

# PŘEDNÁŠKA 1

---

## ČÍSELNÉ OBORY

# 1.1 Základní poznatky o množinách

**Množinou** budeme rozumět souhrn libovolných objektů. Množinu považujeme za **určenou**, je-li možno o každém objektu jednoznačně rozhodnout, zda do ní patří, či nikoli. Každý z objektů, který patří do dané množiny, se nazývá jejím **prvkem (elementem)**. Množiny budeme značit velkými písmeny latinské abecedy, např. **A**, **B**, **M**, apod., prvky množin budeme značit malými písmeny, např.  $a$ ,  $b$ ,  $x$ , apod. Skutečnost, že  $a$  **je prvkem (elementem) množiny A**, vyjadřujeme zápisem  $a \in \mathbf{A}$ . Není-li určitý objekt  $b$  prvkem množiny **A**, píšeme  $b \notin \mathbf{A}$ .

Obsahuje-li daná množina alespoň jeden prvek, nazývá se **neprázdná množina**; neobsahuje-li žádný prvek, nazývá se **prázdná množina** a značí se symbolem  $\emptyset$ . Množina, která má konečný počet prvků (tj. množina, která je prázdná, nebo je počet jejích prvků dán přirozeným číslem - viz část 1.1.2), se nazývá **konečná množina**; každá množina, která není konečná, se nazývá **nekonečná**.

Je-li množina **A** konečná, můžeme ji určit **výčtem** jejích prvků, které bez ohledu na pořadí vypíšeme a uzavřeme do složených závorek { }, například  $\mathbf{A} = \{1, 3, 5, 7\}$ .

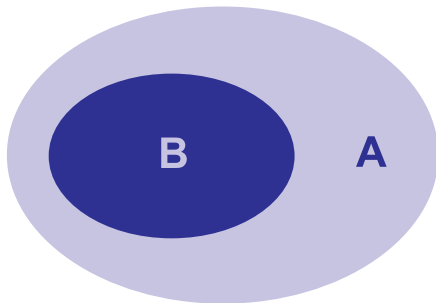
Konečnou i nekonečnou množinu můžeme dále určit **charakteristickou vlastností**, tj. takovou vlastností, kterou mají právě jen prvky zadávané množiny. Zjišťování uvažované vlastnosti se přitom provádí v tzv. **základní (univerzální) množině U**, která obsahuje všechny objekty, které nás v dané situaci zajímají. Budeme například psát:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{U}; V(x)\}$$

a říkat: „**A** je množina všech  $x$  z množiny **U**, pro která platí (která mají vlastnost)  $V(x)$ .“

## Množinové vztahy a operace

Množina **B** se nazývá **podmnožinou** množiny **A**, je-li každý prvek množiny **B** prvkem množiny **A**; píšeme  $B \subset A$ .



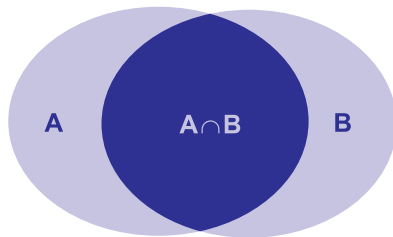
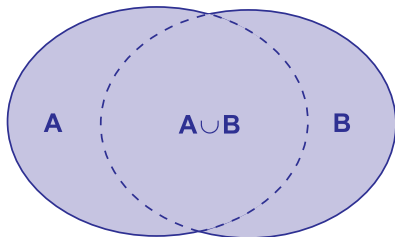
Například množina  $B = \{3, 5, 7, 9\}$  je podmnožinou množiny  $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ ; množina *všech pravouhlých* trojúhelníků je podmnožinou množiny *všech* trojúhelníků, apod.

Uvědomme si, že **každá množina je podmnožinou sebe sama**, tj. pro každou množinu **A** platí  $A \subset A$ . Rovněž platí, že **prázdná množina je podmnožinou každé množiny**, tj. pro každou množinu **A** platí:  $\emptyset \subset A$ .

Množiny **A**, **B** považujeme za **sobě rovné** (píšeme  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ), právě když  $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$  a zároveň  $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ , tj. skládají-li se z týchž prvků.

**Sjednocení**  $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$  množin **A**, **B** je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin **A**, **B**. Z definice ihned plyne, že sjednocení libovolné množiny **A** s prázdnou množinou je množina **A**, tj.  $\mathbf{A} \cup \emptyset = \mathbf{A}$ .

**Průnik**  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$  množin **A**, **B** je množina všech prvků, které patří zároveň do obou množin. Průnik každé množiny **A** s prázdnou množinou je zřejmě prázdná množina,  $\mathbf{A} \cap \emptyset = \emptyset$ . Množiny **A**, **B**, pro které platí  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$ , se nazývají **disjunktní**.



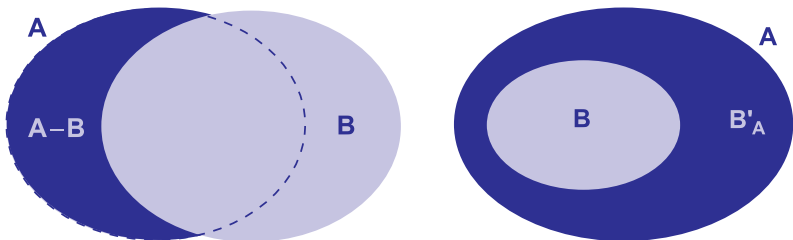
## ➔ Příklad

- Sjednocení množin:

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13\}$$

- Průnik množin:  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} = \{3, 5, 7\}$

**Rozdíl**  $A \setminus B$  množin  $A$ ,  $B$  je množina všech prvků množiny  $A$ , které nejsou prvky množiny  $B$ . Je-li speciálně  $B \subset A$ , hovoříme o **doplňku množiny  $B$  v množině  $A$**  a píšeme  $B'_A$ .



## ☞ **Příklad**

- *Rozdíl množin:*

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \setminus \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} = \{2, 4, 6, 8\}$$

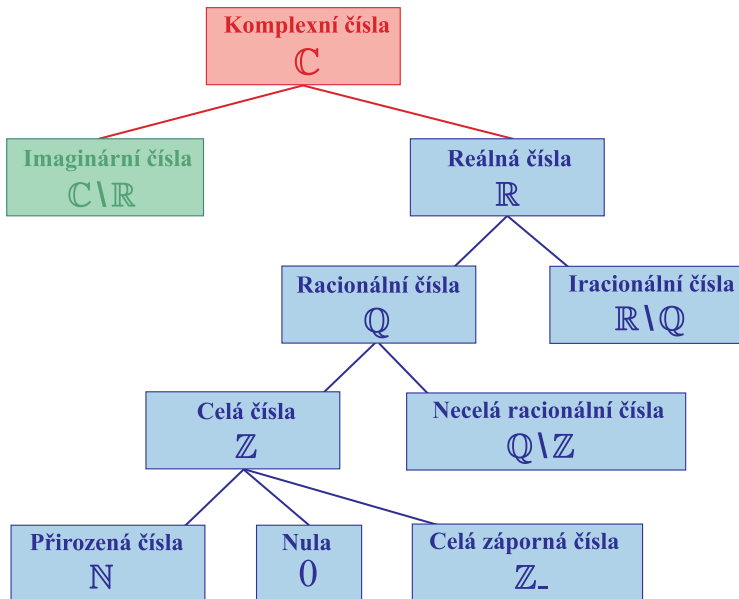
- *Doplněk množiny*

**B** = {3, 5, 7, 9} v množině **A** = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13}:

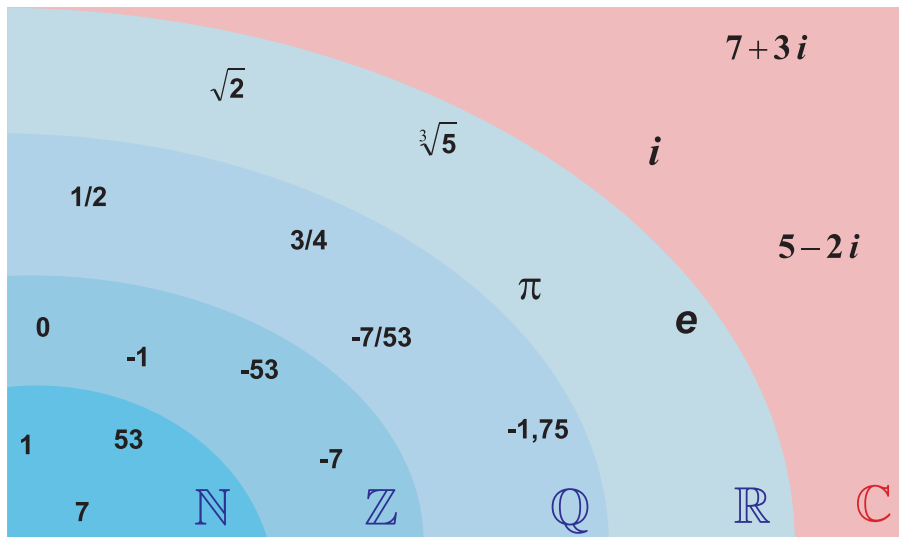
$$\mathbf{B}'_{\mathbf{A}} = \{1, 11, 13\}.$$

## 1.2 Druhy čísel

Zopakujme si, že jsme se již setkali s následujícími druhy čísel:





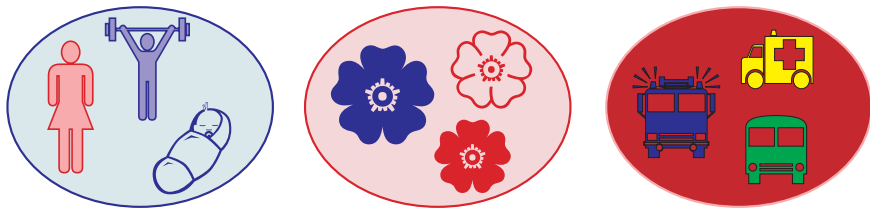


$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

## 1.2.1 Množina přirozených čísel

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Přirozená čísla slouží k vyjádření počtu osob, zvířat, předmětů aj., obecněji počtu prvků konečných neprázdných množin. Přirozené číslo - uvažujme například číslo 3 - můžeme chápat jako společnou vlastnost následujících množin:



Obor přirozených čísel je **uzavřený na sčítání a násobení**, není však **uzavřený na odčítání** (ne vždy je rozdíl dvou přirozených čísel přirozené číslo, např.  $2 - 5 = -3$ ) ani na dělení (např.  $2 : 5 = 0,40$  není přirozené číslo). V oboru přirozených čísel **k žádnému číslu neexistuje číslo opačné ani převrácené**.

Přirozená čísla jsme zvyklí zapisovat v **poziční číselné soustavě o základu deset**, neboli v **desítkové soustavě**. K tomu používáme deset číslic: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jejichž význam závisí na jejich umístění či pozici. Číslice zapisujeme za sebe v pořadí zprava doleva a postupně tak udáváme, kolik dané číslo obsahuje jednotek, desítek, stovek, tisíců, desetitisíců, statisíců, milionů, . . . , tedy nultých, prvních, druhých, . . . , šestých, . . . mocnin čísla 10. Jistě víte, že například skupina číslic

87 956

vyjadřuje číslo obsahující 6 jednotek, 5 desítek, 9 stovek, 7 tisíc a 8 desetitisíc:

$$\begin{aligned} & 8 \cdot 10\,000 + 7 \cdot 1\,000 + 9 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ = & 8 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 . \end{aligned}$$

Právě uvedený výraz se nazývá **rozvinutý zápis daného čísla v desítkové soustavě**, zápis 387 956 se nazývá **zkrácený**.

Obecně lze každé přirozené číslo  $a$  vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0,$$

neboli ve zkráceném zápisu

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0,$$

kde  $n$  je přirozené číslo nebo nula,  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  jsou některá z čísel  $0, 1, \dots, 9$ , přičemž  $a_n \neq 0$ . Číslo  $a_i$  se nazývá **číslice (cifra) řádu  $i$  čísla  $a$** , číslo  $10^i$  se nazývá **jednotka řádu  $i$** .

Kromě desítkové soustavy se často setkáváme i se soustavou šedesátkovou, dvojkovou a příležitostně i s některými dalšími.

## Axiom matematické indukce.

Nechť je  $U \subset \mathbb{N}$  taková, že  $1 \in U$ .

Jestliže z vlastnosti  $n \in U$  plyne  $(n + 1) \in U$ , pak  $U = \mathbb{N}$ .



### ⇐ **Příklad 1.1.**

Dokažte, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí rovnost

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (1.1)$$

**Řešení.** Označme  $U = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{pro } n \text{ platí (1.1)}\}$ .

**1. krok:**  $1 \in U$  :  $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$

**2. krok:**  $n \in U \Rightarrow (n+1) \in U$  :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \end{aligned}$$

to je právě vztah (1.1) pro  $n = n+1$ .  $\square$

## 1.2.2 Množina celých čísel

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Množina celých čísel je rozšířením množiny  $\mathbb{N}_0$  o množinu všech řešení rovnic tvaru

$$n_1 + x = n_2, \quad \text{kde } n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

## 1.2.3 Množina racionálních čísel

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n}, \text{ kde } z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Množina racionálních čísel je rozšířením množiny  $\mathbb{Z}$  o množinu všech řešení rovnic tvaru

$$z_1 x = z_2, \quad \text{kde } z_1, z_2 \in \mathbb{Z}.$$

## 1.2.4 Množina reálných čísel

$$\mathbb{R} = \{a_0.a_1a_2\dots a_n\dots, a_0 \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, \dots, 9\} \text{ pro } k \geq 1\},$$

kde ke každému  $n_0 \in \mathbb{N}$  existuje  $n > n_0$  takové, že  $a_n \neq 9$ .

Množina reálných čísel je tedy zavedena jako množina všech desetinných rozvoju, které nejsou zakončeny samými devítkami – jinak by např. číslo 1 mělo dva různé rozvoje,

$$1.000\dots \quad \text{a} \quad 0.999\dots,$$

a jeho vyjádření by nebylo jednoznačné:

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots + \frac{9}{10^n} + \dots = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = 1.$$



**Racionální čísla** představují pouze **periodické desetinné rozvoje**, kde existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  a  $k \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé přirozené  $n > n_0$  je  $a_{n+k} = a_n$  (jistá skupina čísel se neustále opakuje). Čísla, která neodpovídají periodickým desetinným rozvojem, se nazývají **iracionální čísla**.

**Uspořádání na množině  $\mathbb{R}$ .**

Řekneme, že reálné číslo

$$x = x_0.x_1x_2 \dots x_{n-1}x_nx_{n+1} \dots$$

je menší než reálné číslo

$$y = y_0.y_1y_2 \dots y_{n-1}y_ny_{n+1} \dots,$$

píšeme  $x < y$ , právě tehdy, když existuje  $n \in \mathbb{N}_0$  takové, že  $x_k = y_k$  pro  $k < n$  a  $x_n < y_n$ .

Chceme-li vyjádřit, že  $a < b$  nebo  $a = b$ , píšeme  $a \leq b$ ; je-li  $a > b$  nebo  $a = b$ , píšeme  $a \geq b$ .

Reálná čísla  $a > 0$  se nazývají **kladná čísla**,  $a < 0$  **záporná čísla**,  $a \geq 0$  **nezáporná čísla** a  $a \leq 0$  **nekladná čísla**.

## Vlastnosti uspořádání

↳ Pro každá dvě reálná čísla  $a, b$  platí právě jeden ze vztahů:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

↳ Pro každá tři reálná čísla  $a, b, c$  platí:

- Je-li  $a < b$  a zároveň  $b < c$ , pak  $a < c$ .
- Je-li  $a < b$ , pak  $a + c < b + c$ .
- Je-li  $a < b$  a zároveň  $c > 0$ , pak  $ac < bc$ .

↳ Pro každá čtyři reálná čísla  $a, b, c, d$  platí:

- Je-li  $a < b$  a zároveň  $c < 0$ , pak  $ac > bc$ .
- Je-li  $a < b$  a zároveň  $c < d$ , pak  $a + c > b + d$ .
- Je-li  $0 < a < b$  a zároveň  $0 < c < d$ , pak  $ac < bd$ .
- Je-li  $0 < a < b$ , pak  $1/a < 1/b$ .

## Geometrická reprezentace množiny reálných čísel

Reálná čísla jsme zvyklí znázorňovat pomocí **číselné osy**. To nám umožňuje následující tvrzení:

**Tvrzení 1.** *Existuje zobrazení množiny  $\mathbf{R}$  na přímku, které má tyto vlastnosti:*

- *Je vzájemně jednoznačné, tj. obrazem každého reálného čísla je právě jeden bod přímky a naopak, každý bod přímky je obrazem právě jednoho reálného čísla.*
- *Jsou-li  $a, b, c$  libovolná reálná čísla, pro která platí  $a < b < c$ , pak obraz čísla  $b$  leží na přímce mezi obrazy čísel  $a, c$ .*

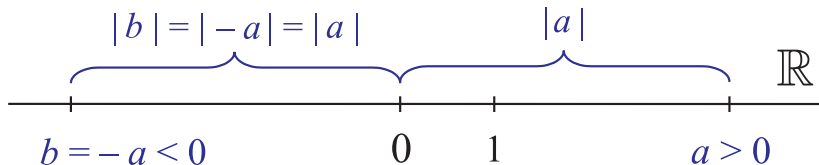
## Grafické znázornění reálných čísel na číselné ose

Zvolme přímku  $x$  a na ní dva různé body, z nichž jeden prohlásíme za obraz čísla 0, označíme jej stejným symbolem a nazveme jej **počátkem**, druhý zvolíme za obraz čísla 1, označíme jej rovněž symbolem 1 a nazveme jej **jednotkovým bodem**. Přímce  $x$  se pak říká **číselná osa**; její poloha se obvykle volí vodorovná a bod 1 se na ní volí vpravo od počátku 0.

Každému reálnému číslu  $a$  se na číselné ose přiřazuje bod zvaný **obraz čísla**  $a$ , který budeme značit stejně. **Kladné číslo**  $a$  se přitom zobrazuje na polopřímce '01' tak, že vzdálenost obrazu od počátku je rovna číslu  $a$  (tj.  $a$  krát velikost jednotkové úsečky '01'), obraz **záporného čísla**  $b$  leží na polopřímce opačné k polopřímce '01' a jeho vzdálenost od počátku 0 je rovna číslu  $-b$ . Polopřímka '01' se proto nazývá **kladná poloosa** (obvykle je opatřena šipkou), polopřímka opačná k polopřímce '01' se nazývá **záporná poloosa**. Pro jednoduchost se o reálných číslech často hovoří přímo jako o **bodech číselné osy**.

**Absolutní hodnota reálného čísla  $a$**  je definována takto:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{je-li } a \geq 0, \\ -a, & \text{je-li } a < 0. \end{cases}$$



Absolutní hodnota nezáporného čísla je tedy dané číslo samo, absolutní hodnota záporného čísla je číslo k němu opačné.

## Vzdálenost reálných čísel

Uvědomme si, že pro libovolná  $x, y, z \in \mathbb{R}$  platí:

1.  $|x - y| \geq 0$ ,
2.  $|x - y| = 0 \iff x = y$ ,
3.  $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$  (trojúhelníková nerovnost).

V grafickém znázornění reálných čísel na číselné ose představuje absolutní hodnota  $|a|$  **vzdálenost obrazu čísla  $a$  od počátku**;  $|a - b|$  pak představuje **vzdálenost obrazů čísel  $a, b$** .

Obecně bychom mohli **vzdálenost** dvou reálných čísel zavést jako libovolnou funkci  $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  splňující podmínky 1.–3. Nebude-li však řečeno jinak, budeme vzdáleností rozumět absolutní hodnotu.

## Rozšíření množiny reálných čísel $+\infty$ a $-\infty$

Mnohdy je výhodné rozšířit množinu reálných čísel o dva symboly,  $+\infty$  a  $-\infty$ , pro které platí:  $-\infty < x < +\infty$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$ . Takto rozšířenou množinu budeme značit jako  $\mathbb{R}^*$  a přirozeně na ni rozšíříme některé algebraické operace:

$$|\pm\infty| = +\infty, \quad \pm\infty + x = \pm\infty \text{ pro každé } x \in \mathbb{R},$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \quad -\infty - (-\infty) = -\infty,$$

$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \text{ pro každé } x > 0,$$

$$x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \text{ pro každé } x < 0,$$

$$\frac{\pm\infty}{x} = \pm\infty \text{ pro } x > 0, \quad \frac{\pm\infty}{x} = \mp\infty \text{ pro } x < 0,$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

Nelze definovat:  $+\infty + (-\infty)$ ,  $0 \cdot (\pm\infty)$ ,  $0/0$ ,  $\pm\infty/\pm\infty$ .

**Interval** je podmnožina množiny všech reálných čísel, která se na číselné ose zobrazí jako úsečka, polopřímka nebo přímka, přičemž krajní body úsečky a počáteční bod polopřímky k ní mohou, ale nemusí patřit.

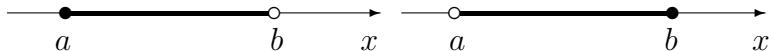
↳ **Interval omezený** (na číselné ose znázorněn **úsečkou**)

↳ **Uzavřený:**  $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$



↳ **Polouzavřený:**

$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ ,  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$



↳ **Otevřený:**  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

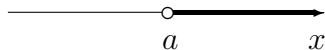
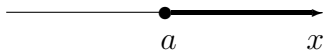




↳ **Neomezený** (znázorněn přímkou nebo polopřímkou)

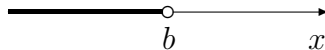
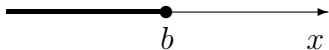
↳ **Neomezený zprava:**

$$\langle a, +\infty \rangle = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$$

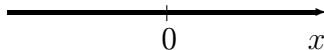


↳ **Neomezený zleva:**

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$$



↳ **Oboustranně neomezený:**  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$



## 1.2.5 Množina komplexních čísel

$$\mathbb{C} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Rovnice  $x^2 + 1 = 0$  nemá v množině  $\mathbb{R}$  řešení. Snaha o vytvoření takového oboru čísel, v němž by každá algebraická rovnice měla řešení, vedla k vytvoření množiny komplexních čísel, kterou budeme značit symbolem  $\mathbb{C}$ .

Množinu reálných čísel  $\mathbb{R}$  rozšíříme na množinu komplexních čísel  $\mathbb{C}$  takto. Nejdříve přidáme k množině  $\mathbb{R}$  číslo, které budeme značit  $i$  a které definujeme požadavkem, aby splňovalo rovnost  $i^2 = -1$ . Číslo  $i$  budeme nazývat **imaginární jednotkou**. Pak přidáme všechna čísla tvaru  $x + iy$ , kde  $x, y$  jsou reálná čísla a  $i$  je imaginární jednotka. Takto utvořená čísla budeme nazývat **komplexními čísly**. Číslo  $x$  nazýváme **reálnou částí** komplexního čísla  $z = x + iy$  a značíme je  $\Re z$ ; číslo  $y$  nazýváme **imaginární částí** komplexního čísla  $z = x + iy$  a značíme je  $\Im z$ . Komplexní číslo, jehož reálná část je rovna nule, nazýváme **ryze imaginárním číslem**. **Číslem komplexně sdruženým** ke komplexnímu

číslo  $z = x + iy$  nazýváme číslo  $\bar{z} = x - iy$ . (Reálné části obou čísel jsou si rovny, imaginární se liší ve znaménku.)

**Rovnost dvou komplexních čísel** se definuje tak, že dvě komplexní čísla jsou si **rovná** právě tehdy, když se rovnají jejich reálné i jejich imaginární části.

Pro imaginární jednotku zřejmě platí rovnosti

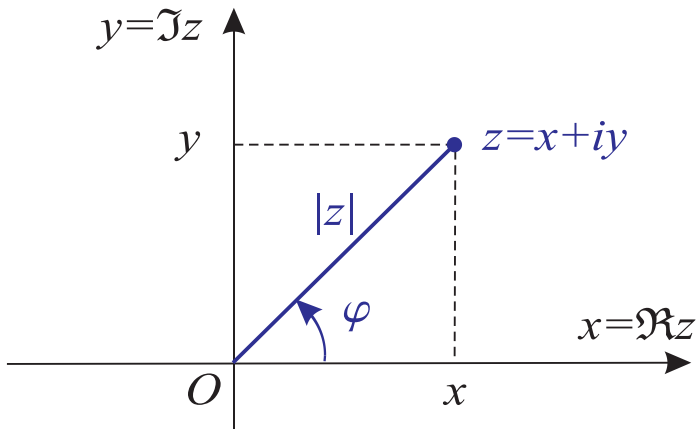
$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

Každé komplexní číslo  $z = x + iy$  je jednoznačně určeno uspořádanou dvojicí reálných čísel  $(x, y)$ . Tato dvojice určuje v rovině  $\mathbb{R}^2$  s kartézskou soustavou souřadnic právě jeden bod, který má souřadnice  $(x, y)$ . Také obráceně, každé uspořádané dvojici  $(x, y)$  souřadnic nějakého bodu roviny  $\mathbb{R}^2$  můžeme přiřadit právě jedno komplexní číslo  $z = x + iy$ . Dostali jsme tak vzájemně jednoznačný vztah mezi rovinou  $\mathbb{R}^2$  a množinou komplexních čísel  $\mathbb{C}$ . Budeme proto i komplexní čísla chápat jako body v rovině a tuto rovinu budeme nazývat **rovinou komplexních čísel**, nebo také

## komplexní rovinou $\mathbf{C}$ . Přímku

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z = 0\}, \quad \text{resp.} \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z = 0\}$$

nazýváme **reálnou**, resp. **imaginární osou** komplexní roviny  $\mathbf{C}$ .



## Modul komplexního čísla

Číslo

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.3)$$

je tzv. **modul (absolutní hodnota)** komplexního čísla  $z = x + iy$ . Zřejmě je  $|z| \in \langle 0, \infty \rangle$ . Každé komplexní číslo, jehož modul je roven 1, se nazývá **komplexní jednotka**.

## Hlavní hodnota argumentu

Důležitou roli v celé analýze komplexní proměnné má velikost orientovaného úhlu, který svírá kladná reálná poloosa a průvodič bodu  $z \neq 0$  v komplexní rovině. Toto číslo se obvykle značí symbolem  $\varphi$  a zpravidla se požaduje, aby leželo v intervalu  $\langle -\pi, \pi \rangle$ . Tento úhel  $\varphi$ , který je přiřazen každému nenulovému komplexnímu číslu  $z$ , nazýváme **hlavní hodnota argumentu** komplexního čísla  $z$ . Někdy se místo intervalu  $\langle -\pi, \pi \rangle$  volí interval  $\langle 0, 2\pi \rangle$ . Pro hlavní hodnotu  $\varphi$  argumentu komplexního čísla  $z$  se používá označení  $\arg z$ . Jelikož každému nenulovému komplexnímu

čísle  $z$  je přiřazena právě jedna hlavní hodnota argumentu  $\arg z$ , můžeme  $\arg z$  chápat jako reálnou funkci komplexní proměnné, definovanou na množině  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , nebo také jako reálnou funkci dvou reálných proměnných. Explicitně ji můžeme definovat předpisem:

$$\arg z = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro všechna } x < 0, y > 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro všechna } x = 0, y > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro všechna } x > 0, y \in \mathbb{R}, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pro všechna } x = 0, y < 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro všechna } x < 0, y \leq 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Pomocí hlavní hodnoty  $\arg z$  nenulového komplexního čísla můžeme definovat nekonečně mnoho dalších hodnot argumentu to-

hoto čísla  $z$ , a to předpisem

$$\text{Arg}_k z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.5)$$

Zřejmě  $\text{Arg}_k z \in \langle (2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi \rangle$  a  $\text{Arg}_0 z = \arg z$ . Takto definované funkce  $\text{Arg}_k z$ , jejichž definičním oborem je  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , nazýváme **jednoznačnými větvemi argumentu**. Funkce  $\arg z$  se nazývá **hlavní větev argumentu**.

### Zápis komplexních čísel

Každé komplexní číslo  $z \neq 0$  lze zapsat právě jedním způsobem v jeho tzv. **kartézském (algebraickém) tvaru**

$$z = x + iy \quad (1.6)$$

nebo v tzv. **goniometrickém (polárním) tvaru**

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi. \quad (1.7)$$

Z goniometrického tvaru komplexního čísla  $z$  plynou rovnosti

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1.8)$$

Uvedeme ještě třetí, tzv. **exponenciální tvar** komplexního čísla

$$z = |z|e^{i\varphi}, \quad (1.9)$$

kde komplexní funkci reálné proměnné  $e^{i\varphi}$  definujeme pomocí tzv. **Eulerova vztahu**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$



### ☛ **Příklad**

Vyjádřeme komplexní číslo  $z = 1 + i\sqrt{3}$  v goniometrickém a exponenciálním tvaru.

**Řešení.** Nejdříve vypočteme modul  $|z|$  a hlavní hodnotu argumentu  $\varphi = \arg z$ . Podle (1.3) je  $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ . Pro hodnotu  $\varphi$  podle (1.8) musí platit

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\pi \leq \varphi < \pi.$$

Odtud dostáváme  $\varphi = \pi/3$ . Podle (1.7) goniometrický tvar komplexního čísla  $z$  je

$$z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Podobně podle (1.9) pro exponenciální tvar komplexního čísla  $z$  platí

$$z = 2e^{i\pi/3}.$$

## Počtení operace s komplexními čísly

Nechť  $z = x + iy$  a  $w = u + iv$  jsou dvě komplexní čísla. Pak jejich **součet, rozdíl, součin a podíl** definujeme vztahy:

$$\begin{aligned}z + w &= (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v) \\z - w &= (x + iy) - (u + iv) = (x - u) + i(y - v) \\zw &= (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) \\ \frac{z}{w} &= \frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i \frac{yu - xv}{u^2 + v^2} .\end{aligned} \tag{1.11}$$

Slovy můžeme operace s komplexními čísly popsat takto.

**Sčítání** a **odčítání** je nejvýhodnější ve tvaru kartézském. Sečteme, resp. odečteme reálné části a sečteme, resp. odečteme imaginární části.

**Násobení** komplexních čísel v kartézském tvaru provádíme jako násobení dvojčlenu dvojčlenem, v goniometrickém a exponenciálním tvaru se vynásobí moduly a sčítají argumenty:

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}, \quad w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi) = |w|e^{i\psi}$$
$$zw = |z|e^{i\varphi}|w|e^{i\psi} = |z||w|e^{i\varphi}e^{i\psi} = |z||w|(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) =$$
$$= |z||w|[(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi)] =$$

Tedy

$$zw = |z||w|[\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)] = |z||w|e^{i(\varphi + \psi)}. \quad (1.12)$$

Současně jsme ukázali, že platí rovnost

$$e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi + \psi)}. \quad (1.13)$$

Odtud indukcí pro každé přirozené  $n$  plyne

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}. \quad (1.14)$$

**Dělení** komplexních čísel v kartézském tvaru pro  $w \neq 0$  provádíme tak, že zlomek rozšíříme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli. V goniometrickém a exponenciálním tvaru se dělí moduly a argumenty se odečítají:

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}, \quad w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi) = |w|e^{i\psi},$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{|w|(\cos \psi + i \sin \psi)} = \frac{|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi - i \sin \psi)}{|w|(\cos \psi + i \sin \psi)(\cos \psi - i \sin \psi)} =$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)) = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\varphi - \psi)}. \quad (1.15)$$

## Moivreova věta

Z Eulerova vztahu

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad (1.16)$$

plyne

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}); \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \quad (1.17)$$

Umocníme-li obě strany rovnosti (1.16) na číslo  $n$ , dostaneme rovnost

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (e^{i\varphi})^n.$$

Protože  $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ , platí tzv. **Moivreova věta**:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \quad (1.18)$$

Jestliže

$$z = |z|e^{i(\varphi+2k\pi)} = |z|(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)),$$

pak pomocí Moivreovy věty dostáváme:

$$\begin{aligned} & \left( \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+2k\pi}{n} \right) \right)^n = \\ & = |z|(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)) = z \end{aligned}$$

pro  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

Je tedy přirozené prohlásit každé z  $n$  čísel

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{z})_k &= \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+2k\pi}{n} \right), \\ k &= 0, \dots, n-1, \end{aligned} \tag{1.19}$$

za  **$n$ -tou odmocninu komplexního čísla  $z$** . Povšimněte si, že pro  $n = 2$  a reálná  $z > 0$  odpovídá  $(\sqrt[2]{z})_0 = (\sqrt{z})_0$  obvyklé definici druhé odmocniny v oboru reálných čísel. Podrobnější rozbor a zdůvodnění definice  $n$ -té odmocniny bude dáno ve druhé kapitole při studiu zobrazení v komplexní rovině.

➤ **Příklad.** Máme najít všechna řešení algebraické rovnice  $z^6 - 8 = 0$ .

**Řešení.** Úloha je ekvivalentní s úlohou najít hodnoty všech šestých odmocnin čísla 8. Podle (1.19) je

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_k = \left(\sqrt[6]{8(\cos 0 + i \sin 0)}\right)_k = \sqrt{2} \left(\cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

Odtud dostáváme hledané odmocniny

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_0 = \sqrt{2}(\cos 0 + i \sin 0) = \sqrt{2},$$

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_1 = \sqrt{2}(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)) = \sqrt{2}(1/2 + i\sqrt{3}/2),$$

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_2 = \sqrt{2}(\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)) = \sqrt{2}(-1/2 + i\sqrt{3}/2),$$

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_3 = \sqrt{2}(\cos \pi + i \sin \pi) = -\sqrt{2},$$

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_4 = \sqrt{2}(\cos(4\pi/3) + i \sin(4\pi/3)) = -\sqrt{2}(1/2 + i\sqrt{3}/2),$$

$$\left(\sqrt[6]{8}\right)_5 = \sqrt{2}(\cos(5\pi/3) + i \sin(5\pi/3)) = \sqrt{2}(1/2 - i\sqrt{3}/2).$$

Řešeními dané rovnice je tedy množina komplexních čísel

$$\left\{ \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} \right\}.$$

Pro komplexní čísla platí užitečné nerovnosti, které budeme používat v dalším textu. Z definice modulu komplexního čísla plynou nerovnosti

$$-|z| \leq \Re z \leq |z|, \quad -|z| \leq \Im z \leq |z|. \quad (1.20)$$

Zřejmě platí

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re(z_1\bar{z}_2), \quad (1.21)$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\Re(z_1\bar{z}_2). \quad (1.22)$$

Z nerovností (1.20) plyne  $\Re(z_1\bar{z}_2) \leq |z_1||\bar{z}_2|$  a z předchozích dvou nerovností plynou nerovnosti

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (1.23)$$

V geometrické interpretaci představují nerovnosti (1.23) známé podmínky pro konstrukci trojúhelníka ze tří zadaných úseček: součet délek dvou stran nemůže být menší než strana třetí a velikost rozdílu délek dvou stran nemůže být větší než strana třetí.



## 1.2.6 Množiny reálných čísel a jejich vlastnosti

**Definice 1.** Množina  $M \subset \mathbb{R}$  se nazývá

- ↳ **shora omezená**, jestliže existuje  $H \in \mathbb{R}$  takové, že pro každé  $x \in M$  platí nerovnost  $x \leq H$ ;
- ↳ **zdola omezená**, jestliže existuje  $D \in \mathbb{R}$  takové, že pro každé  $x \in M$  platí nerovnost  $x \geq D$ ;
- ↳ **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Číslo  $H$  se nazývá **horní odhad množiny**  $M$ , číslo  $D$  se nazývá **dolní odhad množiny**  $M$ .

**Definice 2.** Necht'  $M \subset \mathbb{R}$ . Číslo  $S \in \mathbb{R}$ , pro které platí:

1. pro každé  $x \in M$  je  $x \leq S$ ,

2. pro každé  $S' < S$  existuje  $x \in M$  takové, že  $x > S'$ ,

se nazývá **supremum množiny**  $M$ .

Supremum množiny je tedy její **nejmenší horní odhad**.



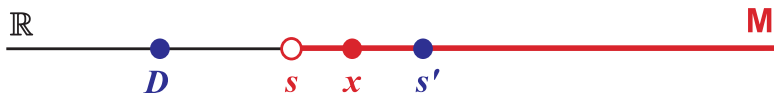
**Poznámka.** První podmínka říká, že  $S$  je horní odhad, druhá podmínka říká, že je ze všech horních odhadů nejmenší, tj. žádné číslo  $S'$  menší než supremum není horním odhadem. Supremum  $S$  nemusí být prvkem množiny  $M$ .

**Definice 3.** Necht'  $M \subset \mathbb{R}$ . Číslo  $s \in \mathbb{R}$ , pro které platí

1. pro každé  $x \in M$  je  $x \geq s$ ,
2. pro každé  $s' > s$  existuje  $x \in M$  takové, že  $x < s'$ ,

se nazývá **infimum množiny  $M$** .

Infimum množiny je tedy její **nejmenší horní odhad**.



**Poznámka.** První podmínka říká, že  $s$  je dolní odhad, druhá podmínka říká, že je ze všech dolních odhadů největší, tj. žádné číslo  $s'$  větší než infimum není dolním odhadem. Infimum  $s$  nemusí být prvkem množiny  $M$ .

## Věta o supremu a infimu v $\mathbb{R}$

1. Pro každou neprázdnou shora omezenou množinu  $M \subset \mathbb{R}$  existuje právě jedno supremum  $S \in \mathbb{R}$ .
2. Pro každou neprázdnou zdola omezenou množinu  $M \subset \mathbb{R}$  existuje právě jedno infimum  $s \in \mathbb{R}$ .

**Poznámka.** Povšimněme si, že v množině racionálních čísel uvedená věta neplatí. Stačí uvažovat

$$M = \{q \in \mathbb{Q}; q^2 < 2\} .$$

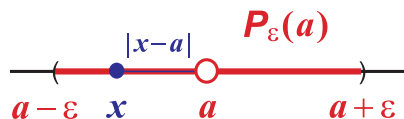
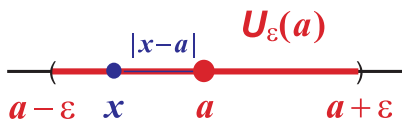
V reálném oboru by bylo supremum  $\sqrt{2}$ , infimum  $-\sqrt{2}$ , tato čísla však nejsou racionální.

**Definice 4.** Necht'  $\varepsilon > 0$ . **Okolím bodu**  $a \in \mathbb{R}$  se nazývá množina  $U_\varepsilon(a)$  všech bodů  $x \in \mathbb{R}$ , jejichž vzdálenost od bodu  $a$  je menší než  $\varepsilon$ , tj.

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \varepsilon\}.$$

**Definice 5.** **Prstencovým okolím bodu**  $a \in \mathbb{R}$  se nazývá množina  $P_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ , tj.

$$P_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x - a| < \varepsilon\}.$$



Pro  $\varepsilon > 0$  definujeme **okolí bodu**  $+\infty$  jako

$$U_\varepsilon(+\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R}; x > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{+\infty\}$$

a **okolí bodu**  $-\infty$  jako

$$U_\varepsilon(-\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R}; x < -\frac{1}{\varepsilon} \right\} \cup \{-\infty\}.$$

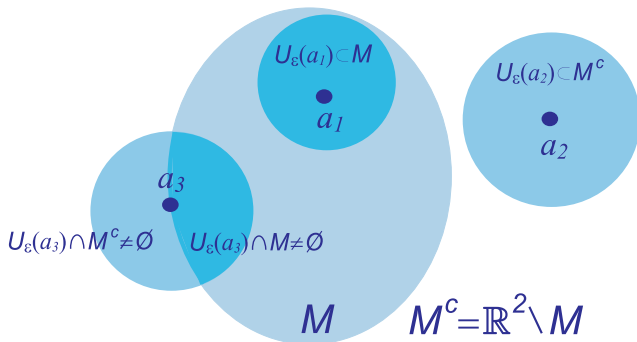
Prstencová okolí se definují bez bodů  $\pm\infty$ :

$$P_\varepsilon(+\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R}; x > \frac{1}{\varepsilon} \right\},$$

$$P_\varepsilon(-\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R}; x < -\frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

**Definice 6.** Uvažujme množinu  $M \subset \mathbb{R}$ . Bod  $a$  se nazývá

- ↳ **vnitřní bod množiny**  $M$ , existuje-li okolí  $U_\varepsilon(a) \subset M$ .
- ↳ **vnější bod množiny**  $M$ , existuje-li okolí  $U_\varepsilon(a)$  takové, že  $U_\varepsilon(a) \cap M = \emptyset$ .
- ↳ **hraniční bod množiny**  $M$  má-li každé jeho okolí  $U_\varepsilon(a)$  neprázdný průnik jak s množinou  $M$  tak jejím doplňkem  $M^C = \mathbb{R} \setminus M$ .



## Definice 7. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá

- ➔ **otevřená** právě tehdy, když je každý její bod jejím vnitřním bodem.
- ➔ **uzavřená** právě tehdy, když je její doplněk  $M^C = \mathbb{R} \setminus M$  otevřená množina.

### ☞ **Příklad 1.2.**

- $M = (-1, 2) \cup (3, 5)$  je otevřená množina.
- $M = \langle -1, 2 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle$  je uzavřená množina.
- $M = (-1, 2) \cup (3, 5]$  není otevřená ani uzavřená.





**Definice 8.** Množina všech vnitřních bodů množiny  $M$  se nazývá **vnitřek množiny**  $M$  a značí se  $M^\circ$ .

**Definice 9.** **Uzávěrem množiny**  $M$  nazýváme doplněk ke vnitřku doplnku množiny  $M$  a značíme jej  $\overline{M}$ , tj.  $\overline{M} = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus M)^\circ$ .

**Definice 10.** **Hranicí množiny**  $M$  nazýváme množinu všech jejích hraničních bodů a značíme ji  $\partial M$ .

☛ **Příklad 1.3.**

Uvažujme  $M = (-1, 2) \cup (3, 5)$  .

- $M^\circ = (-1, 2) \cup (3, 5)$  ,

- $\overline{M} = \langle -1, 2 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle$  ,
- $\partial M = \{-1, 2, 3, 5\}$  .

### Definice 11. Bod $x$ se nazývá

- **hromadný bod** množiny  $M$  právě tehdy, když pro každé jeho prstencové okolí  $P_\varepsilon(x)$  je  $M \cap P_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ .
- **izolovaný bod** množiny  $M$  právě tehdy, když existuje prstencové okolí  $P_\varepsilon(x)$  takové, že  $M \cap P_\varepsilon(x) = \emptyset$ .

### ☛ Příklad 1.4.

$$M = (-1, 2) \cup \{4\}$$

hromadný bod: libovolné  $x \in \langle -1, 2 \rangle$

izolovaný bod: 4



**Definice 12.** Uzavřená a omezená množina  $M \subset \mathbb{R}$  se nazývá **kompaktní**.