Přednáška 1

Množiny čísel

Hlavní rozdíl mezi algebrou a matematickou analýzou spočívá v tom, že v algebře se zabýváte pouze hodnotu funkce v daném bodě, kdežto v matematické analýze vás zajímá nejen funkce v daném bodě, ale její chování v nějakém malém okolí tohoto bodu. Toto chování v okolí daného bodu zkoumáte pomocí toho, že danou funkci nahradíte v bezprostředním okolí bodu jinou, v jistém smyslu podobnou, funkcí. K tomu se používají zejména polynomy (mnohočleny).
Když máme například funkci $f(x) = \sin x$ a zajímá nás bod $x_0 = 0$ je pro algebru podstatné, že $f(0) = \sin 0 = 0$. Ale v matematické analýze je podstatné, že v jistém "nekonečně" malém okolí bodu $x_0 = 0$ je

$$\sin x = x - \tfrac{1}{6}\,x^3 + \tfrac{1}{120}\,x^5 + \dots\,, \tag{1}$$

kde je na pravé straně "nekonečný" součet. Přitom se k hodnotám funkce $f(x) = \sin x$ celém daném intervalu můžeme přiblížit s libovolnou předem danou přesností pouze součtem konečného počtu členů nekonečného součtu v (1). V diferenciálním počtu se budeme zabývat právě takovými otázkami.
První problém je otázka, jak se vypořádat s "nekonečny", která se při takových úvahách vyskytují. V první přednášce krátce zmíním o množinách čísel, kde se již problémy tohoto typu objevují.

Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$

Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ se v matematice definuje pomocí axiomů. Nám bude stačit vědět, že se skládá čísel 1, 2, …, tj.

$$\mathbb{N} = \big\{1,\,2,\,3,\,\dots\big\}\,, \quad \text{případně} \;\; \mathbb{N}_0 = \big\{0,\,1,\,2,\,3,\,\dots\big\}$$

a jsou na ni definovány operace sčítání, násobení a uspořádání, tj. vztah $n_1 \le n_2$.
Jeden z axiomů přirozených čísel je axiom *matematické indukce*, který nám umožňuje dokazovat tvrzení, která jsou zřejmá pro konečné množiny, pro celou množinu přirozených čísel, tj. nekonečnou množinu.

Axiom matematické indukce: Nechť je $U \subset \mathbb{N}$ taková, že:

1. $1 \in U$;
2. Je-li $n \in U$, pak $n + 1 \in U$.

Pak je $U = \mathbb{N}$.

Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,. \tag{2}$$

Řešení: Označme $U \subset \mathbb{N}$ množinu všech čísel $n \in \mathbb{N}$ takovou, že platí (2). Protože

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}\,,$$

je $1 \in U$.
Předpokládejme, že $n \in U$, tj. že pro toto n platí vztah (2). Pak je

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \big(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\big) + (n+1)^2 =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big) =$$
$$= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

což je vztah (2) pro $(n+1)$. Tedy $(n+1) \in U$ a podle axiomu matematické indukce je $U = \mathbb{N}$.

Pomocí množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ se definuje množina celých čísel $\mathbb{Z}$ tak, aby měla rovnice $n_1 + x = n_2$, kde n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$, vždy řešení v $\mathbb{Z}$, tj. aby v $\mathbb{Z}$ existovala operace odčítání. Je známo, že množina $\mathbb{Z}$ je složena z čísel

$$\mathbb{Z} = \big\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\big\}.$$

Z množiny $\mathbb{Z}$ se pak vytvoří množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ tak, aby měla $z_1 x = z_2$, kde z_1, $z_2 \in \mathbb{Z}$, $z_1 \neq 0$, vždy řešení v $\mathbb{Q}$, tj. aby v $\mathbb{Q}$ existovala operace dělení. Prvky množiny $\mathbb{Q}$ můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru $\frac{z}{n}$, kde $z \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná, tj. největší společný dělitel čísel $|z|$ a n je roven jedné.

Množina reálných čísel $\mathbb{R}$

Důvod pro zavedení množiny reálných čísel není v tom, abychom mohli definovat nějakou algebraickou operaci, jak tomu bylo v případě množiny celých a racionálních čísel, ale v tom, že množina racionálních čísel má v sobě jisté "díry". Reálná čísla tyto "díry" zaplní a jsou v jistém smyslu úplná. Proto pro ně platí určitá tvrzení, která neplatí v množině racionálních čísel, ale jejichž platnost bychom očekávali. Uvažujme například množinu

$$M = \left\{x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1};\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Lze ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq 4, \quad \text{tj.} \quad 0 < x_{n+1} < x_n \leq 4.$$

To znamená, že prvky x_n množiny M jsou nezáporné a s rostoucím n klesají. Očekávali bychom proto, že bude existovat nejmenší prvek množiny M. Kdybychom nezavedli reálná čísla, nevěděli bychom, jestli nejmenší prvek množiny M nepadne zrovna do nějaké "díry". Je známo, že každé reálné číslo x lze zapsat ve tvaru nekonečného řetězce čísel

$$x = a_0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots, \tag{3}$$

kde $a_0 \in \mathbb{Z}$ a $a_k = 0, 1, 2, \ldots, 9$ pro $k \geq 1$. Přitom racionální čísla jsou jen podmnožina celé množiny takových řetězců. Přesněji, reálné číslo x je racionální právě tehdy, když je jeho řetězec periodický, tj. když má tvar

$$x = a_0{,}a_1 a_2 \ldots a_n \overline{a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{n+k}}.$$

Ale definice reálných čísel pomocí takových řetězců není příliš vhodná pro algebraické operace. Například když sčítáte dvě čísla, začínáte sčítat od konce, který tady není.
Definice reálných čísel využívá toho, že každé reálné číslo lze s libovolnou přesností aproximovat racionálním číslem. Nebudeme zde ale zacházet do podrobností.
Nyní budeme přesněji formulovat podstatnou vlastnost množiny reálných čísel, která hraje v matematické analýze rozhodující úlohu.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *shora omezená* právě tehdy, když existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \leq K$.
Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *zdola omezená* právě tehdy, když existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq k$.
Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá *omezená* právě tehdy, když je omezená shora i zdola.

Definice. Nechť je $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $S \in \mathbb{R}$ nazveme *supremum množiny* M právě tehdy, když

1. pro každé $x \in M$ platí $x \leq S$, tj. číslo S omezuje množinu M shora;
2. Pro každé $\widehat{S} \in \mathbb{R}$ takové, že $\widehat{S} < S$, existuje $x \in M$ pro které platí $x > \widehat{S}$.

Supremum množiny M budeme značit $\sup M$.

`Poznámka.` První podmínka v definice suprema znamená, že číslo S omezuje množinu M shora a druhá podmínka vyjadřuje, že supremum je z těchto čísel nejmenší.

Podobně se definuje

Definice. Nechť je $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazveme *infimum množiny* M právě tehdy, když

1. pro každé $x \in M$ platí $x \geq s$, tj. číslo s omezuje množinu M zdola;
2. Pro každé $\widehat{s} \in \mathbb{R}$ takové, že $\widehat{s} > s$, existuje $x \in M$ pro které platí $x < \widehat{s}$.

Infimum množiny M budeme značit $\inf M$.

`Poznámka.` První podmínka v definice infimama znamená, že číslo S omezuje množinu M zdola a druhá podmínka vyjadřuje, že supremum je z těchto čísel největší.

Množina reálných čísel je zavedena tak, aby v ní platila následující věta:
Věta: Pro každou neprázdnou shora omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ existuje $\sup M \in \mathbb{R}$.
Pro každou neprázdnou zdola omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ existuje $\inf M \in \mathbb{R}$.

Rozšířená reálná osa $\mathbb{R}^*$

Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ se často rozšiřuje na množinu $\mathbb{R}^*$ tak, aby v $\mathbb{R}^*$ měla supremum a infimum každá podmnožina $M \subset \mathbb{R}^*$. Definujeme symboly $+\infty$ a $-\infty$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí nerovnost $-\infty < x < +\infty$ a množinu

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \left\{-\infty, +\infty\right\}.$$

Pak pro shora neomezenou neprázdnou množinu $M \subset \mathbb{R}$ platí $\sup M = +\infty \in \mathbb{R}^*$ a pro zdola neomezenou neprázdnou množinu $M \subset \mathbb{R}$ je $\inf M = -\infty$. Z definice suprema a infima navíc plyne, že $\sup \emptyset = -\infty$ a $\inf \emptyset = +\infty$.

Některé aritmetické operace lze rozšířit z množiny reálných čísel na množinu $\mathbb{R}^*$. Definuje se $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$ a

$$\begin{aligned}
a + (+\infty) &= +\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}; \\
a + (-\infty) &= -\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}; \\
a - (+\infty) &= -\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}; \\
a - (-\infty) &= +\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}; \\
a \cdot (+\infty) &= +\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}^*, \quad a > 0; \\
a \cdot (+\infty) &= -\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}^*, \quad a < 0; \\
a \cdot (-\infty) &= -\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}^*, \quad a > 0; \\
a \cdot (-\infty) &= +\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}^*, \quad a < 0; \\
\frac{a}{\pm\infty} &= 0 && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}; \\
\left|\frac{a}{0}\right| &= +\infty && \text{pro každé } a \in \mathbb{R}^*, \quad a \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Další operace zůstávají nedefinovány. jedná se zejména o operace $+\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\dfrac{0}{0}$ a $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Některé důležité typy podmnožin $\mathbb{R}$

Vzdálenost dvou bodů x, $y \in \mathbb{R}$ definujeme jako $d(x,y) = |x-y|$.

Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Okolím bodu a s poloměrem ε nazýváme množinu

$$U_\varepsilon(a) = \big\{x \in \mathbb{R}\,;\ |x-a| < \varepsilon\big\}\,.$$

Prstencovým okolím bodu a s poloměrem ε nazýváme množinu

$$P_\varepsilon(a) = \big\{x \in \mathbb{R}\,;\ 0 < |x-a| < \varepsilon\big\} = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}\,.$$

Nechť je $k \in \mathbb{R}$. Okolím bodu $+\infty$ nazýváme množinu

$$U_k(+\infty) = \big\{x \in \mathbb{R}\,;\ x > k\big\}$$

a okolím bodu $-\infty$ nazýváme množinu

$$U_k(-\infty) = \big\{x \in \mathbb{R}\,;\ x < k\big\}\,.$$

Definice. Bod a se nazývá vnitřní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když existuje okolí $U_\varepsilon(a) \subset M$.

Definice. Bod a se nazývá vnější bod množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když existuje okolí $U_\varepsilon(a) \cap M = \emptyset$.

Definice. Bod a se nazývá hraniční bod množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když každé okolí $U_\varepsilon(a)$ má neprázdný průnik s množinou M i jejím doplňkem $\mathbb{R} \setminus M$.

Asi nejdůležitější z těchto pojmů je pojem hromadného bodu množiny.

Definice. Bod a se nazývá hromadným bod množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když pro každé okolí je $P_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$.

`Poznámka:` Z definice hromadného bodu množiny M plyne, že každé okolí hromadného bodu obsahuje nekonečně mnoho bodů, které leží v množině M.

Definice. Bod $a \in M$ se nazývá izolovaný bod množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když existuje okolí $P_\varepsilon(a)$ takové, že $P_\varepsilon(a) \cap M = \emptyset$

Příklad: Nechť je

$$M = \left\{ \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

pak jsou všechny body $x_n = \dfrac{1}{n}$ izolované, protože když zvolíme $\varepsilon = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ je pro okolí $U_\varepsilon(x_n) \cap M = \{x_n\}$.
Bod $x = 0$ je hromadný bod množiny M, protože pro dané $\varepsilon > 0$ obsahuje okolí $U_\varepsilon(0)$ bod x_n, kde $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, který patří do množiny M.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá otevřená právě tehdy, když je každý její bod vnitřní bod množiny M.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá uzavřená právě tehdy, když obsahuje všechny své hromadné body.

Definice. Nechť je $M \subset \mathbb{R}$. Vnitřek množiny M je množina všech vnitřních bodů M a značíme jej M°.

Definice. Nechť je $M \subset \mathbb{R}$. Uzávěr množiny M je sjednocení množiny M a množiny hromadných bodů M. Uzávěr množiny M budeme značit $\overline{M}$.

Definice. Nechť je $M \subset \mathbb{R}$. Hranicí množiny M rozumíme množinu všech hraničních bodů M.

Lze ukázat, že vnitřek množiny M je největší otevřená podmnožina množiny M a že M je otevřená právě tehdy, když $M = M^\circ$.
Uzávěr množiny M je nejmenší uzavřená nadmnožina M a M je uzavřená právě tehdy, když $M = \overline{M}$.

Definice. Omezená a uzavřená množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá kompaktní.