PŘEDNÁŠKA 2

ČÍSELNÉ ŘADY

2.1 Pojem číselné řady

Definice 1. Nechť je dána posloupnost (a_n). Posloupnost (s_n), kde $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, se nazývá **posloupnost částečných součtů** posloupnosti (a_n).

Existuje-li $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, pak s nazveme **součtem řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**.

Je-li (s_n) divergentní, nazýváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **divergentní**.

Je-li $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, říkáme, že řada **diverguje k** $\pm\infty$.

☛ *Příklad 2.1.*

(a) Řada $1 + 1 + 1 + \cdots$ diverguje k $+\infty$, neboť

$$s_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-krát}} = n\,, \qquad \lim_{n\to\infty} n = +\infty\,.$$

(b) Řada $(-1) + (-1) + (-1) + \cdots$ diverguje k $-\infty$, neboť

$$s_n = \underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{n\text{-krát}} = -n, \qquad \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty.$$

(c) Řada $1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$ diverguje (v tomto případě se též říká, že osciluje), neboť částečné součty tvoří posloupnost $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots,$ která nemá limitu.

☛ *Příklad 2.2.*

Uvažujme geometrickou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} + \cdots \ , \quad a_1 \neq 0\,, \ \ q \neq 1\,.$$

Pro $q \neq 1$ je posloupnost částečných součtů dána vztahem:

$$s_n = a_1 \, \frac{1 - q^n}{1 - q} \ .$$

(a) Je-li $q > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$, řada diverguje k $\pm\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & \text{pro } \ a_1 > 0\,, \\ -\infty & \text{pro } \ a_1 < 0\,. \end{cases}$$

(b) Je-li $|q| < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = a_1 \dfrac{1}{1-q}$, řada konverguje.

(c) Je-li $q \leq -1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ neexistuje a řada diverguje.

☛ *Příklad 2.3.*

Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \; .$$

Protože platí:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \; ,$$

je

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \; ,$$

tedy $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, řada konverguje.

☛ *Příklad 2.4.*

Řada

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots$$

konverguje, její součet je roven 0 $(a_n = (1 + (-1)) = 0)$.

Vynecháme-li však závorky, získáme řadu divergentní:

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$$

Neboli naopak, přidáním vhodných závorek jsme z divergentní řady získali řadu konvergentní.

Následující věta říká, že součet řady se přidáním závorek nezmění, je-li řada konvergentní či diverguje-li k $\pm\infty$.

Věta. *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, *kde* s *může být i* $+\infty$ *nebo* $-\infty$, *a* $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ *je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom je*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots$$
$$\cdots + (a_{k_2+1} + a_{k_2+2} + \cdots + a_{k_3}) = s\,.$$

Věta. *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ *jsou konvergentní řady,* $c, A, B \in \mathbb{R}$. *Potom je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cs\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (A a_n + B b_n) = As + Bt\,.$$

Nutná podmínka konvergence řady:

Věta. *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Důkaz. Označme $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Protože řada konverguje, existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Protože $a_n = s_n - s_{n-1}$, je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = s - s = 0\,.$$

Poznámka. Pozor, věta říká, že z konvergence řady plyne nulová limita posloupnosti jejích členů, avšak z nulové limity obecně neplyne konvergence řady!

☛ *Příklad 2.5.*

Vyšetřujme konvergenci tzv. harmonické řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq \frac{2}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}}_{\geq 8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}}+\cdots$$

$$s_2 \geq \tfrac{1}{2}\,,\quad s_{2^2} \geq \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{2}{2}\,,\quad s_{2^3} \geq \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{3}{2}\,,$$

$$s_{2^4} \geq \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{4}{2}\,,\ \ldots, s_{2^n} \geq \tfrac{n}{2}\,,\ \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = +\infty\ .$$

Vybraná posloupnost (s_{2^n}) z posloupnosti částečných součtů (s_n) diverguje k $+\infty$. Protože posloupnost (s_n) je rostoucí, $s_n = s_{n-1} + \frac{1}{n} > s_{n-1}$, její limita existuje, a to konečná nebo $+\infty$, a je rovna limitě jakékoli vybrané posloupnosti. Tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Řada tedy diverguje k $+\infty$, i když je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

☛ *Příklad 2.6.*

Vyšetřujme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

Řešení. Zřejmě

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty \quad \text{pro} \quad n \to \infty,$$

takže $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Řada diverguje k $+\infty$.

☛ *Příklad 2.7.*

Vyšetřujme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots$.

Řešení. Máme $s_1 = 1, s_2 = -1, s_3 = 2, s_4 = -2, s_5 = 3, \cdots$.
Zřejmě $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, takže řada diverguje.

2.2 Řady s nezápornými členy

Věta (srovnávací kritérium konvergence řad).
Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí nerovnost $0 \le a_n \le b_n$, pak

- *z konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne konvergence $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,*
- *z divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne divergence $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

☛ ***Příklad 2.8.***

Vyšetřujme konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $(n+1)^2 > n(n+1)$, a tedy $0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$. Řada vpravo konverguje (viz výše), takže podle srovnávacího kritéria konverguje též vyšetřovaná řada.

Věta (odmocninové kritérium).

Jestliže existuje n_0 *takové, že pro všechna* $n > n_0$ *je*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1\,,$$

pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Jestliže pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ *existuje* $n > n_0$ *takové, že*

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1\,,$$

pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta (limitní odmocninové kritérium).

Nechť $a_n \geq 0$ *a* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = q$. *Je-li* $q < 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje;* *je-li* $q > 1$, *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta (podílové kritérium).

Nechť je $a_n > 0$. *Jestliže existuje* n_0 *takové, že pro všechna* $n > n_0$ *je*

$$0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1\,,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Jestliže existuje n_0 *takové, že pro všechna* $n > n_0$ *je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta (limitní podílové kritérium).

Nechť $a_n > 0$ *a existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Je-li $q < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, je-li* $q > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta (Raabeho kritérium).
Nechť $a_n > 0$ *a existuje* $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = s$. *Je-li* $s > 1$, *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, a je-li* $s < 1$ *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

2.3 Alternující řady

Věta (Leibnizovo kritérium pro alternující řady).
Nechť $a_n \geq 0$ *je monotonní posloupnost, pro kterou platí* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Pak je řada* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *konvergentní.*

☛ ***Příklad***

Podle Leibnizova kritéria konverguje například řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Věta. *Jestliže konverguje řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *konverguje i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice 2. Jestliže je konvergentní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, nazývá se řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolutně konvergentní.**

Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergentní, nazývá se řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **neabsolutně konvergentní.**