Přednáška 10

Určitý integrál

V této přednášce se budeme zabývat určitým integrálem. Existuje několik definic určitého integrálu funkce jedné reálné proměnné. Jednotlivé integrály se liší v tom, jaké funkce lze integrovat. Obecně lze ale říct, že pokud existuje určitý integrál funkce podle různých definic, má pro všechny takové definice stejnou hodnotu.
Nejznámější jsou *Newtonův integrál*, protože pomocí tohoto integrálu se počítají v podstatě všechny určité integrály funkce jedné reálné proměnné, *Riemannův integrál*, protože má velmi názornou interpretaci a lze jej jednoduše rozšířit na integrál přes plochy a tělesa, a *Lebesgueův integrál*, který má mezi jinými určitými integrály podobnou vlastnost úplnosti, jako mají reálná čísla mezi racionálními čísly (limita posloupnosti racionálních čísel může být reálné číslo) a je definován pro největší množinu funkcí.
V přednášce budeme definovat Newtonův integrál a pak se budeme podrobněji zabývat konstrukcí Riemannova integrálu. Lebesgueovým integrálem se zabývat nebudeme, protože by to vyžadovalo mnohem více času.

Newtonův určitý integrál

Uvažujme bod, který se pohybuje. Dráhu, kterou urazil v t označme $s(t)$. Pak v časovém intervalu t_1, t_2 urazí dráhu $s(t_1, t_2) = s(t_2) - s(t_1)$. Protože okamžitá rychlost bodu v čase t je definována jako

$$v(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{s(t + \Delta) - s(t)}{\Delta} = s'(t)\,,$$

je funkce $s(t)$ podle definice jedna z primitivních funkcí k funkci $v(t)$. Jestliže tedy známe rychlost bodu $v(t)$ v intervalu (t_1, t_2), najdeme dráhu, který urazil bod v tomto časovém intervalu jako

$$s(t_1, t_2) = s(t_2) - s(t_1)\,,$$

kde $s(t)$ je primitivní funkce k funkci $v(t)$ na intervalu (t_1, t_2). Protože jde o primitivní funkci na intervalu, liší se všechny primitivní funkce o konstantu, tj. jsou-li $s_1(t)$ a $s_2(t)$ dvě primitivní funkce k funkci $v(t)$ na intervalu (t_1, t_2), existuje konstanta c taková, že $s_2(t) = s_1(t) + c$ pro každé $t \in (t_1, t_2)$. Proto pro dráhu, kterou urazil bod v časovém intervalu t_1, t_2, platí

$$s(t_1, t_2) = s_2(t_2) - s_2(t_1) = s_1(t_2) - s_1(t_1)\,,$$

a tedy nezávisí na tom, jako primitivní funkci zvolíme. Pro dráhu $s(t_1, t_2)$, kterou urazil bod v časovém intervalu t_1, t_2, pak používáme označení

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = \big[\, s(t) \,\big]_{t_1}^{t_2} = s(t_2) - s(t_1)\,,$$

kde $s(t)$ je primitivní funkce k funkci $v(t)$ na intervalu (t_1, t_2).

To nás vede k následující definici.

Definice. Nechť je $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak se reálné číslo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[\,F(x)\,\big]_a^b = F(b) - F(a) \tag{1}$$

nazývá *Newtonův určitý integrál* funkce $f(x)$ přes interval $\langle a,b\rangle$.

Jak jsme se zmínili dříve, nezávisí hodnota výrazu v (1) na volbě primitivní funkce $F(x)$.

Riemannův integrál v $\mathbb{R}$

Podstata konstrukce Riemannova integrálu je stejná pro všechny dimenze. Proto se ji pokusíme vysvětlit na příkladě tělesa $\mathcal{V}$ v $\mathbb{R}^3$, tj. v obyčejném trojrozměrném prostoru.
Těleso $\mathcal{V}$ rozdělíme na konečný počet nepřekrývajících se malých těles $\mathcal{V}_i$, pro která umíme spočítat objem ΔV_i, a takové rozdělení označíme $\mathcal{D}$. Nyní záleží na tom, co chceme spočítat. Jestliže chceme spočítat například hmotnost celého tělesa, spočítáme hmotnost všech malých těles $\mathcal{V}_1$, která je $\Delta m_i = \rho(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$, kde $\rho(x_i,y_i,z_i)$ je hustota v nějakém bodě $(x_i,y_i,z_i) \in \mathcal{V}_i$, jestliže počítáme například moment setrvačnosti vzhledem k ose z, spočítáme moment setrvačnosti vzhledem k ose z pro každé malé těleso $\mathcal{V}_i$, který je (možná znám z fyziky) $\Delta J_i = \rho(x_i,y_i,z_i)\,(x_i^2+y_i^2)\Delta V_i$, kde bod (x_i,y_i,z_i) leží ve $\mathcal{V}_i$.
Obecně spočítáme pro každé malé těleso $\mathcal{V}_i$ hodnotu výrazu $f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$, kde bod $(x_i,y_i,z_i) \in \mathcal{V}_i$. Pro dané rozdělení $\mathcal{D}$ najdeme součet

$$I_{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i\,. \tag{2}$$

Tento součet závisí na tom, jak jsme těleso $\mathcal{V}$ rozdělili a jak jsme vybrali body $(x_i,y_i,y_i) \in \mathcal{V}_i$. Označíme $|\mathcal{D}| = \max\big(\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n\big)$ objem největšího kousku, na který jsme těleso $\mathcal{V}$ rozdělili, a ve výrazu (2) přejdeme jistým způsobem k "limitě" $|\mathcal{D}| \to 0$. Tuto limitu označíme

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

a budeme ji nazývat Riemannův integrál funkce $f(x,y,z)$ přes těleso $\mathcal{V}$. Problém je v tom, že musíme zajistit, aby limita nezávisela na rozdělení tělesa $\mathcal{V}$ a na výběru bodu $(x_i,y_i,y_i) \in \mathcal{V}_i$.
V této přednášce se budeme zabývat touto konstrukcí pro funkce jedné proměnné, tj. funkce $f(x)$ bude funkce jedné proměnné a těleso $\mathcal{V}$ bude interval $\mathcal{I} = \langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$. Je-li funkce $f(x)$ nezáporná, budeme vlastně počítat obsah oblasti v rovině omezené osou x, tj. přímkou $y=0$, křivkou $y=f(x)$ a přímkami $x=a$ a $x=b$. Ale neměli byste si myslet, že těmito integrály počítáme pouze obsahy takových oblastí v rovině. Význam toho, co počítáme, závisí na interpretaci funkce $f(x)$. Například pro těleso, které vznikne rotací křivky $y=f(x) \geq 0$ kolem osy x, je objem válečku v intervalu $(x, x+\Delta)$ přibližně roven $\pi f^2(x)\Delta$ a integrál $\int_a^b \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x$ bude objem tělesa mezi rovinami $x=a$ a $x=b$.

Nyní popíšeme konstrukci Riemannova integrálu funkce $y=f(x)$ přes interval $\langle a,b\rangle$ přesněji.

Definice. Nechť je $\mathcal{I} = \langle a,b\rangle$ omezený interval. Každou konečnou množinu bodů

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \tag{3}$$

nazveme *dělení* intervalu $\mathcal{I}$ a budeme ji značit $\mathcal{D}$.

Pro dané dělení $\mathcal{D}$ označíme $\mathcal{I}_i$ intervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, kde $i = 1, \ldots, n$, a $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ délku intervalu $\mathcal{I}_i$.

Definice. Nechť je $f(x)$ omezená funkce na intervalu $\mathcal{I} = \langle a, b \rangle$ a $\mathcal{D}$ je dělení intervalu $\mathcal{I}$. Označme

$$m_i = \inf_{x \in \mathcal{I}_i} f(x)\,, \qquad M_i = \sup_{x \in \mathcal{I}_i} f(x)\,.$$

Součty

$$s_{\mathcal{D}}\big(f(x)\big) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i\,, \quad \text{resp.} \quad S_{\mathcal{D}}\big(f(x)\big) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$$

nazveme *dolní*, resp. *horní*, *integrální součet* funkce $f(x)$ příslušný dělení $\mathcal{D}$.

Protože pro každé i platí $m_i \leq M_i$, je zřejmé, že pro každou omezenou funkci $f(x)$ a každé dělení $\mathcal{D}$ je

$$s_{\mathcal{D}}(f) \leq S_{\mathcal{D}}(f)\,. \tag{4}$$

Předpoklad, že interval $\mathcal{I}$ je omezený a funkce $f(x)$ je omezená na intervalu $\mathcal{I}$, zaručují, že pro každé dělení $\mathcal{D}$ jsou součty $s_{\mathcal{D}}(f)$ a $S_{\mathcal{D}}(f)$ konečné. Přesněji pro každé dělení $\mathcal{D}$ platí

$$(b-a) \inf_{x \in \mathcal{I}} f(x) \leq s_{\mathcal{D}}(f) \leq S_{\mathcal{D}}(f) \leq (b-a) \sup_{x \in \mathcal{I}} f(x)\,.$$

Uvažujme množinu $\mathcal{M}$ všech dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\mathcal{I}$. Protože je množina

$$\Big\{ s_{\mathcal{D}}(f)\,;\ \mathcal{D} \in \mathcal{M} \Big\}$$

shora omezená číslem $(b-a) \sup\limits_{x \in \mathcal{I}} f(x)$, existuje v $\mathbb{R}$ její supremum a protože je množina

$$\Big\{ S_{\mathcal{D}}(f)\,;\ \mathcal{D} \in \mathcal{M} \Big\}$$

omezená zdola číslem $(b-a) \inf\limits_{x \in \mathcal{I}} f(x)$, existuje v $\mathbb{R}$ její infimum.

Definice. Nechť je $\mathcal{I}$ omezený interval a funkce $f(x)$ je omezená na intervalu $\mathcal{I}$. Reálná čísla

$$s(f) = \sup_{\mathcal{D} \in \mathcal{M}} \big(s_{\mathcal{D}}(f) \big)\,, \quad \text{resp.} \quad S(f) = \inf_{\mathcal{D} \in \mathcal{M}} \big(S_{\mathcal{D}}(f) \big)\,,$$

nazýváme *dolní*, resp. *horní*, Riemannův integrál funkce $f(x)$ přes interval $\mathcal{I}$.

Z nerovnosti (4) plyne, že pro každou omezenou funkci $f(x)$ platí nerovnost

$$s(f) \leq S(f)\,.$$

Pro funkci $f(x) \geq 0$ jsme v podstatě zatím udělali to, že jsme do oblasti $\mathcal{O}$ omezené osou x, grafem funkce $y = f(x)$ a přímkami $x = a$ a $x = b$ vepsali a opsali obdélníky a spočítali obsah takových vepsaných a opsaných obrazců, tj. $s_{\mathcal{D}}(f)$ a $S_{\mathcal{D}}(f)$. Pak jsme vzali největší obsah vepsaných obrazců $s(f)$ a nejmenší obsah opsaných obrazců $S(f)$. Je-li největší obsah vepsaných obrazců roven nejmenšímu obsahu opsaných obrazců, je přirozené nazvat toto číslo obsahem oblasti $\mathcal{O}$. Problém nastane, pokud dostaneme při aproximaci obsahu oblasti $\mathcal{O}$ pomocí vepsaných obrazců menší obsah, než když ji aproximujeme opsanými obrazci. V tom případě prostě prohlásíme, že nemá smyslu mluvit o obsahu oblasti $\mathcal{O}$, tj. že obsah oblasti $\mathcal{O}$ neexistuje. Proto definujeme

Definice. Nechť je $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle$ omezený interval a funkce $f(x)$ je omezená na intervalu $\mathcal{I}$. Jestliže

$$s(f) = S(f)$$

nazýváme toto číslo *Riemannův integrál* funkce $f(x)$ přes interval $\mathcal{I}$ a budeme jej značit

$$\int_{\mathcal{I}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = s(f) = S(f)\,.$$

Funkce $f(x)$, pro které existuje Riemannův integrál přes interval $\mathcal{I}$ se nazývají *integrovatelné*, přesněji Riemannovsky integrovatelné, na intervalu $\mathcal{I}$.

Existují funkce, které nejsou Riemannovsky integrovatelné. Známý je příklad tzv. Dirichletovy funkce

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ racionální}\,, \\ 0 & \text{pro } x \text{ iracionální}\,. \end{cases}$$

Pro tuto funkci je pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\langle 0, 1\rangle$

$$s_{\mathcal{D}}(D) = 0 \quad \text{a} \quad S_{\mathcal{D}}(D) = 1\,.$$

Proto je $s(D) = 0 < S(D) = 1$ a Riemannův integrál neexistuje.

Je proto užitečné znát aspoň nějaké podmínky, které zaručují existenci Riemannova integrálu funkce $f(x)$ přes interval $\mathcal{I}$. Jednoduchá podmínka, které se používá při odvození dalších užitečnějších podmínek je dána v následující větě.

Věta. Funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\mathcal{I}$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\mathcal{I}$ takové, že platí

$$S_{\mathcal{D}}(f) - s_{\mathcal{D}}(f) < \varepsilon\,. \tag{5}$$

Z obecných vět uvedeme ještě jednu větu, ze které plyne, že pro integrovatelnou funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ lze integrál najít tak, že zvolíme libovolnou posloupnost dělení $\mathcal{D}_n$ s dělícími body $x_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, k_n$, takovou, že délka nejdelšího úseku $|\mathcal{D}_n|$ dělení $\mathcal{D}_n$ se blíží k nule, a body $\xi_{n,i} \in \langle x_{n,i-1}, x_{n,i}\rangle$ libovolně, je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k_n} f\bigl(\xi_{n,i}\bigr)\,\bigl(x_{n,i} - x_{n,i-1}\bigr)\right). \tag{6}$$

Věta. Nechť existuje Riemannův integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, pro které je $\bigl|\mathcal{D}\bigr| = \max(x_i - x_{i-1}) < \delta$, a pro každou posloupnost bodů $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, platí

$$\left|I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})\right| < \varepsilon\,.$$

Uvedeme aspoň dva příklady tříd funkcí, které jsou integrovatelné.

Věta. Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ monotonní, je integrovatelná.

DŮKAZ: Pro monotonní funkce totiž víme, ve kterých bodech nabývá funkce $f(x)$ hodnoty m_i a M_i z definice horního a dolního součtu. Nechť je například funkce $f(x)$ neklesající. Je-li $f(b) = f(a)$ je funkce konstantní a integrál existuje. Nechť je $f(b) > f(a)$. Pak pro každé dělení $\mathcal{D}$ dostaneme $m_i = f(x_{i-1})$ a $M_i = f(x_i)$. Proto platí

$$S_{\mathcal{D}}(f) - s_{\mathcal{D}}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \bigl(f(x_i) - f(x_{i-1})\bigr)(x_i - x_{i-1}) .$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $\mathcal{D}$ takové, že pro každé i je $x_i - x_{i-1} < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Protože je funkce $f(x)$ neklesající, je $f(x_i) - f(x_{i-1}) \geq 0$, a proto platí nerovnost

$$S_{\mathcal{D}}(f) - s_{\mathcal{D}}(f) < \sum_{i=1}^{n} \bigl(f(x_i) - f(x_{i-1}\bigr) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \bigl(f(b) - f(a)\bigr) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \varepsilon .$$

Tedy podle (5) integrál existuje.

Věta. Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá, je integrovatelná.

Důkaz této věty je založen na tvrzení, že každá funkce spojitá na kompaktní množině je tzv. stejnoměrně spojitá a nebudeme jej uvádět.

Další věta pojednává a závislosti určitého integrálu na intervalu $\mathcal{I}$ a umožňuje nám rozšířit definici.

Věta. Funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ právě tehdy, když je pro každé $c \in (a, b)$ integrovatelná na obou intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$.
Pak platí rovnost

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x . \tag{7}$$

Prozatím jsme integrál definovali pouze pro $a < b$. Předešlá věta nám umožňuje definovat pro $a \geq b$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Pak platí

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

a vztah (7) platí pro každou trojici čísel a, b a c za předpokladu, že aspoň dva integrály existují.

Riemannův integrál lze ještě dále zobecnit na integrál přes omezenou množinu M.

Definice. Nechť je M omezená podmnožina $\mathbb{R}$ a $f(x)$ funkce omezená na množině M. Nechť je $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle$ omezený interval takový, že $M \subset \mathcal{I}$. Definujme funkci $\widehat{f}(x)$ předpisem

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } \ x \in M , \\ 0 & \text{pro } \ x \in \mathcal{I} \setminus M . \end{cases}$$

Pokud existuje Riemannův integrál $\displaystyle\int_a^b \widehat{f}(x)\,\mathrm{d}x$, řekneme, že je funkce $f(x)$ integrovatelná na množině M a píšeme

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \widehat{f}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Další vlastnost integrálu je jeho linearita vzhledem k integrandu, tj. platí

Věta. Nechť jsou funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$ integrovatelné na intervalu $\langle a,b\rangle$ a $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$. Pak je na intervalu $\langle a,b\rangle$ integrovatelná funkce $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ a platí

$$\int_a^b \big(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\big)\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Poznamenejme, že jsou-li na intervalu $\langle a,b\rangle$ integrovatelné funkce $f(x)$ a $g(x)$, je integrovatelný také jejich součin $f(x)g(x)$, ale obecně neplatí rovnost $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Když je funkce $f(x) \geq 0$, interpretovali jsme geometricky Riemannův integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jako obsah obrazce omezeného osou x, grafem funkce $y = f(x)$ a přímkami $x = a$ a $x = b$. Dejme ještě geometrickou interpretaci Riemannova integrálu pro libovolnou integrovatelnou funkci.

Nechť je dána funkce $f(x)$. Definujme funkce

$$f_+(x) = \max\big(f(x), 0\big) \quad \text{a} \quad f_-(x) = \max\big(-f(x), 0\big)\,.$$

Funkce $f_+(x)$ se obvykle nazývá nezáporná část funkce $f(x)$ a funkce $f_-(x)$ její nekladná část. Platí $f_+(x) \geq 0$, $f_-(x) \geq 0$ a rovnosti

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \quad \text{a} \quad \big|f(x)\big| = f_+(x) + f_-(x)\,.$$

Věta. Funkce $f(x)$ je integrovatelná na množině M právě tehdy, když jsou na M integrovatelné obě funkce $f_+(x)$ a $f_-(x)$, tj. je integrovatelná také funkce $\big|f(x)\big|$, a platí

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}x = \int_M f_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_M f_-(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_M \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x = \int_M f_+(x)\,\mathrm{d}x + \int_M f_-(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Z toho je zřejmé, že pro libovolnou integrovatelnou funkci $f(x)$ je Riemannův integrál rozdíl obsahu plochy, která leží nad osou x, a obsahu plochy, která leží pod osou x.

Nyní uvedeme některé nerovnosti, které jsou potřebné k důkazu dalších důležitých vět.

Věta. Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\mathcal{I} = \langle a,b\rangle$ a pro každé $x \in \mathcal{I}$ platí $k \leq f(x) \leq K$. Pak platí nerovnost

$$k(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq K(b-a)\,.$$

DŮKAZ: Pro každé dělení $\mathcal{D}$ intervalu $\mathcal{I}$ platí nerovnost

$$k(b-a) \leq s_{\mathcal{D}}(f) \leq S_{\mathcal{D}} \leq K(b-a)\,.$$

Jestliže přejdeme na levé straně k supremu a na pravé straně k infimu, dostaneme nerovnost

$$k(b-a) \leq s(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S(f) \leq K(b-a)\,.$$

Věta. Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na množině M a pro každé $x \in M$ platí $g(x) \leq f(x)$. Pak je

$$\int_M g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_M f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8}$$

DŮKAZ: plyne z nerovnosti $0 \leq f(x) - g(x)$ a předchozí věty.

Věta. Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na množině M, platí nerovnost

$$\left|\int_M f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_M \bigl|f(x)\bigr|\,\mathrm{d}x\,.$$

DŮKAZ: plyne z nerovností $-f(x) \leq \bigl|f(x)\bigr| \leq f(x)$ a předchozí věty.

Riemannův integrál jako funkce horní meze

Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$, je integrovatelná také na intervalu $\langle a,c\rangle$ pro každé $c \in \langle a,b\rangle$. Proto můžeme na intervalu $\langle a,b\rangle$ definovat funkci

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{9}$$

Nyní se budeme zabývat touto funkcí.

Věta. Je-li funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$, je funkce $F(x)$ definovaná vztahem (9) na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitá.

DŮKAZ: Máme dokázat, že pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ je

$$\lim_{h\to 0}\Bigl(F(x+h) - F(x)\Bigr) = 0\,.$$

Podle definice funkce $F(x)$ je

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Protože je funkce $f(x)$ omezená, existuje číslo K takové, že $\bigl|f(x)\bigr| \leq K$. Podle výše uvedených nerovností je

$$\bigl|F(x+h) - F(x)\bigr| = \left|\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^{x+h} \bigl|f(t)\bigr|\,\mathrm{d}t \leq K\int_x^{x+h} \mathrm{d}t = Kh\,.$$

Tedy platí

$$\lim_{h\to 0}\bigl|F(x+h)-F(x)\bigr| = 0\,,\quad \text{tj.}\quad \lim_{h\to 0}\bigl(F(x+h)-F(x)\bigr) = 0\,.$$

Věta. Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$ a existuje konečná limita $\lim\limits_{h\to 0_+} f(x\pm h) = A_\pm$. Pak je

$$\lim_{h\to 0_+}\frac{F(x\pm h)-F(x)}{h} = A_\pm\,. \tag{10}$$

Důkaz: Tvrzení dokážeme pouze pro limitu zprava, tj. pro znaménko $+$. Pro limitu zleva je důkaz analogický.
Jak jsme ukázali dříve, je

$$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Proto je

$$\bigl|F(x+h)-F(x)-A_+h\bigr| = \left|\int_x^{x+h}\bigl(f(t)-A_+\bigr)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_x^{x+h}\bigl|f(t)-A_+\bigr|\,\mathrm{d}t\,.$$

Protože $\lim\limits_{t\to x_+} f(t) = A_+$, existuje ke každému $\varepsilon>0$ číslo $\delta>0$ takové, že pro každé t, pro které je $x<t<x+\delta$, je $\bigl|f(t)-A_+\bigr|<\varepsilon$.
Zvolíme-li tedy $0<h<\delta$, dostaneme pro taková h nerovnost

$$\bigl|F(x+h)-F(x)-A_+h\bigr| < \int_x^{x+h}\varepsilon\,\mathrm{d}t = h\varepsilon\,.$$

Proto pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že pro každé h, $0<h<\delta$ je

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-A_+\right| < \varepsilon\,,\quad \text{tj.}\quad \lim_{h\to 0_+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = A_+\,.$$

Věta. Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$ a spojitá v bodě x. Pak je

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x)\,. \tag{11}$$

Důkaz: Je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě x, je $\lim\limits_{h\to 0_+} f(x+h) = \lim\limits_{h\to 0_+} f(x-h) = f(x)$, je tvrzení věty důsledkem vztahu (10).

Příklad: Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{\int_0^x (1-\cos\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

Řešení: Protože se jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$, můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo. Tak dostaneme

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{\int_0^x (1-\cos\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^2} = \lim_{x\to 0_+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{2x} = \lim_{x\to 0_+}\frac{\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0_+}\frac{\cos\sqrt{x}}{4} = \frac{1}{4}\,.$$

Víme, že když je funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitá, je na tomto intervalu integrovatelná. Vztah (11) ale znamená, že funkce $F(x)$ definovaná vztahem (9) je její primitivní funkce. Tedy platí

Věta. Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, existuje k ní na tomto intervalu primitivní funkce.

Vztah (11) nám poměrně jednoduše umožňuje počítat Riemannův integrál. Platí totiž

Věta. Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)\,, \tag{12}$$

kde $F(x)$ je libovolná primitivní funkce k funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Důkaz: Nechť je $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$. Protože je funkce definovaná vztahem (9) primitivní funkce na tomto intervalu, existuje konstanta c taková, že pro každé $x\in\langle a,b\rangle$ platí $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + c$. Tedy platí

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + c - \left(\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t + c\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Z této věty plyne, že pro omezenou spojitou funkci na intervalu $\langle a,b\rangle$ je Riemannův integrál roven Newtonovu.

Následující věty jsou obdobou podobných vět pro neurčitý integrál.

Věta (*o integraci per partes*). Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak platí

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{13}$$

Důkaz: Protože jsou funkce

$$F(x) = \int_a^x f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{a} \quad \widehat{F}(x) = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t$$

dvě primitivní funkce k funkci $f'(x)\,g(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$, mohou se lišit pouze o konstantu. Ale protože pro $x=a$ je $F(a)=\widehat{F}(a)=0$, jsou tyto funkce rovny pro každé $x\in\langle a,b\rangle$. Rovnost (13) je pak rovnost $F(b)=\widehat{F}(b)$.

Příklad: Najděte integrál $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$, kde $n\ge 2$.

Řešení: Označme $f'(x) = \sin x$ a $g(x) = \sin^{n-1} x$. Protože $f(x) = -\cos x$ a $g'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x$, dostaneme z (13)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\cos\frac{\pi}{2}\,\sin^{n-1}\frac{\pi}{2} + \cos 0\,\sin^{n-1} 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x =$$
$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x\,.$$

Jestliže použijeme vztah $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, dostaneme

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x \,.$$

S této rovnice plyne

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x \,.$$

Podobně lze ukázat, že pro $n \geq 2$ platí

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \,\mathrm{d}x \,.$$

Pomocí těchto vztahů lze snižovat v integrálech mocniny, až dostaneme

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{nebo} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^0 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \,.$$

Nyní uvedeme dvě věty o substituci v určitém integrálu. Podobně jako v případě neurčitého integrálu mají obě tyto věty tvar

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(t)\bigr) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t \,, \tag{14}$$

ale předpoklady se liší podle toho, zda známý integrál, pomocí něhož počítáme druhý, je v rovnosti (14) integrál vpravo nebo vlevo.

Věta (*první věta o substituci*). Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle A, B\rangle$ a funkce $\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle A, B\rangle$ má spojitou derivaci. Nechť platí $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$. Pak platí rovnost

$$\int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(t)\bigr) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

V této větě předpokládáme, že známe integrál $\displaystyle\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$ a počítáme druhý integrál.

Důkaz: Je-li $F(x)$ na intervalu $\langle A, B\rangle$ primitivní funkce k funkci $f(x)$, je podle první věty o substituci pro neurčitý integrál funkce $\Phi(t) = F\bigl(\varphi(t)\bigr)$ na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ primitivní funkcí k funkci $f\bigl(\varphi(t)\bigr) \cdot \varphi'(t)$. Proto je integrál vlevo roven

$$\int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(t)\bigr) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F\bigl(\varphi(\beta)\bigr) - F\bigl(\varphi(\alpha)\bigr) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

Věta (*druhá věta o substituci*). Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce $\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ je spojitě diferencovatelná funkce, která zobrazuje interval $\langle \alpha, \beta\rangle$ na interval $\langle a, b\rangle$. Nechť je $\varphi'(t) \neq 0$. Pak platí

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(t)\bigr) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t \,.$$

Zde předpokládáme, že známe integrál $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(t)\bigr)\cdot\varphi'(t) \,\mathrm{d}t$ a počítáme integrál $\displaystyle\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$.

Důkaz: je obdobný jako v případě první věty o substituci.

Věty o střední hodnotě integrálního počtu

Uvedeme ještě dvě věty, které jsou známy jako věty o střední hodnotě integrálního počtu.

Věta (*první věta o střední hodnotě*). Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$, $g(x) \geq 0$ a platí $k \leq f(x) \leq K$. Pak platí nerovnost

$$k \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leq K \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Je-li navíc funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá, existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{15}$$

Důkaz: Protože je $g(x) \geq 0$, platí pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ nerovnost

$$kg(x) \leq f(x)\,g(x) \leq Kg(x)$$

a protože jsou funkce $g(x)$ a $f(x)\,g(x)$ integrovatelné, plyne uvedená nerovnost z (8). Je-li navíc funkce $f(x)$ spojitá, zobrazuje interval $\langle a, b\rangle$ na interval $\langle k, K\rangle$, kde $k = \min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ a $K = \max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$. Tedy existuje $c \in (a, b)$ takové, že platí (15).

Věta (*druhá věta o střední hodnotě*). Nechť je $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $g(x)$ je monotonní funkce, která má na $\langle a, b\rangle$ spojitou derivaci. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(b) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + g(a) \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{16}$$

Důkaz: Za uvedených předpokladů lze druhou větu o střední hodnotě dokázat integrací per partes. Nechť je $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$. Pak je podle (13)

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože je funkce $g(x)$ monotonní, nemění její derivace na intervalu $\langle a, b\rangle$ znaménko. Proto lze na poslední integrál použít první větu o střední hodnotě (15). Podle ní existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(c) \int_a^b g'(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(c)\big(g(b) - g(a)\big) = \\ &= g(b)\big(F(b) - F(c)\big) + g(a)\big(F(c) - F(a)\big)\,.\end{aligned}$$

Ale protože je $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$, je tento vztah rovnost (16).

Použití Riemannova integrálu

Riemannův integrál jsme zavedli tak, aby pro nezápornou funkci $f(x)$, byla jeho hodnota rovna obsahu plochy omezené osou x, grafem funkce $y = f(x)$ a přímkami $x = a$ a $x = b$. Postup, kterým jsme zavedli při definici Riemannova integrálu lze aplikovat i při výpočtu obsahu jiných obrazců.
Je-li například oblast omezena spojitou křivkou $r = r(\varphi) \ge 0$, kde $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, a polopřímkami $\varphi = \alpha$ a $\varphi = \beta$, lze postupovat tak, že interval $\langle\alpha, \beta\rangle$ rozdělíme na malé úseky $\varPhi_i$, které mají délku $\Delta\varphi_i$ a spočítáme přibližně obsah těchto malých výsečí. Ten je

$$\Delta S_i = \tfrac{1}{2}\, r^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i\,,$$

kde $\varphi_i \in \varPhi_i$. Pro obsah celé výseče pak dostaneme

$$S \approx \sum_i \Delta S_i = \sum_i \tfrac{1}{2}\, r^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i\,.$$

A přejdeme-li k limitě $\left|\Delta\varphi_i\right| \to 0$, dostaneme pro obsah výseče vztah

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Z mnohých dalších použití Riemannova integrálu ukážeme ještě výpočet délky křivky, která je dána parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$ a $z = z(t)$, $a \le t \le b$, kde funkce $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ mají na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité derivace. Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na malé dílky $\mathcal{T}_i$, které mají délku Δt_i. Obraz každého dílku v prostoru označíme $\big(\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \mathcal{Z}_i\big)$. Podle Pythagorovy věty je délka křivky přibližně rovna

$$\Delta s_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}\,,$$

kde Δx_i je délka intervalu $\mathcal{X}_i$, Δy_i je délka intervalu $\mathcal{Y}_i$ a Δz_i je délka intervalu $\mathcal{Z}_i$. Ty mají přibližně velikost

$$\Delta x_i \approx \left|x'(t_i)\Delta t_i\right|, \qquad \Delta y_i \approx \left|y'(t_i)\Delta t_i\right|, \qquad \Delta z_i \approx \left|z'(t_i)\Delta t_i\right|,$$

kde $t_i \in \mathcal{T}_i$. Jestliže použijeme tuto aproximaci, dostaneme

$$\Delta s_i \approx \sqrt{\big(x'(t_i)\big)^2 + \big(y'(t_i)\big)^2 + \big(z(t_i)\big)^2}\,\Delta t_i$$

a po sečtení zjistíme, že

$$s \approx \sum_i \Delta s_i = \sum_i \sqrt{\big(x'(t_i)\big)^2 + \big(y'(t_i)\big)^2 + \big(z(t_i)\big)^2}\,\Delta t_i\,.$$

Když přejdeme k limitě $\left|\Delta t_i\right| \to 0$, vede tato konstrukce k vyjádření délky křivky pomocí Riemannova integrálu

$$s = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$