. Podle příkladu 12. je tedy objem V_y roven

$$V_y = 2\pi \int_0^\pi x \sin x\,\mathrm{d}x = 2\pi\bigl[-x\cos x\bigr]_0^\pi + 2\pi\int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = 2\pi^2\,.$$

Příklad 14. Najděte obsah plochy, která vznikne rotací křivky $y = x\sqrt{\dfrac{x}{a}}$, $0 \le x \le a$, kolem osy Ox.

Řešení:

Jestliže rotuje spojitá funkce $y = y(x) \ge 0$, $x \in \langle a, b\rangle$, kolem osy Ox, můžeme rozdělit tento interval na elementární úseky Δx. Velikost elementární plochy, která vznikne rotací této části křivky je přibližně rovna $\Delta S(x) = 2\pi y(x)\sqrt{1 + \bigl(y'\bigr)^2}\Delta x$. Tedy po sečtení a přechodu k limitě $\Delta x \to 0$ dostaneme

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \bigl(y'\bigr)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

V našem případě je $y = \dfrac{x^{3/2}}{\sqrt{a}}$, $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{a}}$, a tedy

$$S = 2\pi \int_0^a \frac{x^{3/2}}{\sqrt{a}}\sqrt{1 + \frac{9x}{4a}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Po substituci $\dfrac{9}{4a}\,x = z$ dostaneme $x = \dfrac{4a}{9}\,z$, $\mathrm{d}x = \dfrac{4a}{9}\,\mathrm{d}z$ a

$$S = \frac{64}{243}\,\pi a^2 \int_0^{9/4} z^{3/2}\sqrt{1+z}\,\mathrm{d}z\,.$$

Musíme tedy najít integrál $\displaystyle\int_0^{9/4} z^{3/2}\sqrt{1+z}\,\mathrm{d}z$. Mohli bychom použít některou z Eulerových substitucí a tento integrál převést na integrál z racionální funkce (zkuste to). Použijeme ale jinou metodu. Integrand napíšeme ve tvaru

$$z^{3/2}\sqrt{z+1} = z\sqrt{z^2+z} = z\sqrt{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{z}{2}\sqrt{(2z+1)^2-1}$$

a použijeme substituci $2z+1=t$. Pak je $z = \dfrac{t-1}{2}$, $\mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}t}{2}$, bod $z=0$ přejde na bod $t=1$ a bod $z=\dfrac{9}{4}$ na bod $t=\dfrac{11}{2}$. Pak dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^{9/4} z^{3/2}\sqrt{1+z}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{8}\int_1^{11/2}(t-1)\sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{8}\int_1^{11/2} t\sqrt{t^2-1} - \frac{1}{8}\int_1^{11/2}\sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

V prvním z těchto integrálů zavedeme substituci $t^2-1=u$. Po této substituci získáme

$$\frac{1}{8}\int_1^{11/2} t\sqrt{t^2-1} = \frac{1}{16}\int_0^{117/4}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{24}\Big[u^{3/2}\Big]_0^{117/4} = \frac{117}{64}\,\sqrt{13}\,.$$

Ve druhém integrálu $\displaystyle\frac{1}{8}\int_1^{11/2}\sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ zavedeme novou proměnnou u vztahem $t=\cosh u$. Pak je $\mathrm{d}t = \sinh u\,\mathrm{d}u$ a z integrálu dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\int_1^{11/2}\sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{8}\int_0^{\operatorname{argcosh}(11/2)}\sinh^2 u\,\mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{16}\int_0^{\operatorname{argcosh}(11/2)}(\cosh 2u - 1)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{16}\Big[\sinh u\cosh u - u\Big]_0^{\operatorname{argcosh}(11/2)} = \\ &= \frac{33}{128}\,\sqrt{13} - \frac{1}{16}\,\ln\frac{3\sqrt{13}+11}{2}\,,\end{aligned}$$

protože $\operatorname{argcosh} u = \ln\big(u+\sqrt{u^2-1}\big)$. Tedy hledaný integrál je

$$\int_0^{9/4} z^{3/2}\sqrt{1+z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{16}\left(21\sqrt{13} + \ln\frac{3\sqrt{13}+11}{2}\right)$$

a obsah dané rotační plochy je

$$S = \frac{4\pi}{243}\, a^2 \left(21\sqrt{13} + \ln \frac{3\sqrt{13}+11}{2} \right).$$

Příklad 15. Najděte obsah plochy, která vznikne rotací křivky $y = \operatorname{tg} x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$, kolem osy Ox.

Řešení:

Protože $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, určíme, jak jsme ukázali v předchozím případě, obsah dané rotační plochy pomocí integrálu

$$S = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}}\, \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^4 x + 1}{\cos^3 x}\, \sin x \, \mathrm{d}x \,.$$

Tento integrál je výhodné řešit substitucí $\cos^2 x = z$. Pak je $-2\cos x \sin x = \mathrm{d}z$ a získáme pro obsah S integrál

$$S = \pi \int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}\, \mathrm{d}t \,.$$

V tomto integrálu zavedeme novou proměnnou t vztahem $z = \sinh t$. Protože $\sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t$ a $\mathrm{d}z = \cosh t \, \mathrm{d}t$, dostaneme vztah

$$\begin{aligned} S =& \pi \int_{\operatorname{argsinh}(1/2)}^{\operatorname{argsinh} 1} \frac{\cosh^2 t}{\sinh^2 t}\, \mathrm{d}t = \pi \int_{\operatorname{argsinh}(1/2)}^{\operatorname{argsinh} 1} \frac{\sinh^2 t + 1}{\sinh^2 t}\, \mathrm{d}t = \\ &= \pi \int_{\operatorname{argsinh}(1/2)}^{\operatorname{argsinh} 1} \left(1 + \frac{1}{\sinh^2 t} \right) \mathrm{d}t == \pi \left[t - \frac{\cosh t}{\sinh t} \right]_{\operatorname{argsinh}(1/2)}^{\operatorname{argsinh} 1} = \\ &= \pi \left(\ln\bigl(1+\sqrt{2}\bigr) - \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{2} + \sqrt{5} \right) = \pi \left(\ln \frac{2\bigl(1+\sqrt{2}\bigr)}{1+\sqrt{5}} + \sqrt{5} - \sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

Příklad 16. Najděte obsah plochy, která vznikne rotací křivky $y^2 = 2px$, $0 \le x \le x_0$: a) kolem osy Ox; b) kolem osy Oy.

Řešení:

V případě a) určíme obsah plochy S integrálem $S = 2\pi \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + \bigl(y'\bigr)^2}\, \mathrm{d}x$. Protože v tomto případě stačí uvažovat $y \ge 0$, lze psát $y = \sqrt{2px}$. Pak je $y' = \sqrt{\dfrac{p}{2x}}$. Obsah dané plochy tedy najdeme pomocí integrálu

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{x_0} \sqrt{2px} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, \mathrm{d}x = 2\pi\sqrt{p} \int_0^{x_0} \sqrt{2x+p}\, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{3}\, \pi \sqrt{p} \Bigl[(2x+p)^{3/2} \Bigr]_0^{x_0} = \frac{2}{3} \left((2x_0 + p)\sqrt{2px_0 + p^2} - p^2 \right). \end{aligned}$$

V případě b) je obsah plochy S dán integrálem $S = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1+\left(x'\right)^2}\,\mathrm{d}y$. Protože $x = \dfrac{y^2}{2p}$, $-\sqrt{2px_0} \le y \le \sqrt{2px_0}$ a $x' = \dfrac{y}{p}$, je v tomto případě obsah ploch S roven integrálu

$$S = 2\pi \int_{-\sqrt{2px_0}}^{\sqrt{2px_0}} \frac{y^2}{2p}\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{2\pi}{p}\int_0^{\sqrt{2px_0}} y^2\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,\mathrm{d}y\,.$$

Jestliže zavedeme novou proměnnou t substitucí $y = p\sinh t$ a označíme-li $a = \operatorname{argsinh}\sqrt{\dfrac{2x_0}{p}} = \ln\dfrac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{2x_0+p}}{\sqrt{p}}$, dostaneme po jednoduchých úpravách

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi p^2 \int_0^a \sinh^2 t\cosh^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi p^2}{4}\int_0^a (\cosh 4t - 1)\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{\pi p^2}{4}\Big[\sinh t\cosh t\big(\cosh^2 t + \sinh^2 t\big) - t\Big]_0^a = \\
&= \frac{\pi p^2}{4}\left(\sqrt{\frac{2x_0}{p}}\sqrt{\frac{2x_0}{p}+1}\left(\frac{4x_0}{p}+1\right) - \ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{2x_0+p}}{\sqrt{p}}\right) = \\
&= \frac{\pi}{4}\left((4x_0+p)\sqrt{2x_0(2x_0+p)} - \ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{2x_0+p}}{\sqrt{p}}\right).
\end{aligned}$$

Příklad 17. Najděte obsah plochy, která vznikne rotací křivky $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, $b \ge a$ kolem osy Ox.

Řešení:

Jestliže je křivka, jejíž rotací kolem osy Ox vzniká rotační plocha, dána parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, lze obsah S rotační plochy vyjádřit integrálem

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ a $\dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

V našem případě lze napsat parametrické rovnice křivky ve tvaru $x = a\cos t$, $y = b + a\sin t$, $t \in (0, 2\pi)$. Tedy obsah dané rotační plochy je

$$S = 2\pi a \int_0^{2\pi} (b - a\sin t)\,\mathrm{d}t = 2\pi a\big[bt + a\cos t\big]_0^{2\pi} = 4\pi^2 ab\,.$$

Příklad 18. Určete souřadnice těžiště kruhového oblouku: $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $|\varphi| \le \alpha \le \pi$.

Řešení:
Souřadnice těžiště křivky určíme ze vztahů $x_T = \dfrac{S_x}{s}$, $y_T = \dfrac{S_y}{s}$, kde s je délka křivky a S_x, resp. S_y jsou statické momenty křivky vzhledem k osám Oy, resp. Ox. Pro křivku zadanou parametrickými rovnicemi $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$, $\varphi \in \big(\varphi_1, \varphi_2\big)$, rovna $s = \displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\dot{x}^2(\varphi) + \dot{y}^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi$ a

$$S_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} x(\varphi)\sqrt{\dot{x}^2(\varphi) + \dot{y}^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi\,, \quad S_y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} y(\varphi)\sqrt{\dot{x}^2(\varphi) + \dot{y}^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

V našem případě tedy je $s = \displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} a\,\mathrm{d}\varphi = 2a\alpha$, $S_x = \displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} a^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2a^2\sin\alpha$ a $S_y = \displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} a^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0$. Tedy souřadnice těžiště daného kruhového oblouku jsou $x_T = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\,a$, $y_T = 0$.

Příklad 19. Určete souřadnice těžiště oblasti omezené parabolami $ax = y^2$ a $ay = x^2$, $a > 0$.
Řešení:
Souřadnice těžiště rovinného obrazce určíme ze vztahů $x_T = \dfrac{S_x}{S}$, $y_T = \dfrac{S_y}{S}$, kde S je velikost ploch rovinného obrazce a S_x, resp. S_y jsou statické momenty tohoto obrazce vzhledem k osám Oy, resp. Ox.
Jestliže je rovinný obrazec dán nerovnostmi $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $x_1 \le x \le x_2$, kde $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou funkce proměnné x, je $S = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \big(y_2(x) - y_1(x)\big)\,\mathrm{d}x$ a

$$S_x = \int_{x_1}^{x_2} x\big(y_2(x) - y_1(x)\big)\,\mathrm{d}x\,,$$
$$S_y = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y_2(x) + y_1(x)}{2}\big(y_2(x) - y_1(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y_2^2(x) - y_1^2(x)}{2}\,\mathrm{d}x\,.$$

V našem se hraniční křivky protínají v bodech, ve kterých platí $ax = y^2$ a $ay = x^2$. Z těchto rovnic dostaneme $x_1 = 0$ a $x_2 = a$. Protože pro $x \in (0, a)$ je $\dfrac{x^2}{a} < \sqrt{ax}$, je $y_1(x) = \dfrac{x^2}{a}$ a $y_2(x) = \sqrt{ax}$. Tedy

$$S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\sqrt{a}x^{3/2} - \frac{x^3}{3a}\right]_0^a = \frac{a^2}{3}$$
$$S_x = \int_0^a x\left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{5}\sqrt{a}x^{5/2} - \frac{x^4}{4a}\right]_0^a = \frac{3}{20}a^3$$

$$S_y = \int_0^a \frac{{}^3ax - x^4}{2a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^2}{2}a^3 - \frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{3}{20}a^3\,.$$

Tedy souřadnice těžiště daného obrazce jsou $x_T = y_T = \dfrac{9}{20}\,a$.

Příklad 20. Určete souřadnice těžiště oblasti $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$, $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

Řešení:

V tomto případě je $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x_1 = 0$ a $x_2 = a$. Tedy

$$\begin{aligned} S &= \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \\ S_x &= \frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \\ S_y &= \frac{b^2}{2a^2}\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

První integrál najdeme substitucí $x = a\sin t$. Po ní dostaneme

$$S = ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2} \big(1 + \cos 2t\big)\,\mathrm{d}t = \frac{ab}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\,ab\,.$$

Druhý integrál lze nají substitucí $a^2 - x^2 = t$. Pak dostaneme

$$S_x = \frac{b}{2a}\int_0^{a^2} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{b}{3a}\Big[t^{3/2}\Big]_0^{a^2} = \frac{1}{3}\,a^2 b\,.$$

A konečně pro třetí integrál dostaneme

$$S_y = \frac{b^2}{2a^2}\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2a^2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{1}{3}\,ab^2\,.$$

Tedy souřadnice těžiště jsou $x_T = \dfrac{4}{3\pi}\,a$ a $y_T = \dfrac{4}{3\pi}\,b$.

Příklad 21. Určete těžiště homogenní polokoule s poloměrem a.

Řešení:

Souřadnice tělesa jsou dány vztahy $x_T = \dfrac{S_x}{V}$, $y_T = \dfrac{S_y}{V}$ a $z_T = \dfrac{S_z}{V}$, kde V je objem tělesa a S_x, S_y, resp. S_z jsou statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám Oyz, Oxz, resp. Oxy. Jestliže je průmět tělesa na osu Ox interval $\langle x_1, x_2\rangle$, rozdělíme tento interval na elementární úsek Δx. Pak je elementární statický moment $\Delta S_x =$

$xS(x)\Delta x$, kde $S(x)$ je plocha průřezu kolmého k ose Ox v místě x. Po sečtení a přechodem k limitě $\Delta x \to 0$ dostaneme $S_x = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} xS(x)\,\mathrm{d}x$. Podobně zjistíme, že $S_y = \displaystyle\int_{y_1}^{y_2} yS(y)\,\mathrm{d}y$ a $S_z = \displaystyle\int_{z_1}^{z_2} zS(z)\,\mathrm{d}z$.

V našem případě je $S(x) = \dfrac{\pi}{2}\,r^2(x) = \dfrac{\pi}{2}\big(a^2 - x^2\big)$, $S(y) = \dfrac{\pi}{2}\,r^2(y) = \dfrac{\pi}{2}\big(a^2 - y^2\big)$, $S(z) = \pi r^2(z) = \pi\big(a^2 - z^2\big)$ a $x_1 = y_1 = -a$, $z_1 = 0$ a $x_2 = y_2 = z_2 = a$. Pro objem dostaneme

$$V = \pi \int_0^a \big(a^2 - z^2\big)\,\mathrm{d}z = \pi\left[a^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}\,\pi a^3\,.$$

Pro statické momenty pak dostaneme

$$\begin{aligned}
S_x &= \frac{\pi}{2}\int_{-a}^{a} x\big(a^2 - x^2\big)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-a}^{a} = 0\\
S_y &= \frac{\pi}{2}\int_{-a}^{a} y\big(a^2 - y^2\big)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\left[\frac{a^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_{-a}^{a} = 0\\
S_z &= \pi\int_{0}^{a} z\big(a^2 - z^2\big)\,\mathrm{d}z = \pi\left[\frac{a^2z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right]_{0}^{a} = \frac{\pi}{4}\,a^4\,.
\end{aligned}$$

Tedy souřadnice těžiště jsou $x_T = y_T = 0$ a $z_T = \dfrac{3}{8}\,a$.

Příklad 22. Jakou práci je třeba vykonat, abychom roztáhli pružinu o 10 cm, jestliže silou 10 kN roztáhneme tuto pružinu o 1 cm?

Řešení:

Jestliže působíme silou $F(x)$ po úsečce $\big\langle x_1, x_2\big\rangle$ rovnoběžné se směrem síly F, vykonáme práci $A = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x$. Pro pružinu je síla $F(x)$ úměrná výchylce x z její rovnovážné polohy, tj. $F(x) = kx$, kde k je konstanta (tuhost pružiny). Tedy pro pružinu je práce rovna $A = \displaystyle\int_0^x k\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{k}{2}\,x^2$.

Protože ze zadání úlohy plyne, že $k = \dfrac{F}{x} = 1000\,\mathrm{kN/m}$ je práce, kterou musíme vykonat rovna $A = 5\,\mathrm{kJ}$.

Příklad 23. Válec o průměru 20 cm a délky 80 cm je naplněn parou pod tlakem $100\,\mathrm{kN/cm^2}$. Jakou práci je třeba vykonat, abychom zmenšili objem páry dvakrát, jestliže předpokládáme, že teplota je konstantní?

Řešení:

Práci, kterou musíme vykonat při stačení plynu z objemu V_1 na objem V_2 je rovna $A = -\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$, kde p je tlak plynu. Pro izotermický proces v ideálním plynu je $pV = C = \text{konst.}$ Tedy práce je $A = -C\int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = C\ln\frac{V_1}{V_2}$.

V našem případě je $V_1 = 8\pi\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$, $p_1 = 10^9\,\mathrm{Nm}^{-2}$ a $V_2 = \frac{1}{2}V_1$. Konstanta $C = p_1V_1 = 8\pi\cdot 10^6\,\mathrm{J}$. Tedy musíme vykonat práci $A = 8\pi\ln 2\cdot 10^6\,\mathrm{J} \doteq 17.42\cdot 10^6\,\mathrm{J}$.

Příklad 24. Určete tlak vody na svislou stěnu, která má tvar půlkruhu s poloměrem a a jejíž průměr je na povrchu hladiny.

Řešení:

Tlak vody v hloubce y pod hladinou je $p = \rho g y$, kde ρ je hustota vody a g je gravitační zrychlení. Jestliže rozdělíme půlkruh na úseky šířky Δy, které jsou kolmé na osu Oy a jejichž délka je $2\sqrt{a^2-y^2}$, bude na takový úsek působit síla $\Delta F(y) = \rho g y\sqrt{a^2-y^2}\Delta y$. Jestliže sečteme tyto elementární síly a přejdeme k limitě $\Delta y \to 0$, dostaneme pro sílu F vztah

$$F = 2\rho g\int_0^a y\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Tento integrál najdeme substitucí $a^2 - y^2 = t$. Pak snadno zjistíme, že

$$F = \rho g\int_0^{a^2}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\rho g\left[t^{3/2}\right]_0^{a^2} = \frac{2}{3}\rho g a^3\,.$$

Příklad 25. Určete tlak vody na svislou stěnu, která má tvar lichoběžníka, jehož dolní základna je $a = 10\,\mathrm{m}$, horní $b = 6\,\mathrm{m}$ a výška $h = 5\,\mathrm{m}$, jestliže je dolní základna ponořena v hloubce $c = 20\,\mathrm{m}$.

Řešení:

Tlak kapaliny v hloubce y je dán vztahem $p = \rho g y$, kde ρ je hustota kapaliny a g je gravitační zrychlení. Síla, která působí na úsek délky $\ell(y)$ kolmé k ose Oy a šířky Δy v hloubce y je tedy $\Delta F = \rho g y\ell(y)\Delta y$. V našem případě je $\ell(y) = \frac{4}{5}y - 6$. Jestliže sečteme všechny tyto síly a přejdeme k limitě $\Delta y \to 0$ dostaneme

$$F = \rho g\int_{15}^{20} y\left(\frac{4}{5}y - 6\right)\mathrm{d}y = \rho g\left[\frac{2}{15}y^3 - 3y^2\right]_{15}^{20} = \frac{2125}{3}\rho g\,.$$

Příklad 26. Bod M se pohybuje ve směru osy Ox se zrychlením $a = \mathrm{e}^{-t}$. V čase $t = 0$ nachází v místě $x = 0$ a má rychlost $v = v_0$. Určete rychlost a polohu bodu M v čase t.

Řešení:
Podle definice je rychlost $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ a zrychlení $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Tedy máme nají funkce $v(t)$ a $x(t)$ takové, že $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-t}$ a $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(t)$.
Funkci $v(t)$ najdeme jako integrál $v(t) = \displaystyle\int a(t)\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t} + C_1$, kde C_1 je konstanta. Protože rychlost v čase $t = 0$ je $v(0) = v_0$, je konstanta $C_1 = v_0 + 1$. Tedy rychlost bodu M v čase t je $v(t) = v_0 + 1 - \mathrm{e}^{-t}$.
Funkci $x(t)$ najdeme jako integrál $x(t) = \displaystyle\int v(t)\,\mathrm{d}t = \int \bigl(v_0 + 1 - \mathrm{e}^{-t}\bigr)\,\mathrm{d}t = v_0 t + t + \mathrm{e}^{-t} + C_2$, kde C_2 je konstanta. Protože v čase $t = 0$ je $x(0) = 0$, je konstanta $C_2 = -1$. Tedy v čase t je poloha bodu M $x(t) = v_0 t + t + \mathrm{e}^{-t} - 1$.

Příklad 27. Homogenní koule s poloměrem R a hustotou ρ se otáčí kolem svého průměru s úhlovou rychlostí ω. Určete kinetickou energii koule.
Řešení:
Rychlost pohybu bodu koule závisí pouze na vzdálenosti r od osy rotace a je rovna $v = r\omega$. Rozdělme interval $(0, R)$ na dílky délky Δr. Rychlost bodů v intervalu $(r, r + \Delta r)$ bude přibližně rovna $v(r) = r\omega$. Obsah mezikruží mezi r a $r + \Delta r$ je rovna $\pi\bigl((r + \Delta r)^2 - r^2\bigr) \approx 2\pi r \Delta r$. Výška v bodě r je rovna $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. Tedy hmotnost této malé oblasti je $\Delta m \approx 4\rho\pi r\sqrt{R^2 - r^2}\Delta r$. Protože se všechny body této malé oblasti pohybují přibližně stejnou rychlostí $v = r\omega$, je kinetická energie této malé oblasti přibližně rovna $\Delta T = \dfrac{1}{2} v^2 \Delta m = 2\pi\rho\omega^2 r^3 \sqrt{R^2 - r^2}\Delta r$. Jestliže všechny tyto příspěvky od takových malých oblastí sečteme a přejdeme k limitě $\Delta r \to 0$, dostaneme pro kinetickou energii vztah

$$T = 2\pi\rho\omega^2 \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2}\,\mathrm{d}r\,.$$

Při přesných úvahách by bylo třeba používat věty o střední hodnotě, ale výsledek by byl stejný. Integrál lze řešit substitucí $R^2 - r^2 = t$. Po této substituci získáme

$$T = \pi\rho\omega^2 \int_0^{R^2} \bigl(R^2 - t\bigr)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \pi\rho\omega^2 \left[\frac{2}{3}\, r^2 t^{3/2} - \frac{2}{5}\, t^{5/2}\right]_0^{R^2} = \frac{4}{15}\,\pi\rho\omega^2 R^5\,.$$

Příklad 28. Jakou silou přitahuje nekonečná hmotná přímka s konstantní lineární hustotou μ hmotný bod hmotnosti m, který je ve vzdálenosti a od této přímky?
Řešení:
Síla $\mathbf{F}_{12}$, kterou přitahuje hmotný bod s hmotností m_1, který je v bodě $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, hmotný bod s hmotností m_2, který se nachází v bodě $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, je podle Newtonova gravitačního zákona rovna

$$\mathbf{F}_{12} = k m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\bigl|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\bigr|^3}\,,$$

kde k je gravitační konstanta.
Jestliže ztotožníme osu Ox s hmotnou přímkou a hmotný bod m umístíme do bodu $[0;a;0]$, bude malá úsečka $(x, x+\Delta x)$ působit na hmotný bod m silou se složkami

$$\Delta F_x = km\mu \frac{x\Delta x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\,, \quad \Delta F_y = -km\mu \frac{a\Delta x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\,, \quad \mathrm{d}F_z = 0\,.$$

Po sečtení jednotlivých příspěvků a přechodem k limitě $\Delta x \to 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} F_x &= km\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = 0 \\ F_y &= -km\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} \\ F_z &= 0\,. \end{aligned}$$

Integrál pro F_y najdeme například substitucí $x = a\sinh t$. Pak dostaneme

$$F_y = -\frac{km\mu}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh^2 t} = -\frac{km\mu}{a}\left[\frac{\sinh t}{\cosh t}\right]_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{2k}{a}\,m\mu\,.$$

Příklad 29. Určete jakou silou přitahuje kruhová deska s poloměrem a a konstantní plošnou hustotou δ hmotný bod P hmotnosti m, který se nachází na kolmici k rovině desky, která prochází jejím středem Q, ve vzdálenosti b od bodu Q.

Řešení:
Předpokládejme, že deska leží v rovině $z = 0$ a bod $P = [0;0;b]$. Ze symetrie úlohy plyne, že složky síly $F_x = F_y = 0$. Jestliže rozdělíme desku na malá mezikruží s poloměry r a $r + \Delta r$, je plocha takového mezikruží do veličin prvního řádu v Δr rovna $\Delta S = \pi\big((r+\Delta r)^2 - r^2\big) \approx 2\pi r\Delta r$. Složka síly ΔF_z, kterou přitahuje toto mezikruží bod P je podle Newtonova gravitačního zákona rovna $\Delta F_z = -2\pi\delta b\dfrac{r\Delta r}{\left(r^2+b^2\right)^{3/2}}$, kde k je gravitační konstanta. Po sečtení přes všechna mezikruží a přechodem k limitě $\Delta r \to 0$ dostaneme

$$F_z = -2\pi\delta b \int_0^a \frac{r\,\mathrm{d}r}{\left(r^2+b^2\right)^{3/2}}\,.$$

Tento integrál lze najít substitucí $r^2 + b^2 = t$. Po ní dostaneme

$$F_z = -\pi\delta b \int_{b^2}^{a^2+b^2} t^{-3/2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta b\Big[t^{-1/2}\Big]_{b^2}^{a^2+b^2} = 2\pi\delta\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - 1\right).$$

Cvičení 19 — **Nevlastní integrály**

Příklad 1. Vypočtěte $\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože $\lim\limits_{x\to 0_+} \ln x = -\infty$, jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Proto jej určíme pomocí limity.

$$\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_\varepsilon^1 \ln x \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \big[x(\ln x - 1)\big]_\varepsilon^1 = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0_+} \varepsilon(\ln\varepsilon - 1) = -1\,,$$

protože $\lim\limits_{\varepsilon\to 0_+} \varepsilon(\ln\varepsilon - 1) = 0$.

Příklad 2. Vypočtěte $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$.

Řešení:
Protože jedna mez integrálu je $+\infty$, jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Neboť pro $x \in \langle 2, +\infty)$ je $x^2 + x - 2 \neq 0$, nemá funkce singulární body. Proto budeme integrál počítat pomocí limity

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}\,.$$

Primitivní funkci najdeme rozkladem na parciální zlomky. Platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2}\,.$$

Proto je

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2} = \frac{1}{3} \lim_{A\to+\infty} \ln \frac{A-1}{A+2} - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \ln 2\,.$$

Příklad 3. Vypočtěte $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$.

Řešení:
Funkce $f(x) = 1 + x^3$ má v $\mathbb{R}$ jediný nulový bod $x = -1$. Protože je jedna mez v integrálu rovna $+\infty$, jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Musíme jej tedy najít limitou

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}\,.$$

Primitivní funkci $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$ najdeme rozkladem na parciální zlomky. Platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \frac{1}{3}\,\ln(x+1) - \frac{1}{6}\,\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\,.$$

Tedy hledaný integrál je

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\,\ln\frac{A^2+2A+1}{A^2-A+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{2A-1}{\sqrt{3}}\right) -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

Příklad 4. Vypočtěte $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

Řešení:
Protože $\lim_{x\to1_-} \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} = +\infty$, jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Proto jej budeme počítat limitou

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{a\to1_-}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,.$$

Primitivní funkci najdeme substitucí $1-x=y^2$. Pak je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -2\int\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = -2\operatorname{arctg} y = -2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}\,.$$

Tedy

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -2\lim_{a\to1_-}\Big[\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}\Big]_0^a = \frac{\pi}{2}\,.$$

Příklad 5. Vypočtěte $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

Řešení:
Protože je jedna mez rovna $+\infty$, jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Jestliže napíšeme

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{-6}\sqrt{x^{-10}+x^{-5}+1}}\,,$$

je vidět, že je výhodné použít substituci $x^{-5} = y$. Pak dostaneme

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = -\frac{1}{5}\int_1^0 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+y+1}} = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(y+1/2)^2+3/4}} =$$
$$= \frac{1}{5}\Big[\ln\big(2y+1+2\sqrt{y^2+y+1}\big)\Big]_0^1 = \frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Příklad 6. Vypočtěte $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Přestože je $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} = 0$, musíme tento integrál počítat pomocí limit

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0_+}\lim_{A\to+\infty}\int_a^A \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Primitivní funkci lze najít integrací per partes. Položíme $u' = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ a $v = \ln x$. Pak je $u = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$ a $v' = \dfrac{1}{x}$. Tedy

$$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)} =$$
$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2\ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2)\,.$$

Protože

$$\lim_{x\to 0_+}\left(\frac{x^2\ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2)\right) = 0$$

a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2\ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2)\right) = \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2\ln x - (1+x^2)\ln(1+x^2)}{1+x^2} =$$
$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{4x\ln x - 2x\ln(1+x^2)}{2x} = \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x^2}{1+x^2} = 0\,,$$

je $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

Příklad 7. Vypočtěte $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $a > 0$.

Řešení:
Jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Proto jej najdeme pomocí limity

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \, \mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \, \mathrm{d}x \,.$$

Jestliže použijeme integrace per partes, dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \, \mathrm{d}x &= \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{1}{a} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \right]_0^A - \frac{b}{a} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \sin bx \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2} \lim_{A \to +\infty} \left[\mathrm{e}^{-ax} \sin bx \right]_0^A - \frac{b^2}{a^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{a} - \frac{b^2}{a^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \, \mathrm{d}x \,.\end{aligned}$$

Dostali jsme tedy rovnici

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} - \frac{b^2}{a^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \, \mathrm{d}x \,,$$

ze které plyne, že $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \, \mathrm{d}x = \frac{a}{a^2 + b^2}$.

Příklad 8. Pomocí snížení řádu vypočtěte nevlastní integrál

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x \qquad n \in \mathbb{N} \,.$$

Řešení:
Protože se jedná o nevlastní Riemannův integrál, dostaneme integrací per partes pro $n \geq 1$

$$I_n = \lim_{A \to +\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x} x^n \right]_0^A + n \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{n-1} \, \mathrm{d}x = n I_{n-1} \,.$$

Protože pro $n = 0$ je

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x} \right]_0^A = 1 \,,$$

je $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^n \, \mathrm{d}x = n!$.

Příklad 9. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t}{x^3}$.

Řešení:

Protože je $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^4} = +\infty$ je také $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t = +\infty$. Jedná se tedy o limitu typu $\dfrac{\infty}{\infty}$. Proto lze použít l'Hospitalovo pravilo. Pomocí něj dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2} = \frac{1}{3}\,.$$

Příklad 10. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\displaystyle\int_x^{+\infty} t^{-1}\mathrm{e}^{-t}}{\ln(1/x)}$.

Řešení:

Protože $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = +\infty$, jedna se o limitu typu $\dfrac{\infty}{\infty}$. Proto lze použít l'Hospitalovo pravidlo. Pomocí něj dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} t^{-1}\mathrm{e}^{-t}}{\ln(1/x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^{-1}\mathrm{e}^{-x}}{-x^{-1}} = 1\,.$$

Příklad 11. Nechť je $f(x)$ spojitá funkce na intervalu $\langle 0,1\rangle$ a $\alpha > 0$. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0_+} x^\alpha \displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$.

Řešení:

Protože je $\alpha > 0$ je $\lim\limits_{x\to 0_+} x^{-\alpha} = +\infty$. Proto lze pro výpočet limity $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t}{x^{-\alpha}}$ použít l'Hospitalovo pravidlo. Pomocí něho dostaneme

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{-x^{-\alpha-1}f(x)}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \frac{f(0)}{\alpha}\,.$$

Příklad 12. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}$.

Řešení:
Protože $x^4 - x^2 + 1 \neq 0$, jedná se o chování funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ v okolí bodu $+\infty$. Protože je $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 f(x) = 1$ a integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ konverguje ($= 1$), konverguje také integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 + 1}$.

Příklad 13. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Řešení:
Protože pro $x \in \langle 1, +\infty)$ je $x\sqrt[3]{x^2+1} \neq 0$, jedná se o chování funkce $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ v okolí bodu $x = +\infty$. Protože $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{5/3} f(x) = 1$ a integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{5/3}}$ konverguje ($= 3/2$), konverguje také integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Příklad 14. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

Řešení:
Funkce $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ není omezená v okolí bodu $x = 1$. Proto budeme zkoumat její chování v tomto okolí. Protože je $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln x} = 1$ a integrál $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ diverguje, diverguje také integrál $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

Příklad 15. V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože pro každé $p \in \mathbb{R}$ integrál $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ konverguje, bude nás zajímat konvergence tohoto integrálu v pravém okolí bodu $x = 0$. Protože $\lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}}{x^{p-1}} = 1$, konverguje daný integrál právě tehdy, když konverguje integrál $\displaystyle\int_0^{1} x^{p-1}\mathrm{d}x$. Neboť tento integrál konverguje pro $p > 0$ a diverguje pro $p \leq 0$, konverguje integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ pro $p > 0$ a diverguje pro $p \leq 0$.

Příklad 16. V závislosti na parametru $n \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\,\mathrm{d}x$, $a \neq 0$.

Řešení:

Označme $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}$. Protože je $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n f(x) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(a)$, konverguje integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\,\mathrm{d}x$ současně s integrálem $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$. Tento integrál konverguje pro $n > 1$ a diverguje pro $n \leq 1$.

Protože $\displaystyle\lim_{x\to0_+} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x} = a$, je $\displaystyle\lim_{x\to0_+} x^{n-1} f(x) = a$. Tedy integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\,\mathrm{d}x$ konverguje současně s integrálem $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{n-1}}$. Ten konverguje pro $n-1 > 1$ a diverguje pro $n-1 \leq 1$.

Tedy integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\,\mathrm{d}x$ konverguje pro $n \in (1,2)$ a diverguje pro $n \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty)$.

Příklad 17. V závislosti na parametru $n \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

Protože pro každé $\varepsilon > 0$ je $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\varepsilon} = 0$ a integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$ konverguje pro $n > 1$, konverguje i integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$ pro $n > 1$. Protože pro $n \leq 1$ a $x \in (1, +\infty)$ je $\dfrac{\ln(1+x)}{x^n} > \dfrac{1}{x}$ a integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverguje, diverguje pro $n \leq 1$ také integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$.

Označme $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^n}$. Protože $\displaystyle\lim_{x\to0_+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, je $\displaystyle\lim_{x\to0_+} x^{n-1} f(x) = 1$. Tedy integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$ konverguje současně s integrálem $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{n-1}}$. Tento integrál konverguje pro $n < 2$.

Tedy $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,\mathrm{d}x$ konverguje pro $n \in (1,2)$.

Příklad 18. V závislosti na parametrech m a $n \geq 0$ vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2 + x^n}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

Označme $f(x) = \dfrac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^n}$. Protože je $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-m} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, konverguje integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^n}\,\mathrm{d}x$ současně s integrálem $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n-m}}$. Ale tento integrál konverguje pro $n-m>1$ a diverguje pro $n-m\le 1$.
Protože $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$, je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^{m+1}} = \dfrac{1}{2}$. Tedy integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^n}\,\mathrm{d}x$ konverguje současně s integrálem $\displaystyle\int_0^1 x^{m+1}\,\mathrm{d}x$. Protože tento integrál konverguje pro $m>-2$ a diverguje pro $m\le -2$, konverguje integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^n}\,\mathrm{d}x$ pro $n>m+1$ a $m>-2$ a diverguje pro $0\le n\le m+1$.

Příklad 19. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x} = 0$, bude nás zajímat konvergence integrálu v okolí bodu $x = +\infty$, například konvergence integrál $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$. Nejprve použijeme integraci per partes.Označme $u' = \sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ a $v = \dfrac{1}{x}$. Pak je $u = \dfrac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$ a $v' = -\dfrac{1}{x^2}$. Y integrálu dostaneme

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{x-\sin x\cos x}{2x}\right]_\pi^A + \frac{1}{2}\int_\pi^{+\infty} \frac{x-\sin x\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_\pi \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{1}{2}\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože $\left|\sin x\cos x\right| = \dfrac{1}{2}\left|\sin 2x\right| \le \dfrac{1}{2}$, druhý z těchto integrálu konverguje. Ale protože první integrál diverguje, diverguje také integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 20. V závislosti na parametru $n\in\mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$.

Řešení:
Funkce $f(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}$ není omezená v levém okolí bodu $x=1$ a možná v pravém okolí bodu $x=0$. Protože $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x)\sqrt{1-x} = \dfrac{1}{2}$ a integrál $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$ konverguje, konverguje také integrál $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$.

Protože $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{f(x)}{x^n} = 1$ konverguje integrál $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$ současně s integrálem $\displaystyle\int_0^{1/2} x^n\,\mathrm{d}x$. Protože tento integrál konverguje pro $n > -1$ a diverguje pro $n \le -1$, konverguje také integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$ pro $n > -1$ a diverguje pro $n \le -1$.

Příklad 21. Vyšetřete konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x}}$.

Řešení:
Jediný bod, v jehož okolí není funkce $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x}}$, je bod $x = 0$. Proto nás bude zajímat chování funkce $f(x)$ v okolí bodu $x = +\infty$ a v pravém okolí bodu $x = 0$. Protože je $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2} f(x) = 1$ a integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$ konverguje ($= 2$), konverguje také integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x}}$.
Protože je $\lim\limits_{x\to 0_+} \sqrt{x} f(x) = 1$ a integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ konverguje ($= 2$), konverguje také integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x}}$. Tedy integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x}}$ konverguje.

Příklad 22. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení:
Nejprve budeme zkoumat absolutní konvergenci integrálu, tj. konvergenci integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$. Protože platí $|\sin x| \ge \sin^2 x$ a integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ diverguje podle příkladu 19, integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ nekonverguje absolutně.
Protože je funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ na intervalu $(0, +\infty)$ spojitá a omezená, bude nás zajímat integrál v okolí bodu $x = +\infty$, například $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. Nejprve použijeme integraci per partes. Jestliže zvolíme $u' = \sin x$ a $v = \dfrac{1}{x}$, dostaneme

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{\pi/2}^{+\infty} - \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože $\left|\cos x\right| \leq 1$, integrál $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje. Z toho plyne, že neabsolutní konvergence integrálu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 23. Nechť pro funkce $u(x)$ a $v(x)$ definované na intervalu $(a, +\infty)$ platí: 1) integrál $U(x) = \displaystyle\int_a^x u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ je omezená funkce pro $x \in (a, +\infty)$; 2) funkce $v(x)$ je diferencovatelná a monotonní na intervalu $(a, +\infty)$, 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 0$. Pak integrál $\displaystyle\int_a^{+\infty} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Řešení:

Důkaz tohoto tvrzení je velmi podobný důkazu neabsolutní konvergence integrálu $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ z předchozího příkladu. Nejprve použijeme integrace per partes. Z ní dostaneme

$$\int_a^{+\infty} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\Big[U(x)v(x)\Big]_a^A - \int_a^{+\infty} U(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože je funkce $U(x)$ omezená a $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 0$, je $\lim\limits_{A\to+\infty}\Big[U(x)v(x)\Big]_a^A = 0$. Protože je funkce $v(x)$ monotonní a diferencovatelná, nemění její derivace $v'(x)$ na intervalu $(a, +\infty)$ znaménko. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že funkce $v(x)$ je klesající, a tedy její derivace $v'(x)$ není kladná. Protože existuje $K \geq 0$ takové, že $\big|U(x)\big| \leq K$, platí nerovnost

$$\left|\int_a^{+\infty} U(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^{+\infty} \big|U(x)v'(x)\big|\,\mathrm{d}x \leq -K\int_a^{+\infty} v'(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -K\lim_{A\to+\infty}\big[v(x)\big]_a^A = Kv(a)\,,$$

protože $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 0$. Tedy $\displaystyle\int_a^{+\infty} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Příklad 24. Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení:

Nejprve ukážeme, že tento integrál nekonverguje absolutně. Protože na intervalu $(0,+\infty)$ je funkce $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}$ spojitá a omezená, musíme zkoumat konvergenci integrálu v okolí bodu $x = +\infty$. Protože pro $x \in (1,+\infty)$ platí nerovnosti $\dfrac{\sqrt{x}|\cos x|}{x+100} \geq \dfrac{|\cos x|}{x+100} \geq \dfrac{\cos^2 x}{x+100}$, stačí ukázat, že integrál $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x+100}\,\mathrm{d}x$ diverguje. Nejprve použijeme integraci per partes. Jestliže zvolíme $u' = \cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$ a $v = \dfrac{1}{x+100}$, je $u = \dfrac{1}{2}(x+\sin x\cos x)$ a $v' = -\dfrac{1}{(x+100)^2}$. Tedy

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x+100}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{x+\sin x\cos x}{2(x+100)}\right]_\pi^A + \frac{1}{2}\int_\pi^{+\infty}\frac{x+\sin x\cos x}{(x+100)^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{100+\pi}\right) + \frac{1}{2}\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{(x+100)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\pi^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+100)^2}\,.$$

Protože integrál $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{(x+100)^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje a integrál $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+100)^2}$ diverguje, diverguje také integrál $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x+100}\,\mathrm{d}x$ a tedy daný integrál nekonverguje absolutně.

Při zkoumání neabsolutní konvergence integrálu využijeme výsledku příkladu 23. Protože je funkce $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}$ spojitá a omezená na celém intervalu $(0,+\infty)$, stačí zkoumat konvergenci integrálu v okolí bodu $x = +\infty$. Označme $u(x) = \cos x$ a $v(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$. Pak je $U(x) = \displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x$. Protože je $|\sin x| \leq 1$, je funkce $U(x)$ omezená. Funkce $v(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ je diferencovatelná v celém intervalu $(0,+\infty)$. Její derivace $v'(x) = \dfrac{100-x}{2\sqrt{x}(x+100)^2}$ je záporná pro $x > 100$. Navíc je $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+100} = 0$. Proto například integrál $\displaystyle\int_{101}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\,\mathrm{d}x$ konverguje. Z toho ale plyne, že neabsolutně konverguje také integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 25. V závislosti na parametrech p a $q \geq 0$ vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení:

Funkce $f(x) = \dfrac{x^p\sin x}{1+x^q}$ je spojitá a omezená snad až na pravé okolí bodu $x = 0$ a okolí bodu $x = +\infty$. Proto budeme vyšetřovat konvergenci integrálu v okolí těchto bodů.

Protože $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, je $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{f(x)}{x^{p+1}} = 1$. Tedy integrál konverguje (absolutně) v okolí bodu $x = 0$ pro $p > -2$.

Podobně jako v předchozím příkladě lze ukázat, že daný integrál bude absolutně konvergovat v okolí bodu $x = +\infty$ právě tehdy, když bude konvergovat integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^p \, \mathrm{d}x}{1+x^q}$. Protože $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^p}{1+x^q} \cdot x^{q-p} \right) = 1$, konverguje tento integrál právě tehdy, když konverguje integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{q-p}}$, tedy pro $q - p > 1$. Proto integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} \, \mathrm{d}x$ konverguje absolutně pro $p > -2$ a $q > p + 1$.

Pro vyšetřování neabsolutní konvergence integrálu v okolí bodu $x = +\infty$ použijeme opět výsledek příkladu 23. Funkce $\displaystyle\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x$ je omezená. Dále je $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^p}{1+x^q} = 0$ pro $q > p$. Protože pro $q \le p$ není limita $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^p}{1+x^q}$ rovna nule, integrál pro $q \le p$ nekonverguje. Pro $q > p$ je $\left(\dfrac{x^p}{1+x^q} \right)' = \dfrac{(p-q)x^{p+q-1} + px^{p-1}}{(1+x^q)^2}$.

Pro velká x je tato derivace záporná. Proto integrál konverguje neabsolutně pro $p > -2$ a $p < q \le p + 1$.

Příklad 26. Vypočtěte V. P. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$.

Řešení:

V intervalu $(0, +\infty)$ není funkce $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ omezená v okolí bodu $x = 1$. Proto je

$$\text{V. P.} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \lim_{a\to 0_+} \left(\int_0^{1-a} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} + \int_{1+a}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} \right).$$

Protože $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$, je hledaný integrál roven

$$\begin{aligned}\text{V. P.} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} &= \lim_{a\to 0_+} \lim_{A\to+\infty} \left(\left[\ln \frac{1-x}{1+x} \right]_0^{1-a} + \left[\ln \frac{x+1}{x-1} \right]_{1+a}^{A} \right) = \\ &= \lim_{a\to 0_+} \left(\ln \frac{2-a}{a} - \ln \frac{2+a}{a} \right) = \lim_{a\to 0_+} \ln \frac{2-a}{2+a} = 0\,.\end{aligned}$$

Příklad 27. Vypočtěte V. P. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 3x + 2}$.

Řešení:

Primitivní funkce je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2} = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) \mathrm{d}x = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| .$$

Protože funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ není omezená v okolí bodů $x=1$ a $x=2$, je

$$\begin{aligned}
&\text{V. P.} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2} = \\
&= \lim_{a\to 0_+} \lim_{b\to 0_+} \lim_{A\to +\infty} \left(\left[\ln \frac{2-x}{1-x} \right]_0^{1-a} + \left[\ln \frac{2-x}{x-1} \right]_{1+a}^{2-b} + \left[\ln \frac{x-2}{x-1} \right]_{2+b}^{A} \right) = \\
&= \lim_{a\to 0_+} \lim_{b\to 0_+} \left(\ln \frac{1+a}{a} - \ln 2 + \ln \frac{b}{1-b} - \ln \frac{1-a}{a} - \ln \frac{b}{1+b} \right) = \\
&= \lim_{a\to 0_+} \lim_{b\to 0_+} \left(\ln \frac{1+a}{1-a} + \ln \frac{1+b}{1-b} - \ln 2 \right) = -\ln 2 .
\end{aligned}$$

Příklad 28. Vypočtěte V. P. $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$.

Řešení:
Primitivní funkci k $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ dostaneme substitucí $y = \ln x$. Pak je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln |y| = \ln \big| \ln x \big| .$$

Protože na intervalu $\left(\dfrac{1}{2}, 2 \right)$ není funkce $f(x)$ omezená v okolí bodu $x=1$, je

$$\begin{aligned}
\text{V. P.} \int_{1/2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} &= \lim_{a\to 0_+} \left(\Big[\ln \big| \ln x \big| \Big]_{1/2}^{1-a} + \Big[\ln \big| \ln x \big| \Big]_{1+a}^{2} \right) = \\
&= \lim_{a\to 0_+} \Big(\ln\big(-\ln(1-a)\big) - \ln\big(\ln 2\big) + \ln\big(\ln 2\big) - \ln\big(\ln(1+a)\big) \Big) = \\
&= \lim_{a\to 0_+} \ln \frac{-\ln(1-a)}{\ln(1+a)} = \ln 1 = 0 .
\end{aligned}$$

Příklad 29. Vypočtěte V. P. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

Protože je funkce $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}$ omezená v celém $\mathbb{R}$, je

$$\begin{aligned}
\mathrm{V.\,P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{K\to+\infty} \int_{-K}^{K} \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{K\to+\infty} \left[\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\,\ln\bigl(x^2+1\bigr)\right]_{-K}^{K} = \\
&= \lim_{K\to+\infty} \bigl(\operatorname{arctg} K - \operatorname{arctg}(-K)\bigr) = \pi\,.
\end{aligned}$$

Příklad 30. Vypočtěte V. P. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

Funkce $\operatorname{arctg} x$ je lichá. Proto pro každé $K > 0$ je $\displaystyle\int_{-K}^{K} \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = 0$. Protože je funkce $\operatorname{arctg} x$ omezená na celém $\mathbb{R}$, je

$$\mathrm{V.\,P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \lim_{K\to+\infty} \int_{-K}^{K} \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Cvičení 20 — **Různé příklady na integrály**

Příklad 1. Najděte integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(x^4-3)\,\mathrm{d}x}{x(x^8+3x^4+2)}$.

Řešení:
Protože $\displaystyle\frac{x^4-3}{x\big(x^8+3x^4+2\big)} = \frac{x^4-3}{x^4\big(x^8+3x^4+2\big)}\cdot x^3$, je výhodné zavést substituci $x^4=y$. Po ní dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{(x^4-3)\,\mathrm{d}x}{x(x^8+3x^4+2)} &= \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{(y-3)\,\mathrm{d}y}{y\big(y^2+3y+2\big)} = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \left(-\frac{3}{2y}+\frac{4}{y+1}-\frac{5}{2(y+2)}\right)\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{4}\lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{3}{2}\,\ln y + 4\ln(y+1) - \frac{5}{2}\,\ln(y+2)\right]_1^A = \\
&= \frac{5}{8}\,\ln 3 - \ln 2 + \lim_{A\to+\infty}\left(\ln\frac{y+1}{y} - \frac{5}{8}\,\ln\frac{y+2}{y}\right) = \frac{5}{8}\,\ln 3 - \ln 2\,.
\end{aligned}$$

Příklad 2. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x^{11}\,\mathrm{d}x}{x^8+3x^4+2}$.

Řešení:
Protože $x^{11}=x^3\cdot x^8$, je výhodné použít substituci $x^4=y$. Po ní dostaneme

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^{11}\,\mathrm{d}x}{x^8+3x^4+2} &= \frac{1}{4}\int \frac{y^2\,\mathrm{d}y}{y^2+3y+2} = \frac{1}{4}\int\left(1+\frac{1}{y+1}-\frac{4}{y+2}\right)\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{4}\,(y+\ln(y+1)-4\ln(y+2)) + C = \frac{x^4}{4} + \frac{\ln(x^4+1)}{4} - \ln(x^4+2) + C\,.
\end{aligned}$$

Příklad 3. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
V tomto integrálu použijeme substituci $x^n=y$. Pak dostaneme

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n}\int\frac{y\,\mathrm{d}y}{y+1} = \frac{1}{n}\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{n}\Big(y-\ln\big|y+1\big|\Big)+C = \frac{1}{n}\Big(x^n-\ln\big|x^n+1\big|\Big)+C\,.
\end{aligned}$$

Příklad 4. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+2)}$.

Řešení:
Jestliže napíšeme $\displaystyle\frac{1}{x\bigl(x^{10}+2\bigr)} = \frac{1}{x^{11}\bigl(1+2x^{-10}\bigr)}$, je vidět, že je výhodné použít substituci $x^{-10}=y$. Po této substituci dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+2)} = -\frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}y}{1+2y} = -\frac{1}{20}\ln(1+2y)+C = \frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2}+C\,.$$

Příklad 5. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{1+\mathrm{e}^{x/2}}{\bigl(1+\mathrm{e}^{x/4}\bigr)^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
V tomto integrálu použijeme substituci $\mathrm{e}^{x/4}=y$. Pak je $\mathrm{d}x=\dfrac{4}{y}\,\mathrm{d}y$ a z integrálu dostaneme

$$\int \frac{1+\mathrm{e}^{x/2}}{\bigl(1+\mathrm{e}^{x/4}\bigr)^2}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{1+y^2}{y(1+y)^2}\,\mathrm{d}y = 4\int\left(\frac{1}{y}-\frac{2}{(1+y)^2}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= 4\left(\ln y+\frac{2}{1+y}\right)+C = x+\frac{8}{1+\mathrm{e}^{x/4}}+C\,.$$

Příklad 6. Najděte integrál $\displaystyle\int \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^{x}-1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Nejprve zavedeme proměnnou y substitucí $y=\mathrm{e}^x$. Z integrálu pak dostaneme

$$\int \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^{x}-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{y^2+4y-1}}{y}\,\mathrm{d}y\,.$$

Tento integrál lze převést na integrál z racionální funkce například Eulerovou substitucí $y+\sqrt{y^2+4y-1}=t$. Pak je $y=\dfrac{t^2+1}{2(t+2)}$, $\sqrt{y^2+4y-1}=t-y=\dfrac{t^2+4t-1}{2(t+2)}$ a $\mathrm{d}y=\dfrac{t^2+4t-1}{2(t+2)^2}$. Po dosazení do integrálu dostaneme

$$\int \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^{x}-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+4t-1)^2}{(t+2)^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\int\left(1+\frac{4}{t+2}+\frac{5}{(t+2)^2}-\frac{4}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(t + 4\ln(t+2) - \frac{5}{t+2} - 4\operatorname{arctg} t\right) + C_1 = \\
&= \sqrt{y^2+4y-1} + 2\ln\bigl(y+2+\sqrt{y^2+4y-1}\bigr) - \\
&\qquad - 2\operatorname{arctg}\bigl(y+\sqrt{y^2+4y-1}\bigr) + C = \\
&= \sqrt{\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^x-1} + 2\ln\bigl(\mathrm{e}^x+2+\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^x-1}\bigr) - \\
&\qquad - 2\operatorname{arctg}\bigl(\mathrm{e}^x+\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^x-1}\bigr) + C\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 7. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^2}$, $ab \neq 0$.

Řešení:
Protože pro integrovanou funkci $R(\cos x, \sin x)$ platí vztah

$$
R(\cos x, \sin x) = R(-\cos x, -\sin x)\,,
$$

použijeme substituci $\operatorname{tg} x = y$. Pak dostaneme

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^2} = \int \frac{\mathrm{d}y}{(ay+b)^2} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{ay+b} + C = -\frac{\cos x}{a(a\sin x + b\cos x)} + C\,.
$$

Příklad 8. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x\bigl(\ln^3 x - 3\ln x + 2\bigr)}$.

Řešení:
Protože $\bigl(\ln x\bigr)' = \dfrac{1}{x}$, je výhodné zavést substituci $\ln x = y$. Daný integrál pak přejde na

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x\bigl(\ln^3 x - 3\ln x + 2\bigr)} &= \int \frac{y\,\mathrm{d}y}{y^3 - 3y + 2} = \\
&= \int \left(\frac{1}{3(y-1)^2} + \frac{2}{9(y-1)} - \frac{2}{9(y+2)}\right)\mathrm{d}y = \\
&= -\frac{1}{3(y-1} + \frac{2}{9}\,\ln\left|\frac{y-1}{y+2}\right| + C = -\frac{1}{3(\ln x - 1)} + \frac{2}{9}\,\ln\left|\frac{\ln x - 1}{\ln x + 2}\right| + C\,.
\end{aligned}
$$

Příklad 9. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Řešení:

K výpočtu tohoto integrálu lze použít Eulerovy substituce $1+\sqrt{1-2x-x^2}=xy$. Pak je $\sqrt{1-2x-x^2}=xy-1$ a po umocnění dostaneme $x=2\,\dfrac{y-1}{y^2+1}$. Derivováním získáme $\mathrm{d}x=2\,\dfrac{-y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y$ a po dosazení do integrálu zjistíme, že

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}&=\int\frac{-y^2+2y+1}{y(y-1)(y^2+1)}\,\mathrm{d}y=\\&=\int\left(-\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}-\frac{2}{y^2+1}\right)\mathrm{d}y=\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|-2\operatorname{arctg}y+C=\\&=\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{1-2x-x^2}}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right|-2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}+C\,.\end{aligned}$$

Příklad 10. Najděte integrál $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Tento integrál lze převést na integrál z racionální funkce například Eulerovou substitucí $x+\sqrt{x^2-2x+2}=y$. Ale tato substituce vede k poměrně složitému integrálu. Proto použijeme v tomto případě jinou metodu. Jestliže napíšeme $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$, lze poměrně snadno nahlédnout, že může být vhodná substituce $x-1=\sinh t$. Daný integrál pak je

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x&=\int(\sinh t+1)\cosh^2t\,\mathrm{d}t=\\&=\int\sinh t\cosh^2t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\big(\cosh 2t+1\big)\,\mathrm{d}t=\\&=\frac{1}{3}\cosh^3t+\frac{1}{2}(\sinh t\cosh t+t)+C\,.\end{aligned}$$

Protože $\cosh t=\sqrt{\sinh^2t+1}=\sqrt{x^2-2x+2}$ a $t=\ln\Big(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\Big)$, je

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x=&\frac{1}{3}\Big(x^2-2x+2\Big)^{3/2}+\frac{1}{2}\,(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}+\\&+\frac{1}{2}\,\ln\Big(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\Big)+C\,.\end{aligned}$$

Příklad 11. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

Protože jedna z mezí v tomto integrálu je $+\infty$, jedná se o nevlastní integrál. Protože platí nerovnost $\left|x^2 \mathrm{e}^{-x} \cos x\right| \le x^2 \mathrm{e}^{-x}$ a integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$ konverguje ($= 2$), konverguje také integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x} \cos x\, \mathrm{d}x$ (a to dokonce absolutně). Tento integrál najdeme integrací per partes. Jestliže zvolíme $u = x^2$ a $v' = \mathrm{e}^{-x} \cos x$, je zřejmé, že musíme najít primitivní funkci k $\mathrm{e}^{-x} \cos x$. Tu najdeme integrací per partes. Platí

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{-x} \cos x\, \mathrm{d}x &= -\mathrm{e}^{-x} \cos x - \int \mathrm{e}^{-x} \sin x\, \mathrm{d}x = \\ &= \mathrm{e}^{-x}\bigl(-\cos x + \sin x\bigr) - \int \mathrm{e}^{-x} \cos x\, \mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Z této rovnice pro $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x} \cos x\, \mathrm{d}x$ získáme

$$\int \mathrm{e}^{-x} \cos x\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\bigl(\sin x - \cos x\bigr) \quad \text{a} \quad \int \mathrm{e}^{-x} \sin x\, \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\bigl(\sin x + \cos x\bigr)\,.$$

Když použijeme tyto vztahy, dostaneme

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x} \cos x\, \mathrm{d}x = \\ &\quad = \lim_{K \to +\infty} \left[\frac{x^2}{2}\, \mathrm{e}^{-x}\bigl(\sin x - \cos x\bigr)\right]_0^K - \int_0^{+\infty} x \mathrm{e}^{-x}\bigl(\sin x - \cos x\bigr)\, \mathrm{d}x = \\ &\quad = \lim_{K \to +\infty} \Bigl[x \mathrm{e}^{-x} \sin x\Bigr]_0^K - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin x\, \mathrm{d}x = \\ &\quad = \lim_{K \to +\infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\, \bigl(\sin x + \cos x\bigr)\right]_0^K = -\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Příklad 12. Najděte integrál $\displaystyle\int \ln\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right)\, \mathrm{d}x$.

Řešení:
Tento integrál najdeme integrací per partes. Pomocí ní dostaneme

$$\begin{aligned}&\int \ln\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right)\, \mathrm{d}x- = \\ &\quad = x \ln\bigl(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\bigr) - \frac{1}{2} \int \frac{x\bigl(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}\bigr)}{\sqrt{1-x^2}\bigl(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\bigr)}\, \mathrm{d}x = \\ &\quad = x \ln\bigl(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\bigr) + \frac{1}{2} \int \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \end{aligned}$$

$$= x\ln\bigl(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\bigr) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,\arcsin x + C\,.$$

Příklad 13. Najděte integrál $\displaystyle\int x\arccos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Tento integrál najdeme integrací per partes. Ta dává

$$\begin{aligned}\int x\arccos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\,\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\bigl(1/x\bigr)^2}} = \\ &= \frac{x^2}{2}\,\arccos\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \\ &= \frac{x^2}{2}\,\arccos\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\,\sqrt{x^2-1} + C\,.\end{aligned}$$

Příklad 14. Najděte integrál $\displaystyle\int \sinh^3 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Po substituci $\cosh x = y$ dostaneme

$$\int\sinh^3 x\,\mathrm{d}x = \int\bigl(y^2-1\bigr)\,\mathrm{d}y = \frac{y^3}{3} - y + C = \frac{1}{3}\,\cosh^3 x - \cosh x + C\,.$$

Příklad 15. Najděte integrál $\displaystyle\int \operatorname{tgh} x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ a $\bigl(\cosh x\bigr)' = \sinh x$, je $\displaystyle\int\operatorname{tgh} x\,\mathrm{d}x = \ln\bigl(\cosh x\bigr) + C$.

Příklad 16. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sinh x + 2\cosh x}$.

Řešení:
Podobně jako v případě goniometrických funkcí, lze převést tento integrál na integrál z racionální funkce substitucí $\operatorname{tgh}\dfrac{x}{2} = t$. Ale taková substituce obvykle vede k poměrně složitým integrálům. Proto je mnohdy jednodušší použít vztahy

$\cosh x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ a pak substituci $\mathrm{e}^x = y$. Z daného integrálu pak dostaneme

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x + 2\cosh x} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}x}{3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \int_1^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}y}{3y^2+1} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \Big[\operatorname{arctg}\big(y\sqrt{3}\big)\Big]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

Příklad 17. Najděte integrál $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

Neboť pro integrovanou funkci $R(\cos x, \sin x) = \dfrac{\cos^4 x}{\sin^3 x}$ platí vztah $R(\cos x, \sin x) = -R(\cos x, -\sin x)$, použijeme substituci $\cos x = t$. Z integrálu pak dostaneme

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x = -\int_{1/\sqrt{2}}^{0} \frac{t^4\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2} =$$
$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(1 - \frac{3}{4(1-t)} - \frac{3}{4(1+t)} + \frac{1}{4(1-t)^2} + \frac{1}{4(1+t)^2}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \left[t - \frac{3}{4}\ln\frac{1+t}{1-t} + \frac{t}{2(1-t^2)}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \frac{3}{2}\ln\big(\sqrt{2}+1\big)\,.$$

Příklad 18. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}$.

Řešení:

Neboť pro integrovanou funkci $R(\cos x, \sin x) = \dfrac{1}{\cos^3 x}$ platí vztah $R(\cos x, \sin x) = -R(-\cos x, \sin x)$, použijeme substituci $\sin x = t$. Pak dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t}\right) + C = \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + C\,.$$

Příklad 19. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x \cos^4 x}$.

Řešení:

Tento integrál by bylo možné převést substitucí $\operatorname{tg} x = t$ na integrál z racionální funkce. Ale výsledný integrál by byl poměrně složitý. Protože však $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x \cos^4 x} = \int \frac{16\,\mathrm{d}x}{\sin^4 2x} = 16 \int \left(1 + \operatorname{cotg}^2 2x\right) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 2x}\,.$$

Protože $\left(\operatorname{cotg} 2x\right)' = -\dfrac{2}{\sin^2 2x}$, je výhodné použít substituci $\operatorname{cotg} 2x = y$ a hledaný integrál je

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x \cos^4 x} &= -8 \int \left(1 + y^2\right) \mathrm{d}y = -8 \left(y + \frac{y^3}{3}\right) + C = \\ &= -8 \operatorname{cotg} 2x - \frac{8}{3} \operatorname{cotg}^3 2x + C\,.\end{aligned}$$

Příklad 20. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^5 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

Pro integrovanou funkci $R(\cos x, \sin x) = \operatorname{tg}^5 x = \dfrac{\sin^5 x}{\cos^5}$ platí $R(\cos x, \sin x) = R(-\cos x, -\sin x)$. Proto lze převést tento integrál na integrál racionální funkce substitucí $\operatorname{tg} x = t$. Pak je

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^5 x\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{t^5\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \left(t^3 - t + \frac{t}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t = \\ &= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln\left(1+t^2\right)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

Příklad 21. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

Řešení:

Po substituci $\operatorname{tg} x = t$ dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\left(1+t^2\right)}\,.$$

Tento integrál převedeme na integrál z racionální funkce substitucí $t = y^2$. Pak dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}y}{1+y^4} = \int \frac{2\,\mathrm{d}y}{\bigl(y^2 - y\sqrt{2}+1\bigr)\bigl(y^2 + y\sqrt{2}+1\bigr)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{y+\sqrt{2}}{y^2+y\sqrt{2}+1} - \frac{y-\sqrt{2}}{y^2-y\sqrt{2}+1} \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{2y+\sqrt{2}}{y^2+y\sqrt{2}+1} - \frac{2y-\sqrt{2}}{y^2-y\sqrt{2}+1} \right) \mathrm{d}y +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{(y+1/\sqrt{2})^2+1/2} + (\frac{1}{(y-1/\sqrt{2})^2+1/2} \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{y^2+y\sqrt{2}+1}{y^2-y\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Bigl(\operatorname{arctg}\bigl(y\sqrt{2}+1\bigr) + \operatorname{arctg}\bigl(y\sqrt{2}-1\bigr) \Bigr) + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2 \operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x + \sqrt{2 \operatorname{tg} x}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2 \operatorname{tg} x}}{1-\operatorname{tg} x} \right) + C\,.$$

Příklad 22. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

Řešení:
Tento integrál lze převést na integrál z racionální funkce substitucí $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$. Když totiž nejprve zavedeme novou proměnnou vztahem $x = 2y$, přejde náš integrál na

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = 2\int \frac{\mathrm{d}y}{\sin 2y} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sin y \cos y} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\cos^2 y}\,.$$

Protože $\bigl(\operatorname{tg} y\bigr)' = \dfrac{1}{\cos^2 y}$, je $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\bigl|\operatorname{tg} y\bigr| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

Příklad 23. Najděte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x}$ tak, že převedete jmenovatele na sinus součtu úhlů.

Řešení:
Protože $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$, kde $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, lze podle předcházejícího příkladu psát

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \ln\left|\frac{x+\alpha}{2}\right| + C\,.$$

Příklad 24. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Protože $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \ln(\sin x) = -\infty$, jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Protože je $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} x^{1/2}\cdot\ln(\sin x) = 0$, tento integrál konverguje. Pomocí substituce $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ zjistíme, že $I = {}_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$. Proto je

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\pi/2} \big(\ln(\sin x) + \ln(\cos x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin x\cos x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\,\ln 2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\,\ln 2 = \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\,\ln 2 = I - \frac{\pi}{2}\,\ln 2\,. \end{aligned}$$

Z této rovnice plyne, že $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\,\ln 2$.

Cvičení 21 — **Číselné řady s nezápornými členy**

Příklad 1. Dokažte, že konverguje řada

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\dots$$

a najděte její součet.

Řešení:

Nejprve najdeme částečné součty této řady. Protože se jedná o součet dvou geometrických řad je

$$s_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(1/2\right)^N}{1-1/2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(1/3\right)^N}{1-1/3}\,.$$

Protože je $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2^N}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{3^N}=0$, je

$$s=\lim_{\mathbb{N}\to\infty}s_N=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\,.$$

Příklad 2. Dokažte, že konverguje řada

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\dots+\frac{2n-1}{2^n}+\dots$$

a najděte její součet.

Řešení:

Protože je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(2n-1)}=\frac{1}{2}$, řada konverguje podle limitního podílového kritéria. Označme její součet s. Pak platí

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}=$$
$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\,s\,.$$

Z tohoto vztahu dostaneme $s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3$.

Příklad 3. Dokažte, že konverguje řada

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\dots$$

a najděte její součet.

Řešení:

Protože platí $\frac{1}{3}\,(3n-2)(3n+1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$, jsou částečné součty

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{3n-2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3N+1)}\,.$$

Protože $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{3N+1} = 0$, je $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}$.

Příklad 4. Dokažte, že pro $|q| < 1$ konverguje řada

$$q\cos\alpha + q^2\cos 2\alpha + \dots + q^n\cos n\alpha + \dots$$

a najděte její součet.

Řešení:

Protože $\bigl|a_n\bigr| = \bigl|q^n\cos n\alpha\bigr| \le |q|^n$ a $|q| < 1$, daná řada konverguje a to dokonce absolutně. Protože $\cos n\alpha = \mathrm{Re}\bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}\bigr)$, je součet dané řady roven $s = \mathrm{Re}(S)$, kde $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}$. Ale to je geometrická řada s kvocientem $q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. Protože $\bigl|q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\bigr| = |q| < 1$, tato geometrická řada konverguje. Její součet je

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\Bigr)^n = \frac{q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{1-q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} = \frac{q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\bigl(1-q\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\bigr)}{1-2q\cos\alpha+q^2}\,.$$

Tedy

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} q^n\cos n\alpha = \mathrm{Re}(S) = \frac{q\cos\alpha - q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}\,.$$

Povšimněte si, že platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n\sin n\alpha = \mathrm{Im}(S) = \frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$.

Příklad 5. Dokažte, že konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\bigl(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\bigr)$ a najděte její součet.

Řešení:

Nejprve najdeme částečné součty této řady. Ty jsou

$$\begin{aligned}
s_N &= \sum_{n=1}^{N} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = \sum_{n=3}^{N+2} \sqrt{n} - 2\sum_{n=2}^{N+1} \sqrt{n} + \sum_{n=1}^{N} \sqrt{n} = \\
&= 1 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{N+1} + \sqrt{N+1} + \sqrt{N+2} = \\
&= 1 - \sqrt{2} - \sqrt{N+1} + \sqrt{N+2}\,.
\end{aligned}$$

Když přejdeme k limitě $N \to \infty$, dostaneme

$$s = \lim_{N\to\infty} s_N = 1 - \sqrt{2} + \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N+2} + \sqrt{N+1}} = 1 - \sqrt{2}\,.$$

Příklad 6. Vyšetřete, zda konverguje řada

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \ldots\,.$$

Řešení:
Jedná se o řadu s nezápornými členy. Uvažujme funkci $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$. Protože její derivace $f'(x) = -\dfrac{2}{(2x-1)^2} < 0$, je tato funkce pro $x > 1$ klesající. Protože $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, můžeme použít integrální kritérium. Neboť $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x-1}$ diverguje, diverguje také řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.

Příklad 7. Vyšetřete, zda konverguje řada

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots\,.$$

Řešení:
Jedná se o řadu s nezápornými členy. Uvažujme funkci $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$. Protože její derivace $f'(x) = -\dfrac{4}{(2x-1)^3} < 0$ pro $x \in (1, +\infty)$, je funkce na tomto intervalu klesající. Dále $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Lze tedy použít integrální kritérium. Protože je $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2}$, a tedy tento integrál konverguje, konverguje také řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Příklad 8. Vyšetřete, zda konverguje řada

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \ldots .$$

Řešení:
Jedná se o řadu s nezápornými členy. Uvažujme funkci $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$. Její derivace $f'(x) = -\dfrac{3x+2}{2x^2(x+1)^{3/2}} < 0$ pro $x > 0$. Proto je funkce $f(x)$ na pro $x > 0$ klesající. Protože $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, konverguje daná řada zároveň s integrálem $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}} = 2\ln\bigl(\sqrt{2}+1\bigr)$. Tedy řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ konverguje.

Příklad 9. Vyšetřete, zda konverguje řada

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \ldots .$$

Řešení:
Jedná se o řadu s nezápornými členy. Uvažujme funkci $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2-1}}$. Její derivace $f'(x) = -\dfrac{4x}{\left(4x^2-1\right)^{3/2}} < 0$ pro $x > 1$. Proto je funkce $f(x)$ na pro $x > 0$ klesající. Protože $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, konverguje daná řada zároveň s integrálem $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-1}}$, který diverguje Tedy řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ diverguje.

Příklad 10. Dokažte konvergenci řady

$$\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{2^n} + \ldots .$$

Řešení:
Protože platí nerovnost $\left|a_n\right| = \left|\dfrac{\sin nx}{2^n}\right| \le \dfrac{1}{2^n}$ a řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konverguje, konverguje také řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ (dokonce absolutně).

Příklad 11. Dokažte konvergenci řady

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \dots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \dots .$$

Řešení:
Částečné součty dané řady jsou

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\cos nx}{n-1} =$$
$$= \cos x - \frac{\cos(N+1)x}{N} - \sum_{n=2}^{N} \frac{\cos nx}{n(n-1)} .$$

Protože $\lim_{N\to\infty} \frac{\cos(N+1)x}{N} = 0$ a řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n-1)}$ konverguje, konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 12. Dokažte konvergenci řady

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \dots .$$

Řešení:
Protože platí nerovnost $|a_n| = \left|\frac{\cos x^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 13. Dokažte divergenci řady

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots .$$

Řešení:
Tato řada nemá nezáporné členy. Ale když seskupíme tři po sobě následující členy, dostaneme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2 - 2}{3n(3n-1)(3n-2)} ,$$

což už je řada s nezápornými členy. Protože $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\dfrac{9n^2-2}{3n(3n-1)(3n-2)}\right)=\dfrac{1}{3}$, konverguje tato řada současně s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, která, jak je známo, diverguje. Proto diverguje také daná řada.

Příklad 14. Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\cdots+\frac{1000^n}{n!}+\dots.$$

Řešení:
Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{1000^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n+1}=0\,.$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$, daná řada konverguje.

Příklad 15. Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{(1!)^1}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\cdots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\dots.$$

Řešení:
Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}<1\,.$$

Proto daná řada konverguje.

Příklad 16. Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\cdots+\frac{n!}{n^n}+\dots.$$

Řešení:

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{-1} < 1\,.$$

Protože daná řada konverguje.

Příklad 17. Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{2\cdot 1!}{1} + \frac{2^2\cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3\cdot 3!}{3^3} + \frac{2^n n!}{n^n} + \dots\,.$$

Řešení:
Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = 2\mathrm{e}^{-1} < 1\,.$$

Proto daná řada konverguje.

Příklad 18 Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{3\cdot 1!}{1} + \frac{3^2\cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3\cdot 3!}{3^3} + \frac{3^n n!}{n^n} + \dots\,.$$

Řešení:
Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = 3\mathrm{e}^{-1} > 1\,.$$

Proto daná řada diverguje.

Příklad 19. Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{(1!)^1}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^8} + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \dots\,.$$

Řešení:

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\big((n+1)!\big)^2}{2^{n^2+2n+1}} \cdot \frac{2^{n^2}}{\big(n!\big)^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 < 1\,.$$

Tedy daná řada konverguje.

Příklad 20. Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots\,.$$

Řešení:
Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1000+n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1\,.$$

Tedy daná řada konverguje.

Příklad 21. Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots\,.$$

Řešení:
Jedná se o řadu s nezápornými členy. Abychom zjistili její konvergenci, lze použít limitní podílové kritérium. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4}\,.$$

Tedy daná řada konverguje.

Příklad 22. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

Řešení:
Protože $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\big(\ln(\ln n)\big)/n}$ a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x \ln x} = 0$, je $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = 1$. Tedy protože $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$, řada $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ diverguje.

Příklad 23. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$.

Řešení:
Jedná se o řadu s nezápornými členy. V tomto případě lze k určení její konvergence použít limitní odmocninové kritérium. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n + 3^n}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2/3\right)^n + 1}} = \frac{1}{3} < 1\,,$$

daná řada konverguje.

Příklad 24. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

Řešení:
Jedná se o řadu s nezápornými členy. V tomto případě lze k určení její konvergence použít limitní odmocninové kritérium. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n-1} = \mathrm{e}^{-2} < 1\,,$$

řada $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ konverguje.

Příklad 25. Pro která $p \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$?

Řešení:
Jedná se o řadu s nezápornými členy. Uvažujme funkci $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^p x}$. Její derivace je $f'(x) = -\dfrac{p + \ln x}{x^2 \ln^{p+1} x}$. Protože pro velká x je $f'(x) < 0$, je tato funkce od jistého x_0 klesající. Limita $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} = 0$. Můžeme tedy použít integrální kritérium. Podle něj konverguje daná řada společně s integrálem $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^p x}$. Když zavedeme substituci $\ln x = y$ zjistíme, že řada konverguje současně s integrálem $\displaystyle\int_{y_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^p}$, který konverguje pro $p > 1$ a diverguje pro $p \le 1$. Tedy daná řada konverguje také pro $p > 1$ a diverguje pro $p \le 1$.

Příklad 26. V závislosti na parametrech $p, q \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\big(\ln n\big)^p \big(\ln(\ln n)\big)^q}$.

Řešení:

Jedná se o řadu s nezápornými členy. Uvažujme funkci $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^p x \cdot \ln^q\big(\ln x\big)}$. Její derivace je $f'(x) = -\dfrac{\ln x \cdot \ln(\ln x) + p \ln(\ln x) + q}{x^2 \ln^{p+1} x \cdot \ln^{q+1}\big(\ln x\big)}$ je pro dostatečně velká x záporná. Tedy pro dostatečně velká x je funkce $f(x)$ klesající. Protože $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x \ln^p x \cdot \ln^q\big(\ln x\big)} = 0$, můžeme použít integrálního kritéria. Podle něj konverguje daná řada současně s integrálem $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^p x \cdot \ln^q\big(\ln x\big)}$. V tomto integrálu zavedeme substituci $\ln x = y$. Po ní zjistíme, že daná řada konverguje současně s integrálem $\displaystyle\int_{y_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^p \ln^q}$. Tento integrál konverguje pro $p > 1$ a diverguje pro $p < 1$. Pro $p = 1$ máme integrál $\displaystyle\int_{y_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y \ln^q y}$, který konverguje pro $q > 1$ a diverguje pro $q \leq 1$. Tedy daná řada konverguje pro $p > 1$ nebo $p = 1$ a $q > 1$ a diverguje pro $p < 1$ nebo $p = 1$ a $q \leq 1$.

Cvičení 22 — **Číselné řady s obecnými členy**

Příklad 1. Vyšetřujte konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

Řešení:
Jedná se o alternující řadu. Nejprve budeme vyšetřovat, zda tato řada konverguje absolutně. Podle limitního odmocninového kritéria dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+100}{3n+1}=\frac{2}{3}<1\,.$$

Proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(1-)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ konverguje a to dokonce absolutně.

Příklad 2. Vyšetřujte konvergenci řady

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\dots\,.$$

Řešení:
Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ je harmonická řada, není daná řada absolutně konvergentní. Daná řada není ani alternující. Ale když seskupíme tři po sobě jdoucí členy, dostaneme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{27n^2-18n+2}{3n(3n-1)(3n-2)}\,,$$

která již je alternující. Protože $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}\right)=0$, stačí k důkazu konvergence dané řady dokázat, že posloupnost $a_n=\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}$ je klesající. Ale to je zcela zřejmé. Proto daná řada konverguje neabsolutně.

Příklad 3. Vyšetřujte konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

Řešení:
Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$ diverguje, nekonverguje daná řada absolutně. Ale jedná se o alternující řadu. Proto se můžeme k důkazu její konvergence pokusit použít Leibnizova kritéria. Protože $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+100}=0$, stačí dokázat, že posloupnost $a_n=$

$\dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$ je od jistého n_0 klesající. Uvažujme funkci $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$. Její derivace $f'(x) = \dfrac{100-x}{2\sqrt{x}(x+100)^2}$ je pro $x \geq 101$ záporná, a tedy pro $x \geq 101$ je funkce $f(x)$ klesající. Proto je pro $n \geq 101$ klesající i posloupnost $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$. Z Leibnizova kritéria tedy plyne, že řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ konverguje neabsolutně.

Příklad 4. Vyšetřujte konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Řešení:
Protože $|a_n| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right| \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$ a řada $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ diverguje, nekonverguje daná řada absolutně. Protože se jedná o alternující řadu, můžeme se k důkazu její konvergence pokusit použít Leibnizova kritéria. Protože $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} = 0$, stačí dokázat, že posloupnost $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ je monotonní. Protože je $\dfrac{1}{\sqrt{2n}+1} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}-1}$, je $b_{2n} < b_{2n+1}$. Ale na druhé straně platí nerovnost $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}-1} > \dfrac{1}{\sqrt{2n+2}+1}$, ze které plyne, že $b_{2n+1} > b_{2n+2}$. Proto není posloupnost b_n monotonní. Protože nejsou splněný předpoklady Leibnizova kritéria, nelze pomocí něj rozhodnout o konvergenci nebo divergenci této řady. Ale platí

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n}+1} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}-1}\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}-2}{\left(\sqrt{2n}+1\right)\left(\sqrt{2n+1}-1\right)}\,.$$

To už je řada, jejíž členy nemění znaménka. Protože je

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}-2}{\left(\sqrt{2n}+1\right)\left(\sqrt{2n+1}-1\right)}\right) = -1$$

a řada $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje, diverguje také řada $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Příklad 5. Vyšetřujte absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

Řešení:
Protože řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ konverguje pro $p > 1$ a diverguje pro $p \leq 1$, konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ absolutně pro $p > 1$.
Pro $p \leq 0$ není $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ rovna nule, a proto pro $p \leq 0$ řada diverguje.
Pro $0 < p \leq 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$ a platí $\dfrac{1}{n^p} > \dfrac{1}{(n+1)^p}$. Proto podle Leibnizova kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ konverguje pro $0 < p \leq 1$ neabsolutně.

Příklad 6. Vyšetřujte absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}$.

Řešení:
Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^p \cdot \dfrac{1}{n^{p+1/n}} \right) = 1$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ konverguje pro $p > 1$, konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}$ pro $p > 1$ absolutně.
Pro $p \leq 0$ není $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}$ rovna nule, a proto pro $p \leq 0$ řada diverguje.
Pro $0 < p \leq 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{p+1/n}} = 0$. Abychom ukázali, že pro tato p řada konverguje, stačí podle Leibnizova kritéria ukázat, že je posloupnost $a_n = \dfrac{1}{n^{p+1/n}}$ od jistého n klesající. Uvažujme funkci $f(x) = \dfrac{1}{x^{p+1/x}}$. Její derivace $f'(x) = \dfrac{1}{x^{p+1/x}} \cdot \dfrac{-px + \ln x - 1}{x^2}$ je pro dostatečně velká x záporná. Proto pro taková x je funkce $f(x)$ klesající. Proto je pro dostatečně velká n posloupnost $a_n = \dfrac{1}{n^{p+1/n}}$ klesající, a tedy daná řada konverguje pro $0 < p \leq 1$ neabsolutně.

Příklad 7. V závislosti na $x \in \mathbb{R}$ vyšetřujte absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2^n \sin^{2n} x}{n}$.

Řešení:
Nejdříve budeme zkoumat absolutní konvergenci řady. K tomu lze použít například limitního podílového kritéria. Protože je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} \sin^2 x = 2 \sin^2 x \,,$$

řada konverguje absolutně pro $\left|\sin x\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, tj. pro $x \in \left(\frac{4k-1}{4}\,\pi, \frac{4k+1}{4}\,\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
Pro $x \in \left(\frac{4k+1}{4}\,\pi, \frac{4k+3}{4}\,\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, je $\left|\sin x\right| > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Proto není $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1}\frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$ rovna nule. Tedy pro $x \in \left(\frac{4k+1}{4}\,\pi, \frac{4k+3}{4}\,\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, řada diverguje.
Pro $x = \frac{2k+1}{4}\,\pi$ se jedná o řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, která konverguje neabsolutně.

Příklad 8. Ze znalosti součtu řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ najděte součty řady

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

získaných z této řady záměnou jejích členů
Řešení:
Protože se jedná o součet řady, která vzniká z neabsolutně konvergentní řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, závisí součet této řady na pořadí jejích členů. V našem případě je

$$\begin{aligned} &1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4n+1}+\quad 0 \quad+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}+\dots=\\ &=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+4}+\dots+\\ &+0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\dots+\quad 0 \quad+\frac{1}{4n+2}+\quad 0 \quad-\frac{1}{4n+4}+\dots \end{aligned}$$

Tedy součet této řady je $s = \ln 2 + \frac{1}{2}\,\ln 2 = \frac{3}{2}\,\ln 2$.

Příklad 9. Ze znalosti součtu řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ najděte součty řady

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

získaných z této řady záměnou jejích členů
Řešení:
Protože se jedná o součet řady, která vzniká z neabsolutně konvergentní řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, závisí součet této řady na pořadí jejích členů. V našem případě je

$$
\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}+\ldots=\\
&=1+0-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+0-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n+1}+0-\frac{1}{2n+2}+\ldots+\\
&+0-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+0-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots+0-\frac{1}{2(2n+1)}+\frac{1}{2(2n+2)}+\ldots
\end{aligned}
$$

Tedy součet této řady je $s = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$.

V předcházejících případech jste si mohli všimnout, že pro alternující řady hrálo velkou roli Leibnizovo kritérium konvergence. Toto kritérium je speciálním případem obecnějšího *Abelova kritéria* konvergence, které nyní dokážeme. Nejprve odvodíme jeden vztah pro konečný součet posloupnosti, jejíž členy jsou součinem dvou posloupností. Tato metoda sčítání se nazývá *Abelova parciální sumace*. Pro každá přirozená n a k a každé dvě posloupnosti a_n a b_n označíme $s_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} a_{n+i}$. Pak je $a_{n+i} = s_{n,i} - s_{n,i-1}$ (pro $i < 0$ klademe $s_{n,i} = 0$). Pak ale je

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} a_{n+i}b_{n+i} &= \sum_{i=0}^{k}\big(s_{n,i} - s_{n,i-1}\big)b_{n+i} = \sum_{i=0}^{k} s_{n,i}b_{n+i} - \sum_{i=1}^{k} s_{n,i-1}b_{n+i} =\\
&= \sum_{i=0}^{k-1} s_{n,i}\big(b_{n+i} - b_{n+i+1}\big) + s_{n,k}b_{n+k}b_{n+k}\,.
\end{aligned}
$$

Platí *Abelovo kritérium* konvergence: Jestliže má posloupnost a_n omezené součty $s_{n,k}$, tj. existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé přirozené n a k je $\big|s_{n,k}\big| \le K$, posloupnost b_n je monotonní a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Jestliže totiž označíme pro pevné $n \in \mathbb{N}$ součet $S_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} a_{n+i}b_{n+i}$ pak je

$$
\begin{aligned}
\big|S_{n,k}\big| &= \left|\sum_{i=0}^{k} s_{n,i}\big|b_{n+i} - b_{n+i+1} + s_{n,k}b_{n+k}\right| \le\\
&\le \sum_{i=0}^{k-1}\big|s_{n,i}\big|\cdot\big|b_{n+i} - b_{n+i+1}\big| + \big|s_{n,k}\cdot\big|b_{n+k}\big| \le\\
&\le K\left(\sum_{i=1}^{k-1}\big|b_{n+i} - b_{n+i+1}\big| + \big|b_{n+i}\big|\right).
\end{aligned}
$$

Protože je posloupnost b_n monotonní, mají výrazy $b_{n+i} - b_{n+i+1}$ stále stejná znaménka. Proto je $\sum_{i=1}^{k-1}\left|b_{n+i}-b_{n+i+1}\right|=\left|b_n-b_{n+k}\right|$. Tedy

$$\left|S_{n,k}\right|\le K\Bigl(\left|b_n-b_{n+k}\right|+\left|b_{n+k}\right|\Bigr)\,.$$

Protože je posloupnost b_n monotonní, platí pro každé k nerovnost $\left|S_{n,k}\right|\le 3K\left|b_n\right|$. Protože je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, je $\lim\limits_{n\to\infty}\left|S_{n,k}\right|=0$ nezávisle na k. Proto konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$.

Příklad 10. Vyšetřujte konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^{100} n}{n}\sin\dfrac{n\pi}{4}$.

Řešení:
Označme a_n a b_n posloupnosti $a_n=\sin\dfrac{n\pi}{4}$ a $b_n=\dfrac{\ln^{100} n}{n}$. Protože pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $a_{n+8}=a_n$ a $a_1=a_3=-a_5=-a_7=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $a_2=-a_6=1$ a $a_4=a_8=0$, je $\left|s_{n,k}\right|=\left|\sum\limits_{i=0}^{k}\sin\dfrac{(n+i)\pi}{4}\right|\le\sqrt{2}+1$. Podle Abelova kritéria stačí k důkazu konvergence dané řady dokázat, že posloupnost $b_n=\dfrac{\ln^{100} n}{n}$ má limitu nula a je od jistého n_0 klesající. Označme $f(x)=\dfrac{\ln^{100} x}{x}$. Pomocí l'Hospitalova pravidle snadno ukážeme, že $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{100} x}{x}=0$. Protože derivace této funkce $f'(x)=\dfrac{100-\ln x}{x^2}$ je pro $x\ge \mathrm{e}^{101}$ záporná, je funkce $f(x)$ pro $x\ge\mathrm{e}^{101}$ klesající. Proto je pro $n\ge\mathrm{e}^{101}$ klesající i posloupnost b_n. Tedy posloupnosti $a_n=\sin\dfrac{n\pi}{4}$ a $b_n=\dfrac{\ln^{100} n}{n}$ splňují předpoklady Abelova kritéria, a proto řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^{100} n}{n}\cdot\sin\dfrac{n\pi}{4}$ konverguje.

Příklad 11. Vyšetřujte konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin^2 n}{n}$.

Řešení:
Označme posloupnost $a_n=(-1)^n\sin^2 n$ a posloupnost $b_n=\dfrac{1}{n}$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$ a posloupnost b_n je klesající, stačí k důkazu konvergence dané řady ukázat, že je omezená posloupnost součtů $s_{n,k}=\sum\limits_{j=0}^{k}a_{n+j}=\sum\limits_{j=0}^{k}(-1)^{n+j}\sin^2(n+j)$. Protože je

$$\sin^2(n+j)=\frac{1}{2}\bigl(1-\cos 2(n+j)\bigr)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\bigl(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+j)}\bigr)\,,$$

Dostaneme pro $s_{n,k}$ vztah

$$
\begin{aligned}
s_{n,k} &= \frac{(-1)^n}{2}\mathrm{Re}\left(\sum_{j=0}^{k}\big((-1)^j - (-1)^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+j)}\big)\right) = \\
&= \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1-(-1)^k}{2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n}\frac{1-(-1)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}\right).
\end{aligned}
$$

Z této rovnosti získáme odhad $\left|s_{n,k}\right| \leq \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{2}{1-\cos 1}\right) = K$. Tedy protože jsou součty $\left|s_{n,k}\right| \leq K$, konverguje řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ podle Abelova kritéria.

Cvičení 23 — **Mocninné řady**

Příklad 1.
Najděte poloměr a interval konvergence mocninné řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$, kde $p \in \mathbb{R}$.

Řešení:
Poloměr konvergence dané řady najdeme ze vztahu

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{n^p} = 1\,.$$

Protože střed konvergence je $x_0 = 0$, je interval konvergence $(-1, 1)$.

Příklad 2.
Najděte poloměr a interval konvergence mocninné řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$.

Řešení:
Poloměr konvergence dané řady najdeme ze vztahu

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot\big(3^n + (-2)^n\big)}{n\cdot\big(3^{n+1} + (-2)^{n+1}\big)} = \frac{1}{3}\,.$$

Protože střed konvergence je $x_0 = -1$, je interval konvergence $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}\right)$.

Příklad 3.
Najděte poloměr a interval konvergence mocninné řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n$, kde $a \in (0, 1)$.

Řešení:
Poloměr konvergence dané řady najdeme ze vztahu $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, protože $0 < a < 1$. Protože poloměr konvergence této mocninné řady je $R = \infty$, je interval konvergence mocninné řady $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Příklad 4.
Najděte poloměr a interval konvergence mocninné řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$,
kde $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ a $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)$.
Řešení:

Poloměr konvergence dané řady najdeme ze vztahu

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} 2\,\frac{2n+2}{2n+1} = 2\,.$$

Protože střed konvergence je $x_0 = 1$, je interval konvergence $(-1, 1)$.

Příklad 5.
Najděte poloměr a interval konvergence mocninné řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$, kde a, $b > 0$

Řešení:
Poloměr konvergence dané řady najdeme ze vztahu

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \max(a, b)\,.$$

Protože střed konvergence je $x_0 = 0$, je interval konvergence $(-R, R)$.

Příklad 6.
Najděte poloměr a interval konvergence mocninné řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(3 + (-1)^n\big)^n}{n}\, x^n$.

Řešení:
V tomto případě neexistuje $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + (-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$. Proto použijeme obecného vztahu $\dfrac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 4$. Protože střed konvergence mocninné řady je $x_0 = 0$, je interval konvergence $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$.

Příklad 7. Najděte oblast konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

Řešení:
Jestliže označíme $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, dostaneme mocninnou řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2n+1}$. Její interval konvergence je $|y| < 1$. Tedy řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ konverguje pro $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right| < 1$ a diverguje pro $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right| > 1$. Je-li $\dfrac{1-x}{1+x} = 1$, řada diverguje (podle integrálního

kritéria) a pro $\dfrac{1-x}{1+x} = -1$ řada konverguje (neabsolutně). Tedy oblast konvergence je dána nerovnostmi $-1 \le \dfrac{1-x}{1+x} < 1$, tj. $x > 0$.

Příklad 8. Najděte oblast konvergence řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} \mathrm{e}^{-nx}$.

Řešení:

Jestliže označíme $y = \mathrm{e}^{-x}$, dostaneme mocninnou řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} y^n$, která konverguje pro $|y| < \mathrm{e}$ a diverguje pro $|y| > \mathrm{e}$. Tedy daná řada konverguje pro $\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}$, tj. pro $x > -1$ a diverguje pro $x < -1$. Pro $x = -1$ se jedná o číselnou řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \mathrm{e}^{n}$. Ale protože $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} \mathrm{e}^{n} = \sqrt{\mathrm{e}} \neq 0$, řada pro $x = -1$ diverguje. Obor konvergence tedy je množina $x > -1$.

Příklad 9. Rozviňte funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$.

Řešení:

Protože pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $\displaystyle\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, je $\displaystyle\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n}$.

Příklad 10. Rozviňte funkci $f(x) = \cos^2$ do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$.

Řešení:

Platí rovnost $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}\big(1+\cos 2x\big)$. Protože pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $\displaystyle\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$, je $\displaystyle\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,(2x)x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{(2n)!}\, x^{2n}$, a tedy $\displaystyle\cos^2 x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!}\, x^{2n}$.

Příklad 11. Rozviňte funkci $f(x) = \dfrac{x^{10}}{1-x}$ do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$.

Řešení:

Protože pro $|x| < 1$ je $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, platí pro $|x| < 1$ rovnost $\dfrac{x^{10}}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{10+n} = \sum_{n=10}^{\infty} x^n$.

Příklad 12. Rozviňte funkci $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$.

Řešení:

Pro $|x| < 1$ platí rovnost $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big)$. Ze známého vztahu $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, který platí pro $|x| < 1$, dostaneme rozvoj $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Příklad 13. Rozviňte funkci $f(x) = \dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$ do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$.

Řešení:

Rozložíme-li funkci $f(x)$ na parciální zlomky, dostaneme $f(x) = \dfrac{12-5x}{6-5x-x^2} = \dfrac{6}{x+6} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{1+x/6} + \dfrac{1}{1-x}$. Jestliže použijeme známý rozvoj obou funkcí do geometrické řady, dostaneme $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{6}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n$. Protože použité rozvoje platí pro $\left|\dfrac{x}{6}\right| < 1$ a $|x| < 1$, platí tento rozvoj na množině $|x| < 1$.

Příklad 14. Rozviňte funkci $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$ do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$.

Řešení:

Jestliže napíšeme $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2} = \dfrac{1-x}{1-x^3}$, lze pro $|x| < 1$ použít rozvoj $\dfrac{1}{1-x^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$. Tedy pro $|x| < 1$ lze psát $\dfrac{1}{1+x+x^2} = (1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, kde $c_{3k} = 1$, $c_{3k+1} = -1$ a $c_{3k+2} = 0$, což lze zapsat jako $\dfrac{1}{1+x+x^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin\frac{2(n+1)\pi}{3}$.

Příklad 15. Najděte rozvoj funkce $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$ do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$.

Řešení:

Protože derivace funkce $f(x)$ je $f'(x) = 1 + \ln(1+x)$, lze pro $|x| < 1$ psát $f'(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+2}}{n} x^n$. Její integrací dostaneme $(1+1)\ln(1+x) = C + x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} x^{n+1}$. Po dosazení $x = 0$ dostaneme $C = 0$. Tedy pro $|x| < 1$ je $(1+x)\ln(1+x) = x + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

Příklad 16. Najděte rozvoj funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{2-x^2}$ do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$.

Řešení:

Derivace funkce $f(x)$ je $f'(x) = \dfrac{4+2x^2}{4+x^4} = \dfrac{1+x^2/2}{1+x^4/4}$. Jestliže použijeme rozvoj do geometrické řady, lze pro $|x| < \sqrt{2}$ psát $f'(x) = \left(1 + \dfrac{x^2}{2}\right) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n} x^{4n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n} x^{4n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2 \cdot 4^n} x^{4n+2}$. Integrací této rovnosti a s použitím toho, že $f(0) = 0$, dostaneme $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n(4n+1)} x^{4n+1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}(4n+3)} x^{4n+3}$, což platí pro $|x| < \sqrt{2}$. Lze se snadno přesvědčit, že tento výraz lze psát ve tvaru $\operatorname{arctg} \dfrac{2x}{2-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{[n/2]} \dfrac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}$, kde $[n/2]$ je celá část čísla $\dfrac{n}{2}$.

Příklad 17. Najděte rozvoj funkce $f(x) = \ln \dfrac{1}{2+2x+x^2}$ do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = -1$.

Řešení:

Označme $y = x - x_0 = x + 1$. Pak dostaneme $f(y) = -\ln\bigl(1 + y^2\bigr)$. Použijeme-li známého rozvoje $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, který platí pro $|x| < 1$, dostaneme

$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, y^{2n}$. Po zpětné substituci dostaneme, že pro $x \in (-2, 0)$ platí $f(x) = \ln \dfrac{1}{2+2x+x^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,(x+1)^{2n}$.

Příklad 18. Rozviňte funkci $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ do mocninné řady v proměnné $\dfrac{1}{x}$.

Řešení:
Zavedeme novou proměnnou $y = \dfrac{1}{x}$. Pak platí $f(y) = -\dfrac{y}{1-y}$. Rozvineme-li tuto funkci do mocninné řady, dostaneme vztah $f(y) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y^n$, který platí pro $|y| < 1$. Zpětnou substitucí získáme vztah $\dfrac{1}{1-x} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$, který platí pro $|x| > 1$.

Příklad 19. Rozviňte funkci $f(x) = \ln x$ do mocninné řady v proměnné $\dfrac{x-1}{x+1}$.

Řešení:
Zavedeme novou proměnnou $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. Z tohoto vztahu plyne $x = \dfrac{1+y}{1-y}$. Pak dostaneme $\ln x = \ln \dfrac{1+y}{1-y} = \ln(1+y) - \ln(1-y)$. Použijeme-li známé vyjádření logaritmu pomocí řad, dostaneme, že pro $|y| < 1$ platí $\ln \dfrac{1+y}{1-y} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$. Po zpětné substituci dostaneme $\ln x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$, který platí pro $x > 0$ a $-1 < \dfrac{x-1}{x+1} < 1$, tj. pro $x > 0$.

Příklad 20. Rozviňte do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$ funkci $f(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.

Řešení:
Jestliže použijeme rozvoj funkce e^x do mocninné řady, dostaneme integrand ve tvaru $\mathrm{e}^{-t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, t^{2n}$. Protože poloměr konvergence této mocninné řady je $R = \infty$, platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ vztah $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Příklad 21. Rozviňte do mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$ funkci $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Řešení:

Pro $t| < 1$ je $\operatorname{arctg} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, t^{2n+1}$. Tedy pro $|x| < 1$ platí rovnost $f(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\, x^{2n+1}$.

Cvičení 24 — **Sčítání řad. Výpočet určitých integrálů pomocí řad**

Příklad 1. Nalezněte součet řady $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$.

Řešení:

Podle podílového kritéria řada konverguje. Jestliže budeme psát $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}\,2^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}\,2^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)!} + \mathrm{e}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n!} + \mathrm{e}^2 = 3\mathrm{e}^2$, kde jsme využili toho, že $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

Příklad 2. Najděte součet řady $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

Řešení:

Uvedenou řadu zapíšeme ve tvaru $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{2n+1}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2}$, kde jsme využili řad pro $\cos x$ a $\sin x$.

Příklad 3. Najděte součet řady $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}\,x^n$.

Řešení:

Abychom mohli použít řadu $\displaystyle\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, řadu upravíme. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}\,x^n &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} + \mathrm{e}^{x/2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} + \mathrm{e}^{x/2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} + \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{x/2} = \left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)\mathrm{e}^{x/2}.\end{aligned}$$

Příklad 4. Najděte součet řady $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!}\, x^n$.

Řešení:
Abychom mohli použít součtů známých řad, napíšeme $n^2 = \frac{1}{4}\,(2n+1)(2n) - \frac{1}{4}\,(2n+1) + \frac{1}{4}$. Tím dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!}\, x^n = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n)}{(2n+1)!}\, x^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n+1)!}\, x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, x^n\,.$$

Protože pro $x > 0$ je $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$, je pro $x > 0$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!}\, x^n =& \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n+2} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n} + \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n} = \frac{x+1}{4\sqrt{x}}\,\sinh\sqrt{x} - \frac{\cosh\sqrt{x}}{4}\,.\end{aligned}$$

Pro $x < 0$ je $x = -\left(\sqrt{|x|}\right)^2$. Tedy pro $x < 0$ dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!}\, x^n =& \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(\sqrt{|x|}\right)^{2n+2} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sqrt{|x|}\right)^{2n} + \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\sqrt{|x|}\right)^{2n} = \frac{x+1}{4\sqrt{|x|}}\,\sin\sqrt{|x|} - \frac{\cos\sqrt{|x|}}{4}\,.\end{aligned}$$

Příklad 5. Najděte součet řady $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Řešení:
Řada konverguje pro $|x| < 1$. Označme její součet $f(x)$. Pro $|x| < 1$ dostaneme derivováním vztah $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$. Integrací dostaneme pro $|x| < 1$ vztah $f(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$, kde C je reálná konstanta. Dosazením bodu $x = 0$ dostaneme $C = 0$. Tedy pro $|x| < 1$ je $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$.

Příklad 6. Najděte součet řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

Řešení:

Řada konverguje pro $|x| \le 1$. Označme její součet $f(x)$. Vynásobíme-li tuto funkci proměnnou x a dvakrát derivujeme, dostaneme pro $|x| < 1$ vztahy $\big(xf(x)\big)' = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ a $\big(xf(x)\big)'' = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. Integrací dostaneme pro $|x| < 1$ vztah $\big(xf(x)\big)' = -\ln(1-x) + C$. Dosazení bodu $x = 0$ dává $C = 0$, tj. $\big(xf(x)\big)' = -\ln(1-x)$. Další integrace nás vede k tomu, že pro $|x| < 1$ platí $xf(x) = (1-x)\ln(1-x) + x + C$, kde C je konstanta. Dosazení $x = 0$ dává $C = 0$. Tedy pro $|x| < 1$, $x \neq 0$ dostaneme $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$. Pomocí l'Hospitalova pravidla se lze přesvědčit, že $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Protože řada konverguje také v bodech $x = \pm 1$, je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (což jsme věděli dříve) a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 1 - 2\ln 2$ (což jsme zatím nevěděli).

Příklad 7. Najděte součet řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 x^n$.

Řešení:

Tato řada konverguje pro $|x| < 1$. Na tomto intervalu ji lze proto integrovat člen po členu. Ale abychom dostali integrací řadu, jejíž součet známe (geometrickou řadu), nejprve ji trochu upravíme. Označme součet řady $f(x)$. Tuto funkci vydělíme proměnnou x a dostaneme $\displaystyle\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 x^{n-1}$. Pro $|x| < 1$ je její primitivní funkce $g(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n$. Abychom získali geometrickou řadu, vydělíme funkci $g(x)$ proměnnou x a integrujeme. Takto dostaneme pro $|x| < 1$ vztah $\displaystyle\int \frac{g(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n = \frac{x}{1+x}$. Nyní přejdeme zpět k funkci $f(x)$. Nejprve derivací dostaneme $\displaystyle\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{(1+x)^2}$, tj. $g(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(1+x)^2}$. Podobným způsobem získáme $\displaystyle\frac{f(x)}{x} = \frac{1-x}{(1+x)^3}$, a tedy pro $|x| < 1$ je $f(x) = \displaystyle\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$.

Příklad 8. Najděte součet řady $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}\, x^{2n}$.

Řešení:
Tato řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Označíme-li její součet $f(x)$, platí pro každé $\in \mathbb{R}$ rovnost $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = x\mathrm{e}^{x^2}$. Tedy $f(x) = \bigl(x\mathrm{e}^{x^2}\bigr)' = \bigl(2x^2+1\bigr)\mathrm{e}^{x^2}$.
Tuto řadu jsme mohli sečíst také bez použití integrace. Platí totiž

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}\, x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{x^2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n!} = \mathrm{e}^{x^2} + 2x^2\mathrm{e}^{x^2}\,.$$

Příklad 9. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení:
Tento integrál lze najít tak, že integrovanou funkci rozvineme do vhodné řady a zaměníme pořadí sumy a integrace. Pro $|x| < 1$ je $\displaystyle\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Když použijeme tuto řadu, dostaneme $\displaystyle\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^n \ln x\,\mathrm{d}x$.
Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí na intervalu $(0,1)$ nerovnost $\bigl|x^n \ln x\bigr| \le \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$, lze ukázat, že můžeme zaměnit pořadí sumu a integrace. Proto je $\displaystyle\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^n \ln x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$, kde jsme použili toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}$.
Abychom sečetli tuto řadu, rozložíme sčítance na parciální zlomky. Snadno se přesvědčíme, že platí $\dfrac{1}{n(n+1)^2} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Z toho dostaneme $\displaystyle\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

V posledním součtu jsme použili známého součtu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Obdobné součty se objevují při sčítání mocninných řad poměrně často, ale odvodit je, není bez použití jiných matematických prostředků, např. Fourierovy řady nebo funkce komplexní proměnné, snadné.

Příklad 10. Najděte integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$.

Řešení:
Tento integrál lze najít také tak, že integrovanou funkci rozvineme do řady v proměnné e^{-x}. Protože pro $x>0$ je $\mathrm{e}^x>1$, nelze přímo rozvinout funkci $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ pomocí proměnné e^x, ale musíme napsat $\displaystyle\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-(n+1)x}$.
Tedy platí $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}=\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x\mathrm{e}^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x$. Opět lze dokázat (v tomto případě se použije jistá věta z teorie Lebesgueova integrálu, který je pro limitní přechody podstatně vhodnější než integrál Riemannův), že lze zaměnit pořadí sčítání a integrace. Protože pro každé $n\in\mathbb{N}$ je $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2}$, dostaneme $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. Tento součet lze psát jako

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{=}\frac{\pi^2}{6}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}\,.$$

Tedy $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}=\frac{\pi^2}{12}$.
