PŘEDNÁŠKA 1

POSLOUPNOSTI

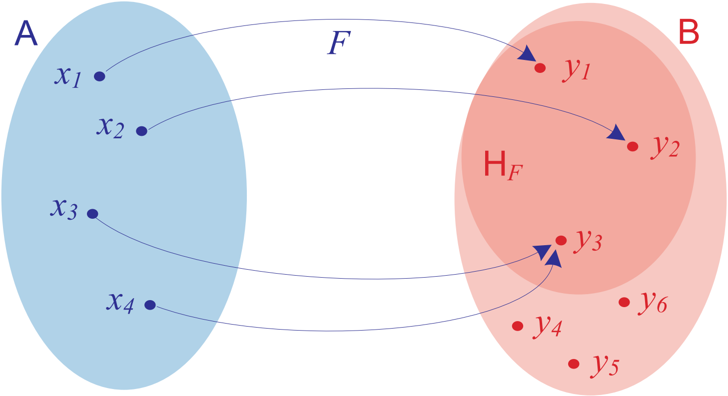
1.1 Zobrazení

Definice 1. Uvažujme libovolné neprázdné množiny A, B. **Zobrazení množiny A do množiny B** je definováno jako množina F uspořádaných dvojic $(x, y) \in$ **A** $\times$ **B**, kde ke každému prvku $x \in$ **A** existuje **právě jeden** prvek $y \in$ **B**, pro který je $(x, y) \in F$.

Prvku x se říká **vzor** prvku y, prvku y se říká **obraz** prvku x v zobrazení F; rovněž se používá vyjádření, že y je **hodnota zobrazení** F v bodě x a píše se $y = F(x)$ nebo $x \mapsto F(x)$. Množina **A** se nazývá **definiční obor zobrazení** F a označuje také symbolem **D**(F) či **D**$_F$. Množina všech obrazů v zobrazení F se nazývá **obor hodnot zobrazení** F a označuje se **H**(F) či **H**$_F$; platí: **H**$(F) \subset$ **B**.

Symbolicky se zobrazení F množiny **A** do množiny **B** zapisuje takto:

$$F : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}, \quad \mathbf{D}(F) = \mathbf{A}$$

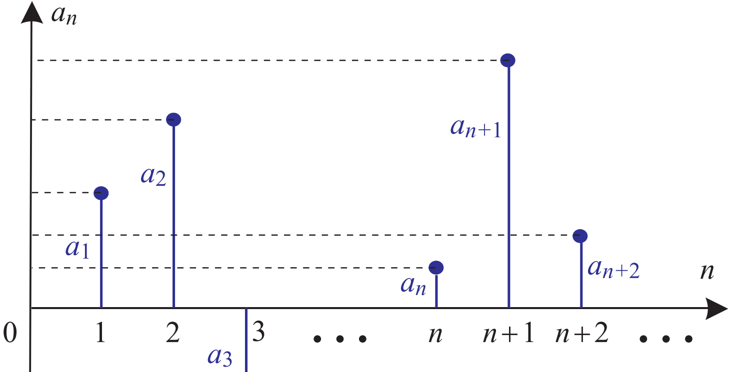


1.2 Posloupnost reálných čísel

1.2.1 Pojem posloupnosti

Definice 2. Posloupností nazýváme zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$.

Posloupnost tedy přiřazuje každému $n \in \mathbb{N}$ právě jeden prvek $f(n) \in \mathbb{R}$, který se nazývá **člen posloupnosti** a obvykle se značí a_n. Celou posloupnost budeme značit (a_n). Grafem posloupnosti jsou izolované body:



☛ ***Příklad 1.1.***

Aritmetická posloupnost je definována předpisem

$$a_1 \in \mathbb{R}\,, \qquad a_n = a_1 + (n-1)d\,,$$

kde $a_1\,, d$ jsou daná reálná čísla.

Pro členy aritmetické posloupnosti platí: $a_{n+1} - a_n = d\,.$
Číslo d se nazývá **diference aritmetické posloupnosti.**

Matematickou indukcí lze dokázat, že pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti platí:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n\big(a_1 + a_n\big)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\,d\,.$$

Také lze uvažovat:

$$\begin{array}{rcl} s_n & = & a_1 \quad + (a_1 + d) \;\; + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) \\ s_n & = & a_n \quad + (a_n - d) \;\; + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d) \\ \hline 2s_n & = & (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) \end{array}$$

$$\Longrightarrow 2s_n = n(a_1 + a_n) \Longrightarrow s_n = \tfrac{1}{2}n(a_1 + a_n)$$

☛ *Příklad 1.2.*

Geometrická posloupnost je definována předpisem

$$a_1 \in \mathbb{R}\,, \qquad a_n = a_1 q^{n-1}\,,$$

kde a_1 , q jsou daná reálná čísla.

Je-li $a_1 q \neq 0$, platí mezi dvěma po sobě jdoucími členy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q\,.$$

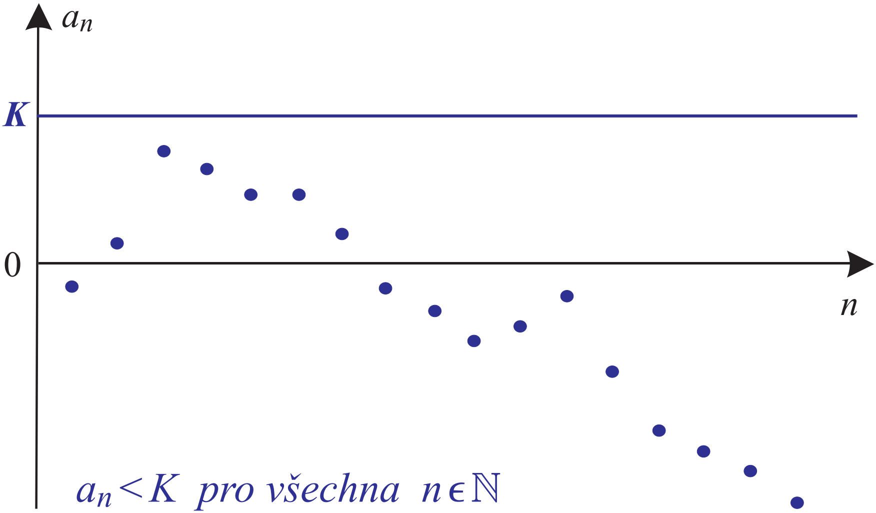
Tento poměr se nazývá **kvocient geometrické posloupnosti.**

Matematickou indukcí lze dokázat, že pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti platí:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right) = \begin{cases} a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1} & \text{pro} \;\; q \neq 1, \\[2ex] n a_1 & \text{pro} \;\; q = 1. \end{cases}$$

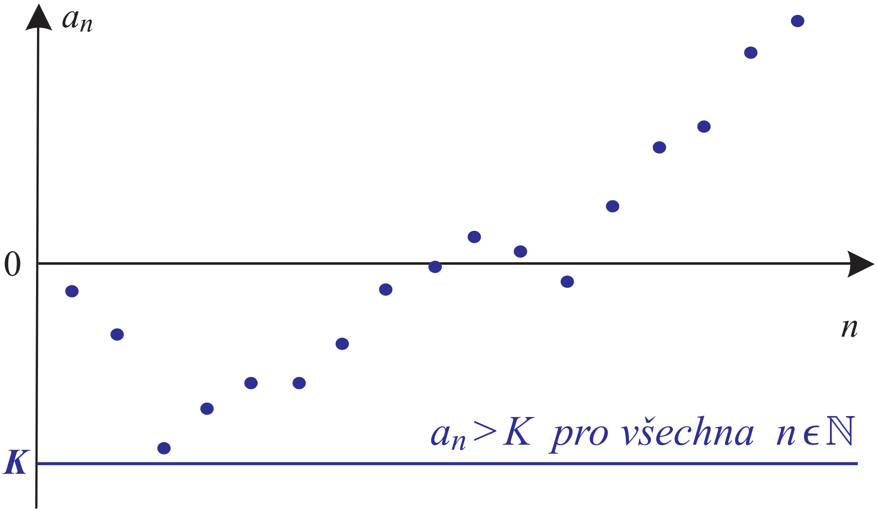
1.2.2 Vlastnosti posloupností

Definice 3. Řekneme, že posloupnost (a_n) je **shora omezená**, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leq K$.

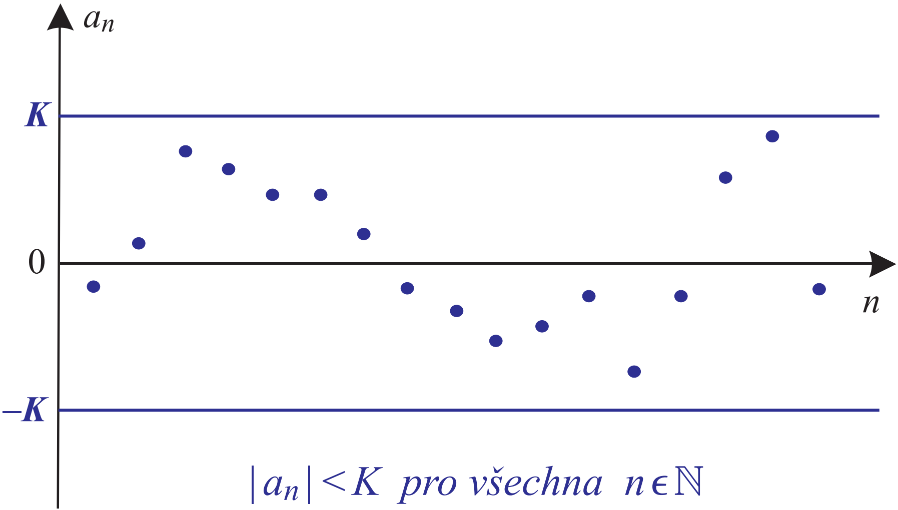


a_n
K
0
n
$a_n < K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$

Definice 4. Řekneme, že posloupnost (a_n) je **zdola omezená**, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geq K$.



Definice 5. Řekneme, že posloupnost (a_n) je **omezená**, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $|a_n| \leq K$.



$|a_n| < K$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$

☛ ***Příklad 1.3.***

Pro $d > 0$ je aritmetická posloupnost zdola omezená číslem a_1, ale není omezená shora, a tedy není ani omezená

☛ ***Příklad 1.4.***

Pro $a_1 \neq 0$ a $q < -1$ není geometrická posloupnost omezená ani shora, ani zdola. Pro $|q| \leq 1$ je geometrická posloupnost omezená. Stačí zvolit $K = \left|a_1\right|$.

Definice 6. Posloupnost (a_n) se nazývá

- **rostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n < a_{n+1}$,
- **klesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n > a_{n+1}$,
- **neklesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \leq a_{n+1}$,
- **nerostoucí**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_n \geq a_{n+1}$.

Posloupnost, která splňuje jednu z výše uvedených podmínek, se nazývá **monotónní.** Je-li rostoucí nebo klesající, nazývá se též **ryze monotónní.**

Příklad 1.5.

Nechť je dána posloupnost (a_n), kde $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Členy posloupnosti: $1\,,\ -\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ -\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ -\frac{1}{6}\,,\ \ldots\,.$
Posloupnost není monotonní, je omezená např. číslem 1.

Definice 7. Nechť je dána posloupnost (a_n) a rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n), tj.

$$k_n \in \mathbb{N} \qquad \text{a} \qquad k_n < k_{n+1}\,.$$

Posloupnost (b_n), pro jejíž členy platí $b_n = a_{k_n}$, nazveme **vybranou posloupností** z posloupnosti (a_n).

☛ ***Příklad 1.6.***

Posloupnost (b_n) definovaná vztahem

$$b_n = \frac{(-1)^{n^2+1}}{n^2}$$

je vybraná z posloupnosti (a_n), kde

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

V tomto případě je $k_n = n^2$ ($b_1 = 1 = a_1;\ b_2 = -\frac{1}{4} = a_4\ \ldots$).

☛ Příklad 1.7.

Posloupnost (c_n), kde $c_n = \dfrac{1}{n^2}$, není vybraná z posloupnosti (a_n), kde

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

protože neexistuje rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n) tak, aby $a_{k_n} = c_n = \frac{1}{n^2} \quad (c_1 = 1 = a_1;\ c_2 = \frac{1}{4},\ a_4 = -\frac{1}{4})$.

☛ Příklad 1.8.

Posloupnost (d_n), jejíž členy jsou postupně

$$1\,,\ -\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ -\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{7}\,,\ \frac{1}{9}\,,\ -\frac{1}{6}\,,\ \frac{1}{11}\,,\ \ldots$$

také není vybranou posloupností z posloupnosti (a_n), přestože množina členů obou těchto posloupností je stejná. Lze sice najít posloupnost přirozených čísel (k_n) tak, aby $d_n = a_{k_n}$, ale tato posloupnost není rostoucí.

1.2.3 Algebraické operace

Násobení posloupnosti (a_n) **reálným číslem** $c \in \mathbb{R}$ definujeme jako posloupnost, jejíž n–tý člen je ca_n, tj. jako posloupnost

$$c(a_n) = (ca_n)\,.$$

Součet posloupností (a_n) **a** (b_n) je definován předpisem

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)\,.$$

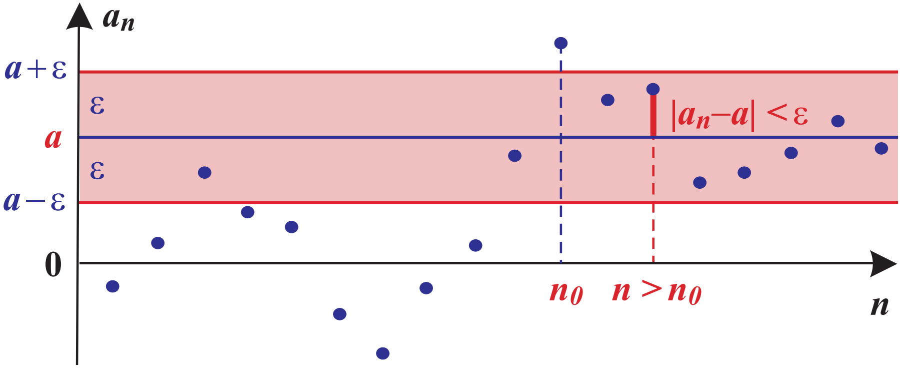
Součin posloupností (a_n) **a** (b_n) je definován předpisem

$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)\,.$$

Je-li $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je **podíl posloupností** (a_n) **a** (b_n) definován jako

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)\,.$$

Definice 8. Řekneme, že posloupnost (a_n) má **limitu** $a \in \mathbb{R}$ (**vlastní limitu**), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $n > n_0$ platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$. Výrok posloupnost (a_n) má limitu a zapisujeme jako $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.



☛ ***Příklad 1.9.***

Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+4}{n^3+n+1} = 0$.

Řešení. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Z nerovnosti

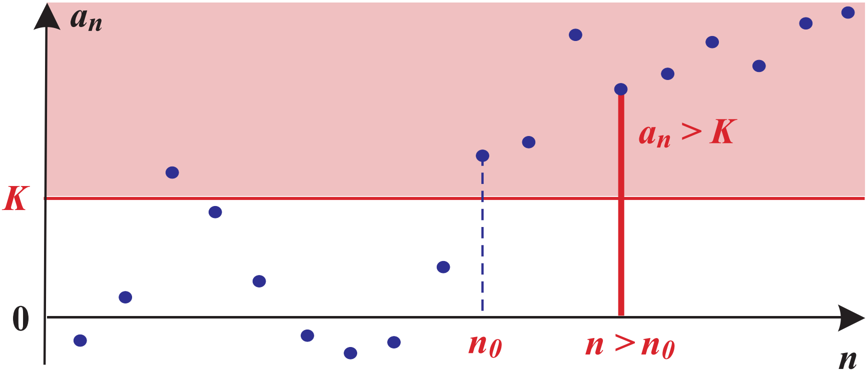
$$\frac{n+4}{n^3+n+1} < \frac{5n^2}{n^3} = \frac{5}{n}$$

plyne, že pokud zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\dfrac{5}{n_0} < \varepsilon$, bude pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, splněna nerovnost

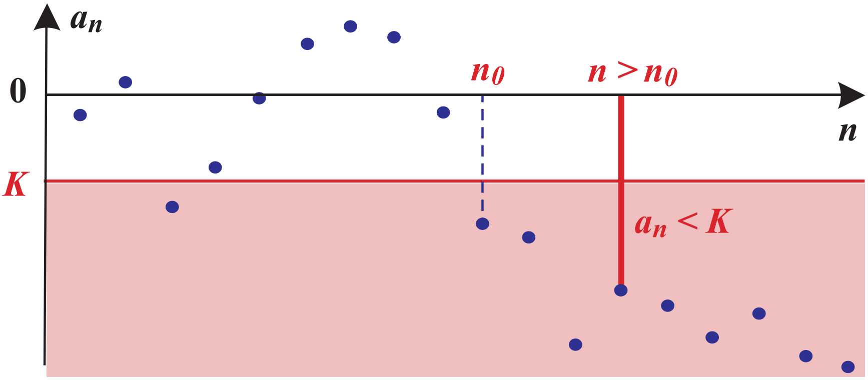
$$\left| \frac{n+4}{n^3+n+1} - 0 \right| = \frac{n+4}{n^3+n+1} < \frac{5}{n} < \frac{5}{n_0} < \varepsilon\,.$$

Tedy stačí zvolit $n_0 = \left[\dfrac{5}{\varepsilon}\right] + 1$, kde $[x]$ je tzv. celá část reálného čísla x, která je pro každé $x \in \mathbb{R}$ definována jako jediné celé číslo, pro které platí nerovnosti $[x] \leq x < [x] + 1$.

Definice 9. Řekneme, že posloupnost (a_n) má **nevlastní limitu** $+\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ je $a_n > K$.



Definice 10. Řekneme, že posloupnost (a_n) má **nevlastní limitu** $-\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ je $a_n < K$.



Věta. *Posloupnost (a_n) má limitu a (vlastní nebo nevlastní) právě tehdy, když mimo každé okolí $U_\varepsilon(a)$ leží pouze konečný počet členů posloupnosti (a_n).*

Důkaz. Nechť je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ a $U_\varepsilon(a)$ je libovolné okolí bodu a. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, existuje k tomuto $\varepsilon > 0$ index n_0 takový, že pro každé $n > n_0$ je $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$. Ale to je tvrzení, že pro každé $n > n_0$ leží všechny body a_n uvnitř okolí $U_\varepsilon(a)$. Tedy mimo množinu $U_\varepsilon(a)$ mohou ležet pouze body $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$, což je konečná množina.
Nechť naopak pro každé okolí $U_\varepsilon(a)$ leží mimo toto okolí pouze konečný počet členů posloupnosti (a_n). Je-li dáno $\varepsilon > 0$, leží podle předpokladu mimi okolí $U_\varepsilon(a)$ pouze konečná množina členů posloupnosti. Označme tuto množinu M a zvolme $n_0 = \max\limits_{a_n \in M} n$. Protože je množina M konečná, toto maximum existuje a pro každé $n > n_0$ je $a_n \in U_\varepsilon(a)$, což znamená, že $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$.
Případ nevlastních limit se dokáže obdobně. $\square$

Věta. *Posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Nechť má posloupnost (a_n) dvě limity a a b, $a \neq b$. Vyberme disjunktní okolí $U_{\varepsilon_1}(a)$ bodu a a $U_{\varepsilon_2}(b)$ bodu b, tj. $U_{\varepsilon_1}(a) \cap U_{\varepsilon_2}(b) = \emptyset$. Jestliže $a \neq b$, taková okolí vždy existují. Například pro a, $b \in \mathbb{R}$ lze zvolit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{|a-b|}{3} > 0$. Protože a je limitou posloupnosti (a_n) existuje index n_1 takový, že pro všechna $n > n_1$ je $a_n \in U_{\varepsilon_1}(a)$. Podobně protože b je limitou posloupnosti (a_n) existuje index n_2 takový, že pro všechna $n > n_2$ je $a_n \in U_{\varepsilon_2}(b)$. Nechť $n > \max(n_1, n_2)$. Pak je $a_n \in U_{\varepsilon_1}(a)$ a také $a_n \in U_{\varepsilon_2}(b)$. Ale z toho plyne, že $a_n \in U_{\varepsilon_1}(a) \cap U_{\varepsilon_2}(b) = \emptyset$. Ale to je spor. Tedy předpoklad $a \neq b$ vede ke sporu. Proto musí pro každé dvě limity posloupnosti (a_n) platit $a = b$. $\square$

Definice 11. Jestliže posloupnost (a_n) má vlastní limitu, nazýváme ji **konvergentní**. Jestliže posloupnost (a_n) má nevlastní limitu nebo limitu nemá, nazýváme ji **divergentní**.

Věta. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Důkaz. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon = 1$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $a - 1 < a_n < a + 1$. Označme $K = \max\bigl(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, a + 1\bigr)$ a $L = \min\bigl(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, a - 1\bigr)$. Protože se jedná o konečné množiny, taková K a L existují. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $L \leq a_n \leq K$. $\square$

Věta. *Nechť posloupnosti* (a_n) *a* (b_n) *konvergují,* $c \in \mathbb{R}$*. Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$*.*

Pak konvergují také posloupnosti

$$\left(ca_n\right), \ \left(a_n + b_n\right), \ \left(a_n \cdot b_n\right)$$

a platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(ca_n\right) = ca\,, \quad \left(a_n + b_n\right) = a + b\,, \quad \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot b_n\right) = ab\,.$$

Jestliže je navíc $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$*, pak konverguje i posloupnost* $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ *a platí*

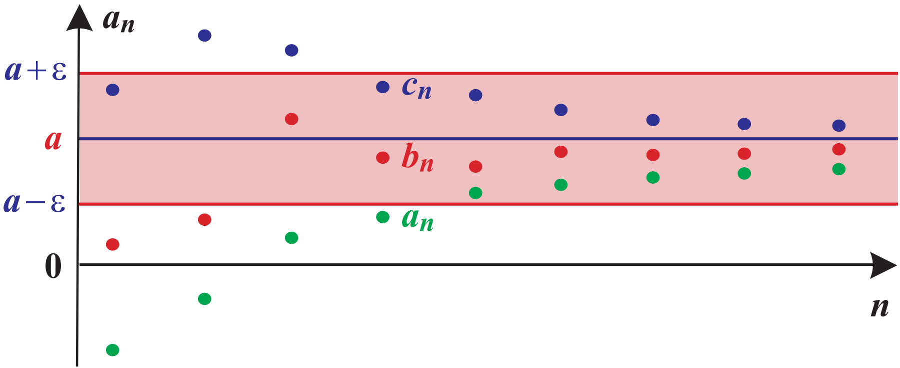
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}\,.$$

Věta. *Jsou-li posloupnosti* (a_n) *a* (b_n) *konvergentní a pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \le b_n$, *je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Důkaz. Nechť je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ a $a > b$. Pak je $\dfrac{a-b}{2} > 0$. K tomuto ε existují n_a a n_b taková, že pro každé $n > n_a$ je $a - \varepsilon = \dfrac{a+b}{2} < a_n$ a pro každé $n > n_b$ je $b_n < b + \varepsilon = \dfrac{a+b}{2}$. Tedy pro $n > \max(n_a, n_b)$ platí $b_n < \dfrac{a+b}{2} < a_n$, což je spor. $\square$

Poznámka: Pro limity a a b může platit $a = b$ i v případě, kdy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < b_n$; například $a_n = 0$ a $b_n = \dfrac{1}{n}$.

Věta. *Nechť pro členy posloupností (a_n), (b_n) a (c_n) platí $a_n \leq b_n \leq c_n$ a existují limity $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. Pak existuje také limita posloupnosti (b_n) a platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.*



Důkaz. V případě, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$, je tvrzení zřejmé. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existují n_a a n_c taková, že pro každé $n > n_a$ je $a - \varepsilon < a_n$ a pro všechna $n > n_b$ je $c_n < a + \varepsilon$. Tedy pro všechna $n > n_0 = \max(n_a, n_b)$ platí nerovnosti $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$. $\square$

Věta. *Pro posloupnost* (a_n) *je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *právě tehdy, když* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Důkaz. Tvrzení je zcela zřejmé z definice limity. $\square$

Věta. *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a posloupnost* (b_n) *je omezená. Pak je* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Důkaz. Protože $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ je také $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Protože je posloupnost (b_n) omezená, existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $-K \le b_n \le K$. Tvrzení věty plyne ze zřejmé nerovnosti $-K|a_n| \le |a_n b_n| \le K|a_n|$ a z toho, že $\lim_{n\to\infty} K|a_n| = 0$. $\square$

☛ *Příklad 1.10.*

Najděte limitu posloupnosti $a_n = \dfrac{2^{\cos n}}{n + \sin n!}$.

Řešení: $a_n = b_n \cdot c_n$, kde $b_n = \dfrac{1}{n}$ a $c_n = \dfrac{2^{\cos n}}{1 + \bigl(\sin n!\bigr)/n}$. $\lim b_n = 0$; $|\cos n| \le 1 \Rightarrow 2^{\cos n} \le 2$; $\bigl|\sin n!\bigr| \le 1$, proto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n!}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{\sin n!}{n}\right) = 1$. Posloupnost $\left(c_n\right)$ je omezená a podle předchozí věty je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta. *Je-li posloupnost* (a_n) *neklesající, resp. nerostoucí, existuje její limita (vlastní nebo nevlastní) a platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n\,, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n\,.$$

Poznámka: Tvrzení této věty lze shrnout tak, že monotonní posloupnosti mají vždy limitu, která je rovna supremu pro neklesající posloupnosti a infimu pro posloupnosti nerostoucí.

Pomocí uvedené věty lze ukázat, že platí důležité vztahy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \quad \text{obecněji} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \mathrm{e}^k$$

Důkaz. Pro neklesající posloupnosti (pro nerostoucí anal.):
Nechť je (a_n) neklesající posloupnost, tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $a_n \leq a_{n+1}$. Jestliže není posloupnost (a_n) omezená, musíme dokázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Nechť je dáno $K \in \mathbb{R}$. Protože posloupnost (a_n) není shora omezená, existuje index n_0 takový, že $a_{n_0} > K$. Ale protože je posloupnost neklesající, platí pro každé $n > n_0$ nerovnost $K < a_{n_0} \leq a_n$.
Nyní předpokládejme, že je neklesající posloupnost (a_n) shora omezená. Pak existuje $\sup\{a_n\,;\ n \in \mathbb{N}\} = a \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že toto a je limitou posloupnosti (a_n). Z první vlastnosti suprema plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \leq a$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Z druhé vlastnosti suprema pak plyne, že existuje index n_0 takový, že $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$. Protože je posloupnost neklesající, platí pro každé $n > n_0$ nerovnost $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a$. $\square$

Definice 12. Posloupnost (a_n) se nazývá **cauchyovská**, jestliže splňuje **Cauchy–Bolzanovu podmínku**:
Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každá m, n, kde $m > n_0$ a $n > n_0$, platí $\left|a_m - a_n\right| < \varepsilon$.

Věta. *Posloupnost (a_n) konverguje právě tehdy, když je cauchyovská.*

Věta. *Nechť je (b_n) posloupnost vybraná z posloupnosti (a_n) a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pak je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.*

Důkaz. Pro každé $\varepsilon > 0$ (nebo $K \in \mathbb{R}$) stačí zvolit $n_0 = k_{n_0}$.

☛ ***Příklad 1.11.***

Dokažte, že $a_n = (-1)^n$ nemá limitu.

Řešení. Pro $n = 2k$ dostaneme vybranou posloupnost $b_k = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ s limitou 1, pro $n = 2k+1$ vybranou posloupnost $b_k = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$ s limitou -1.

☛ ***Příklad 1.12.***

Dokažte, že posloupnost $a_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$ nemá limitu.

Řešení. Pro sudá $n = 2k$ dostaneme vybranou posloupnost $b_k = a_{2k} = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}$. To je posloupnost vybraná z posloupnosti $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Proto je $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = e$. Pro lichá $n = 2k-1$ dostaneme vybranou posloupnost

$$c_k = a_{2k-1} = \left(1 - \frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1},$$

což je vybraná posloupnost z posloupnosti $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Protože všechny členy této posloupnosti jsou menší než 1, nemůže být její limita rovna $e > 1$. Ve skutečnosti je $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = e^{-1}$. Protože posloupnost a_n obsahuje dvě posloupnosti, které nemají stejnou limitu, neexistuje ani limita posloupnosti (a_n).

Definice 13. Bod $a \in \mathbb{R}^*$ se nazývá **hromadným bodem** posloupnosti (a_n) právě tehdy, když existuje vybraná posloupnost (b_n) taková, že $a = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Věta. *Bod a je hromadným bodem posloupnosti (a_n) právě tehdy, když pro každé okolí $U_\varepsilon(a)$ existuje nekonečná množina indexů $N_a \subset \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in N_a$ je $a_n \in U_\varepsilon(a)$.*

Důkaz. Je to vlastně jen jinak přepsaná definice hromadného bodu posloupnosti. $\square$

☛ ***Příklad 1.13.***

Pro posloupnost $a_n = (-1)^n$ jsou hromadné body 1 a -1, neboť

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1, \qquad \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} (-1) = -1.$$

☛ *Příklad 1.14.*

Najděte všechny hromadné body posloupnosti

$$a_n = \frac{(n+1)^2 + (-1)^n n^2}{n^2+n+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} n \,.$$

Řešení. $a_n = b_n \cdot c_n$, kde

$$b_n = \frac{(n+1)^2 + (-1)^n n^2}{n^2+n+1}, \qquad c_n = \cos \tfrac{2}{\pi} 3\, n \,.$$

Ani jedna z těchto posloupností nemá limitu.

$$b_{2k} = \frac{8k^2+4k+1}{4k^2+6k+1} \longrightarrow 2, \qquad b_{2k-1} = \frac{4k-1}{4k^2-2k+1} \longrightarrow 0 \,.$$

Protože posloupnost c_n je omezená, je $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = 0$.

Uvažujme

$$a_{2k} = \frac{8k^2 + 4k + 1}{4k^2 + 6k + 1} \cdot \cos \tfrac{4\pi}{3} k;$$

$\cos \frac{4\pi}{3} k$ nabývá hodnot 1 pro $k = 3m$, $-\frac{1}{2}$ pro $k = 3m \pm 1$. Tedy z posloupnosti $\left(a_{2k}\right)$ lze vybrat posloupnosti $\left(a_{6k}\right)$, která má limitu 2 a $\left(a_{6k\pm 2}\right)$, která má limitu -1. Hromadné body posloupnosti $\left(a_n\right)$ jsou tedy -1, 0 a 2.

☛ *Příklad 1.15.*

Najděte všechny hromadné body posloupnosti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}, \ldots.$$

Řešení. Tato posloupnost obsahuje všechna racionální čísla z intervalu $(0, 1)$, tj. čísla $\dfrac{p}{q}$, kde $0 < p < q$ jsou přirozená nesoudělná čísla, a to každé dokonce nekonečně krát. Protože každé reálné číslo lze s libovolnou přesností aproximovat posloupností racionálních čísel, je množina hromadných bodů posloupnosti $\left(a_n\right)$ celý interval $\langle 0, 1\rangle$.

Definice 14. Nechť je M množina všech hromadných bodů posloupnosti (a_n). Číslo $S = \sup M$, resp. $s = \inf M$ se nazývá **limes superior**, resp. **limes inferior**, posloupnosti (a_n) a značí se $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, resp. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

☛ ***Příklad 1.16.***

Pro posloupnost $a_n = (-1)^n$ je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(-1)^n = 1, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-1)^n = -1$$

Věta. *Posloupnost (a_n) má limitu tehdy a jen tehdy, když $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.*

Věta. *Množina M je kompaktní právě tehdy, pokud lze z každé posloupnosti (a_n) takové, že $a_n \in M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, vybrat konvergentní posloupnost, jejíž limita leží v M.*