Přednáška 13

Fourierovy řady a Fourierova transformace

V této přednášce se budeme zabývat periodickými funkcemi. Připomeňme, že funkce $f(t)$ je periodická s periodou $T > 0$, jestliže pro každé $t \in D_f$ a celé n je $t + nT \in D_f$ a platí rovnost $f(t) = f(t + nT)$.
Z periodických funkcí s periodou T nás budou zajímat funkce, které jsou absolutně integrovatelné na intervalu $\langle 0, T\rangle$, tj. pro které existuje nevlastní integrál $\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ a pro které je $\displaystyle\int_0^T \bigl|f(t)\bigr|\,\mathrm{d}t < \infty$. Množinu takových funkcí budeme značit $\mathcal{P}(T)$.

Tvrzení. Pro každou funkci $f(t) \in \mathcal{P}(T)$ a $\tau \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_\tau^{\tau+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{1}$$

Důkaz: Pro $\tau \in \mathbb{R}$ označme $\tau_0 \in \langle 0, T)$ takové, že $\tau = \tau_0 + nT$, kde $n \in \mathbb{Z}$. Pak je

$$\begin{aligned}\int_\tau^{\tau+T} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\tau_0+nT}^{\tau_0+(n+1)T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\tau_0+nT}^{(n+1)T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{(n+1)T}^{\tau_0+(n+1)T} f(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{\tau_0}^{T} f(x+nT)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\tau_0} f\bigl(x+(n+1)T\bigr)\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

kde jsme v prvním integrálu použili substituci $t = x + nT$ a ve druhém substituci $t = x + (n + 1)T$. A protože $f(t) \in \mathcal{P}(T)$, platí

$$\int_\tau^{\tau+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\tau_0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\tau_0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Trigonometrické polynomy

Pro $T > 0$ budeme v této přednášce značit

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Funkce 1 a $\cos n\omega t$ a $\sin n\omega t$, kde $n \in \mathbb{N}$, jsou periodické s periodou T. Funkci

$$f(t) = \tfrac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{n} \bigl(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t\bigr)\,, \tag{2}$$

kde a_k, b_k jsou reálné (obecně mohou být i komplexní) konstanty, budeme nazývat *trigonometrický polynom* stupně nejvýše n. Je-li alespoň jedno z čísel a_n nebo b_n různé od nuly, říkáme, že (2) je trigonometrický polynom stupně n. Je zřejmé, že každý trigonometrický polynom je prvkem množiny $\mathcal{P}(T)$.

Jestliže použijeme Eulerovy vztahy

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\,, \qquad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\,,$$

lze trigonometrický polynom (2) zapsat ve tvaru

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} + c_{-k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} \right) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}\,, \tag{3}$$

kde

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,, \qquad c_k = \frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2}\,, \qquad c_{-k} = \frac{a_k + \mathrm{i}b_k}{2}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,. \tag{4}$$

Dále budeme pro n, $k \in \mathbb{N}$, $n \neq k$, potřebovat integrály

$$\begin{aligned}
\int_0^T \mathrm{d}t &= T\,,\\
\int_0^T \cos n\omega t \,\mathrm{d}t &= \int_0^T \sin n\omega t \,\mathrm{d}t = 0\,,\\
\int_0^T \sin k\omega t \cos n\omega t \,\mathrm{d}t &= \tfrac{1}{2} \int_0^T \big(\sin(k-n)\omega t + \sin(k+n)\omega t \big) \,\mathrm{d}t = 0\,, \quad \text{platí i pro } k = n\\
\int_0^T \cos k\omega t \cos n\omega t \,\mathrm{d}t &= \tfrac{1}{2} \int_0^T \big(\cos(k-n)\omega t + \cos(k+n)\omega t \big) \,\mathrm{d}t = 0\,,\\
\int_0^T \sin k\omega t \sin n\omega t \,\mathrm{d}t &= \tfrac{1}{2} \int_0^T \big(\cos(k-n)\omega t - \cos(k+n)\omega t \big) \,\mathrm{d}t = 0\,,\\
\int_0^T \cos^2 k\omega t \,\mathrm{d}t &= \tfrac{1}{2} \int_0^T \big(1 + \cos 2k\omega t \big) \,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\,T\,,\\
\int_0^T \sin^2 k\omega t \,\mathrm{d}t &= \tfrac{1}{2} \int_0^T \big(1 - \cos 2k\omega t \big) \,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\,T\,,\\
\int_0^T \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} \,\mathrm{d}t &= 0\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,, \quad n \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Věta. Nechť je $f(t)$ trigonometrický polynom (2) nebo (3). Pak platí

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_\tau^{\tau+T} f(t) \,\mathrm{d}t\,, \tag{5}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_\tau^{\tau+T} f(t) \cos k\omega t \,\mathrm{d}t\,, \tag{6}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_\tau^{\tau+T} f(t) \sin k\omega t \,\mathrm{d}t\,, \tag{7}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t} \,\mathrm{d}t\,. \tag{8}$$

Důkaz: je bezprostředním důsledkem vztahu (1) a výše uvedených integrálů.

Fourierovy řady

Jestliže ve vztazích (2) a (3) přejdeme k limitě $n \to \infty$ dostaneme tzv. *trigonometrické řady*

$$\tfrac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\bigr)\,, \qquad c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} + c_{-n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\bigr)\,. \tag{9}$$

Na množině všech $t \in \mathbb{R}$, ve kterých řady (9) konvergují, definují jistou funkci $f(t)$, která má periodu T.
Jestliže řady (9) konvergují stejnoměrně v $\mathbb{R}$ pak definují funkci $f(t) \in \mathcal{P}(T)$ a pro koeficienty a_n, b_n a c_n platí (5) – (8).

Tedy lze-li funkci $f(t)$ rozvinout do trigonometrické řady, která je stejnoměrně konvergentní v $\mathbb{R}$, jsou její koeficienty určeny vztahy (5) – (8). Ale tyto koeficienty lze spočítat pro každou funkci $f(t)$ absolutně integrovatelnou na intervalu $\langle \tau, \tau + T\rangle$. Proto můžeme ke každé takové funkci definovat trigonometrickou řadu (9).

Definice. Nechť je funkce $f(t)$ absolutně integrovatelná v intervalu $\langle \tau, \tau + T\rangle$. Pak trigonometrickou řadu

$$f(t) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\bigr) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} + c_{-n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\bigr)\,, \tag{10}$$

kde jsou koeficienty a_n, b_n a c_n dány vztahy (5) – (8), nazýváme *Fourierovou řadou* funkce $f(t)$ v intervalu $\langle \tau, \tau + T\rangle$.
Čísla a_n, b_n a c_n, nazýváme *koeficienty Fourierovy řady* funkce $f(t)$ v intervalu $\langle \tau, \tau + T\rangle$.

Příklad: Najděte Fourierovu řadu funkce $f(t) = t$ v intervalu $\langle 0, 1\rangle$.
Řešení: V tomto příkladě je $\tau = 0$, $T = 1$ a $\omega = 2\pi$. Podle definice je

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = 1\,,\\
a_n &= 2\int_0^1 t\cos 2\pi nt\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{t\sin 2\pi nt}{2\pi n}\right]_0^1 - \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \sin 2\pi nt\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\cos 2\pi nt}{2\pi^2 n^2}\right]_0^1 = 0\,,\\
b_n &= 2\int_0^1 t\sin 2\pi nt\,\mathrm{d}t = 2\left[-\frac{t\cos 2\pi nt}{2\pi n}\right]_0^1 + \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos 2\pi nt\,\mathrm{d}t =\\
&= -\frac{1}{\pi n} + \left[\frac{\sin 2\pi nt}{2\pi^2 n^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{\pi n}\,.
\end{aligned}$$

Tedy hledaná Fourierova řada je

$$f(t) = t \approx \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nt}{\pi n} \qquad \text{v} \quad \langle 0, 1\rangle\,. \tag{11}$$

Z definice Fourierových koeficientů je zřejmé, že pro reálnou funkci $f(t)$, jsou koeficienty její Fourierovy řady a_n a b_n reálné a platí $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Věta. Jsou-li funkce $f(t)$ a $g(t)$ absolutně integrovatelné na intervalu $\langle \tau, \tau + T\rangle$ a jejich Fourierovy koeficienty jsou a_n, b_n a $\widehat{a}_n$, $\widehat{b}_n$, jsou Fourierovy koeficienty funkce $Af(t)+Bg(t)$ rovny $Aa_n + B\widehat{a}_n$, $Ab_n + B\widehat{b}_n$.
Důkaz: plyne ihned z linearity integrálu.

Věta. Je-li Fourierova řada funkce $f(t)$ v intervalu $\langle \tau, \tau+T \rangle$ rovna (10), pak je pro každé $\alpha > 0$ Fourierova řada funkce $g(t) = f(\alpha t)$ v intervalu $\big\langle \alpha^{-1}\tau, \alpha^{-1}(\tau+T) \big\rangle$ rovna

$$g(t) = f(\alpha t) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos n\omega\alpha t + b_n \sin n\omega\alpha t \big) \,. \tag{12}$$

Vztah (12) v podstatě říká, že Fourierovu řadu funkce $g(t) = f(\alpha t)$ dostaneme z Fourierovy řady funkce $f(t)$ tak, že do ní dosadíme $t \mapsto \alpha t$.

Důkaz: Protože délka intervalu $\big\langle \alpha^{-1}\tau, \alpha^{-1}(\tau+T) \big\rangle$ je $\widehat{T} = \alpha^{-1}T$ a $\widehat{\omega} = \alpha\omega$. Pro Fourierovy koeficienty funkce $g(t)$ v intervalu $\big\langle \alpha^{-1}\tau, \alpha^{-1}(\tau+T) \big\rangle$ dostaneme podle definice například

$$\begin{aligned} \widehat{a}_n &= \frac{2}{\widehat{T}} \int_{\alpha^{-1}\tau}^{\alpha^{-1}(\tau+T)} g(t) \cos n\widehat{\omega} t \,\mathrm{d}t = \frac{2\alpha}{T} \int_{\alpha^{-1}\tau}^{\alpha^{-1}(\tau+T)} f(\alpha t) \cos n\omega\alpha t \,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} f(x) \cos n\omega x \,\mathrm{d}x = a_n \,. \end{aligned}$$

kde jsme použili substituci $\alpha t = x$.
Podobně se dokáže vztah mezi koeficienty $\widehat{b}_n$ a b_n.

Příklad: V předcházejícím příkladě jsme našli Fourierovu řadu funkce $f(t) = t$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Jestliže zvolíme $\alpha = \dfrac{1}{2\pi}$ dostaneme podle (11) a (12) pro funkci

$$g(t) = f\Big(\frac{t}{2\pi}\Big) = \frac{t}{2\pi} \qquad \text{v} \quad \langle 0, 2\pi \rangle$$

Fourierovu řadu

$$g(t) = \frac{t}{2\pi} \approx \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{\pi n} \qquad \text{v} \quad \langle 0, 2\pi \rangle \,.$$

Věta. Je-li Fourierova řada funkce $f(t)$ v intervalu $\langle \tau, \tau+T \rangle$ rovna (10), pak je pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ Fourierova řada funkce $g(t) = f(t-\alpha)$ v intervalu $\langle \tau+\alpha, \tau+\alpha+T \rangle$ rovna

$$g(t) = f(t-\alpha) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos n\omega(t-\alpha) + b_n \sin n\omega(t-\alpha) \big) \,. \tag{13}$$

Vztah (13) v podstatě říká, že Fourierovu řadu funkce $g(t) = f(t-\alpha)$ dostaneme z Fourierovy řady funkce $f(t)$ tak, že do ní dosadíme $t \mapsto t-\alpha$.

Zajímavý je zejména případ, kdy je funkce $f(t)$ periodická s periodou T, tj. $f(t) \in \mathcal{P}(T)$. Pak v (5)–(8) nezávisí podle (1) na volbě τ a lze jej zvolit například $\tau = -\frac{1}{2}T$.
Platí následující tvrzení:

1. Když je funkce $f(t)$ sudá, tj. když $f(-t) = f(t)$, je $b_n = 0$ a $c_{-n} = c_n$, a Fourierova řada funkce $f(t)$ obsahuje pouze kosinové členy;
2. Když je funkce $f(t)$ lichá, tj. když $f(-t) = -f(t)$, je $a_n = 0$ a $c_{-n} = -c_n$, a Fourierova řada funkce $f(t)$ obsahuje pouze sinové členy.

Vzniká přirozeně otázka, k čemu konverguje Fourierova řada (10) funkce $f(t)$ v intervalu $\langle\tau,\tau+T\rangle$ bodě $t\in(\tau,\tau+T)$. Za poměrně obecných předpokladů platí, že

$$\tfrac{1}{2}\,a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\bigr)=\tfrac{1}{2}\,\bigl(f(t_+)+f(t_-)\bigr)\,, \tag{14}$$

kde $f(t_\pm)=\lim\limits_{h\to 0_\pm}f(t+h)$ jsou limity funkce $f(t)$ v bodě t zprava a zleva.

Speciálně v bodě spojitosti funkce $f(t)$ je

$$f(t)=\tfrac{1}{2}\,a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\bigr)\,.$$

Příklad: Najděte Fourierovu řadu funkce $f(t)$, která je periodická s periodou $T=1$ a na intervalu $\langle 0,1\rangle$ je definována vztahem $f(t)=t^2$.

Řešení: Protože $T=1$ je $\omega=2\pi$ a koeficienty Fourierovy řady dané funkce najdeme ze vztahů

$$\begin{aligned}
a_0&=2\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\,,\\
a_n&=2\int_0^1 t^2\cos 2\pi nt\,\mathrm{d}t=2\left[\frac{t^2\sin 2\pi nt}{2\pi n}+\frac{t\cos 2\pi nt}{2\pi^2n^2}-\frac{\sin 2\pi nt}{4\pi^3n^3}\right]_0^1=\frac{1}{\pi^2n^2}\,,\\
b_n&=2\int_0^1 t^2\sin 2\pi nt\,\mathrm{d}t=2\left[-\frac{t^2\cos 2\pi nt}{2\pi n}-\frac{t\sin 2\pi nt}{2\pi^2n^2}+\frac{\cos 2\pi nt}{4\pi^3n^3}\right]_0^1=-\frac{1}{\pi n}\,.
\end{aligned}$$

Tedy hledaná Fourierova řada je pro $t\in\langle 0,1\rangle$

$$t^2\approx\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos 2\pi nt}{\pi^2n^2}-\frac{\sin 2\pi nt}{\pi n}\right). \tag{15}$$

Protože $f(0_+)=\lim\limits_{t\to 0_+}f(t)=0$ a $f(0_-)=\lim\limits_{t\to 0_-}f(t)=\lim\limits_{t\to 1_-}f(t)=1$ dostaneme pro $t=0$ vztah

$$\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2n^2}=\frac{1}{2}\,,$$

neboli

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\,. \tag{16}$$

Nechť je $f(t)$ periodická funkce s periodou T a

$$f(t)\approx\tfrac{1}{2}\,a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\bigr)$$

její Fourierova řada. Pak je

$$f(t)-\tfrac{1}{2}\,a_0\approx\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\bigr)$$

a lze očekávat, že integrál této funkce, tj. funkce

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \tfrac{1}{2}\,a_0 t\,,$$

bude periodická s periodou T. Skutečně podle definice a_0 platí pro každé t

$$F(t+T) - F(t) = \int_t^{t+T} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \tfrac{1}{2}\,a_0 T = 0\,,$$

a tedy funkce $F(t)$ je periodická s periodou T. Když budeme počítat Fourierovy koeficienty A_n a B_n funkce $F(t)$, dostaneme pro $n \geq 1$ integrací per partes

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\left[\frac{F(t)\sin n\omega t}{\omega n}\right]_0^T - \frac{2}{n\omega T}\int_0^T \bigl(f(t) - \tfrac{1}{2}\,a_0\bigr)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t = \\
&= -\frac{2}{n\omega T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t = -\frac{b_n}{\omega n}\,, \\
B_n &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\left[-\frac{F(t)\cos n\omega t}{\omega n}\right]_0^T + \frac{2}{n\omega T}\int_0^T \bigl(f(t) - \tfrac{1}{2}\,a_0\bigr)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{2}{n\omega T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{a_n}{\omega n}\,.
\end{aligned}$$

Fourierova řada funkce $F(t)$ tedy je

$$F(t) \approx \tfrac{1}{2}\,A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n\cos n\omega t + a_n\sin n\omega t}{\omega n}\,. \qquad (17)$$

Protože je funkce $F(t)$ spojitá a $F(0) = 0$, dostaneme pro $t = 0$

$$A_0 = \frac{2}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\,. \qquad (18)$$

Příklad: V (11) jsme zjistili, že Fourierova řada funkce $f(t)$ s periodou $T = 1$, která je na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ definovaná předpisem $f(t) = t$ je

$$t \approx \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n t}{\pi n}\,.$$

V tomto případě je funkce $F(t)$ periodická funkce s periodou $T = 1$, která je pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ definovaná vztahem

$$F(t) = \int_0^t \tau\,\mathrm{d}\tau - \frac{t}{2} = \frac{t(t-1)}{2}\,.$$

Její Fourierova řada podle (17) je

$$F(t) \approx \tfrac{1}{2}\,A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n t}{2\pi^2 n^2}\,.$$

Pro konstantu A_0 dostaneme podle (18)

$$A_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2}\,.$$

Na druhou stranu je

$$A_0 = 2\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 t(t-1)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\,.$$

Srovnáním těchto vztahů opět dostaneme rovnost (16).

Je-li dána funkce $f(t)$ na intervalu $\langle 0, T\rangle$, lze pro ni na tomto intervalu sestrojit různé Fourierovy rozvoje. Uvedeme aspoň některé z nich.

1. Jestliže funkci $f(t)$ rozšíříme z intervalu $\langle 0, T\rangle$ na $\mathbb{R}$ periodicky, dostaneme periodickou funkci s periodou T. Fourierův rozvoj této funkce je dán vztahem (10), kde koeficienty a_n a b_n určíme pomocí (5) – (7).
2. Funkci $f(t)$ nejprve rozšíříme na interval $\langle -T, T\rangle$ tak, aby byla lichá, tj. definujeme funkci $f_1(t) = f(t)$ pro $t \in \langle 0, T\rangle$ a $f_1(t) = -f(-t)$ pro $t \in \langle -T, 0)$. Tuto funkci $f_1(t)$ pak rozšíříme na celé $\mathbb{R}$ s periodou $T_1 = 2T$. Když budeme hledat Fourierův rozvoj funkce $f_1(t)$, je

   $$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{\pi}{T} = \tfrac{1}{2}\omega\,.$$

   Protože se jedná o lichou funkci, jsou Fourierovy koeficienty $a_n^{(1)} = 0$ a Fourierovy koeficienty $b_n^{(1)}$ dostaneme

   $$b_n^{(1)} = \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} f_1(t)\sin n\omega_1 t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \tfrac{1}{2}\,n\omega t\,\mathrm{d}t\,.$$

   Pro funkci $f(t)$ pak na intervalu $\langle 0, T\rangle$ získáme řadu

   $$f(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(1)} \sin \tfrac{1}{2}n\omega t\,. \tag{19}$$

   Taková Fourierova řada se nazývá *sinová Fourierova řada.*
3. Jestliže funkci $f(t)$ nejprve rozšíříme na interval $\langle -T, T\rangle$ tak, aby byla sudá, tj. definujeme funkci $f_2(t) = f(t)$ pro $t \in \langle 0, T\rangle$ a $f_2(t) = f(-t)$ pro $t \in \langle -T, 0\rangle$, a pak na celé $\mathbb{R}$ s periodou $T_2 = 2T$, dostaneme sudou funkci. Proto jsou její Fourierovy koeficienty $b_n^{(2)} = 0$. Protože i nyní je $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega$ dostaneme pro koeficienty $a_n^{(2)}$

   $$a_0^{(2)} = \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} f_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = a_0\,,$$
   $$a_n^{(2)} = \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} f_2(t)\cos \tfrac{1}{2}n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos \tfrac{1}{2}n\omega t\,\mathrm{d}t\,.$$

   Pro funkci $f(t)$ pak na intervalu $\langle 0, T\rangle$ získáme řadu

   $$f(t) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} \cos \tfrac{1}{2}n\omega t\,. \tag{20}$$

   Taková Fourierova řada se nazývá *kosinová Fourierova řada.*

Příklad: V (15) jsme našli Fourierovu řadu funkce $f(t) = t^2$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$, která měla periodu $T = 1$. Najděte pro tuto funkci sinovou a kosinovou řadu.

Řešení: Pro sinovou Fourierovu řadu jsou koeficienty

$$\begin{aligned} b_n^{(1)} &= 2\int_0^1 t^2 \sin \pi n t \, \mathrm{d}t = 2\left[-\frac{t^2\cos \pi n t}{\pi n} + \frac{2t \sin \pi n t}{\pi^2 n^2} + \frac{2\cos \pi n t}{\pi^3 n^3}\right]_0^1 = \\ &= 2\,\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} + 4\,\frac{(-1)^n - 1}{\pi^3 n^3}\,, \end{aligned}$$

protože $\cos \pi n = (-1)^n$. Příslušná sinová řada pak je

$$t^2 \approx \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\,\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} + 4\,\frac{(-1)^n - 1}{\pi^3 n^3}\right)\sin \pi n t\,.$$

Pro kosinovou Fourierovu řadu je

$$\begin{aligned} a_0^{(2)} &= 2\int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{2}{3}\,, \\ a_n^{(2)} &= 2\int_0^1 t^2 \cos \pi n t \, \mathrm{d}t = 2\left[\frac{t^2 \sin \pi n t}{\pi n} + \frac{2t\cos \pi n t}{\pi^2 n^2} - \frac{2\sin \pi n t}{\pi^3 n^3}\right]_0^1 = 4\,\frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2}\,. \end{aligned}$$

Příslušná kosinová řada pak je

$$t^2 \approx \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos \pi n t\,.$$

Speciálně pro $t = 0$ dostaneme

$$0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\,, \qquad \text{tj.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Jestliže jsou reálné funkce $f(t)$ a $g(t)$ spojité na intervalu $\langle 0, T\rangle$ a jejich Fourierovy jsou

$$\begin{aligned} f(t) &= \tfrac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos \omega n t + b_n \sin \omega n t\big)\,, \\ g(t) &= \tfrac{1}{2}\,A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t\big)\,, \end{aligned}$$

platí

$$\int_0^T f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{T}{4}\,a_0 A_0 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n A_n + b_n B_n\big)\,.$$

Speciálně pro $g(t) = f(t)$ dostaneme tzv. *Parsevalovu rovnost*

$$\frac{2}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n^2 + b_n^2\big)\,. \tag{21}$$

Příklad: V (15) jsme zjistili, že Fourierovy koeficienty pro periodickou funkci $f(t)$ s periodou $T = 1$, která je v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ definována vztahem $f(t) = t^2$, jsou

$$a_0 = \frac{2}{3}\,, \qquad a_n = \frac{1}{\pi^2 n^2}\,, \qquad b_n = -\frac{1}{\pi n}\,.$$

Z Parsevalovy rovnosti (21) plyne

$$2\int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t = \frac{2}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi^4 n^4} + \frac{1}{\pi^2 n^2}\right).$$

Jestliže použijeme vztah (16) dostaneme z této rovnosti

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{9} + \frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} + \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6} \implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Fourierova transformace

Pomocí Fourierových řad jsme vyjádřili funkci $f(t)$ na intervalu konečné délky $T > 0$ jako součet goniometrických funkcí s periodou T. Jestliže přejdeme k limitě $T \to \infty$, získáme tzv. *Fourierovu transformaci* funkce $f(t)$.
Přesněji, je-li funkce $f(t)$ absolutně integrovatelná v $\mathbb{R}$, definujeme Fourierovu transformaci funkce $f(t)$ vztahem

$$\mathfrak{F}\big[f(t)\big](\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\,. \tag{22}$$

Příklad: Nechť je $a > 0$. Najděte Fourierovu transformaci funkce

$$f(t) = \theta\big(a - |t|\big) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad |t| \le a\,, \\ 0 & \text{pro} \quad |t| > a\,. \end{cases} \tag{23}$$

Řešení: Podle definice je

$$\mathfrak{F}\Big[\theta\big(a - |t|\big)\Big](\omega) = F(\omega) = \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\mathrm{i}\omega}\right]_{-a}^{a} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega a}}{\mathrm{i}\omega} = \frac{2\sin a\omega}{\omega}\,. \tag{24}$$

Za jistých předpokladů o funkci $f(t)$ lze dokázat, že pro funkci $F(\omega)$ definovanou vztahem (22) platí

$$\frac{f(t_+) + f(t_-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\,, \tag{25}$$

kde $f(t_\pm) = \lim\limits_{h\to 0_\pm} f(t+h)$ jsou limity funkce $f(t)$ v bodě t zprava a zleva. Speciálně, je-li funkce $f(t)$ v bodě t spojitá, je

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\,.$$

Je-li navíc funkce $F(\omega)$ absolutně integrovatelná v $\mathbb{R}$, je

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\big[F(\omega)\big](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\mathfrak{F}\big[F(-\omega)\big](t)\,. \tag{26}$$

Příklad: V předcházejícím příkladě jsme našli Fourierovu transformaci funkce $\theta\big(a-|t|\big)$. Ze vztahu (25) pro inverzní Fourierovu transformaci pak pro $a>0$ dostaneme pro $|t|\neq a$

$$\theta\big(a-|t|\big)=\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{2\sin a\omega}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\,.$$

Speciálně pro $t=0$ odtud pro $a>0$ dostaneme integrál

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin a\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\pi\,.$$

Pro Fourierovu transformaci obecně platí

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\big[af(t)+bg(t)\big](\omega) &= \int_{\mathbb{R}}\big(af(t)+bg(t)\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = a\int_{\mathbb{R}}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t+b\int_{\mathbb{R}}g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=\\
&= a\mathfrak{F}\big[f(t)\big](\omega)+b\mathfrak{F}\big[g(t)\big](\omega)\,;\\
\mathfrak{F}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}f(t)\big](\omega) &= \int_{\mathbb{R}}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\alpha)t}\,\mathrm{d}t=\mathfrak{F}\big[f(t)\big](\omega+\alpha)\,;\\
\mathfrak{F}\big[f(t+\tau)\big](\omega) &= \int_{\mathbb{R}}f(t+\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-\tau)}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\int_{\mathbb{R}}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=\\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathfrak{F}\big[f(t)\big](\omega)\,;\\
\mathfrak{F}\big[f(\alpha t)\big](\omega) &= \int_{\mathbb{R}}f(\alpha t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x/\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\mathfrak{F}\big[f(t)\big]\Big(\frac{\omega}{\alpha}\Big)\,,\quad \alpha>0\,.
\end{aligned}$$

Formálně dostaneme pro Fourierovu transformaci funkce $f'(t)$, pro kterou $\lim\limits_{t\to\pm\infty}f(t)=0$, integrací per partes vztah

$$\mathfrak{F}\big[f'(t)\big](\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=\Big[f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\Big]_{-\infty}^{\infty}-\mathrm{i}\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=-\mathrm{i}\omega\mathfrak{F}\big[f(t)\big](\omega)\,.$$

Formálně také platí

$$\mathfrak{F}\big[tf(t)\big](\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}tf(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\bigg(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\bigg)=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\Big(\mathfrak{F}\big[f(t)\big](\omega)\Big)\,.$$

Jestliže bude značka $f(t)\mapsto F(\omega)$ znamenat, že funkce $F(\omega)$ je Fourierova transformace funkce $f(t)$, pak lze tyto vztahy přepsat jako

$$f^{(n)}(t)\mapsto(-\mathrm{i}\omega)^nF(\omega)\qquad\text{a}\qquad t^nf(t)\mapsto(-\mathrm{i})^nF^{(n)}(\omega)\,.\tag{27}$$

Tyto vztahy platí formálně. Abychom je dokázali, musíme něco předpokládat o funkcích $f(t)$. Ale je možný i jiný přístup. Ten spočívá v tom, že množinu funkcí jistým způsobem rozšíříme. Takové rozšíření pak vede k teorii tzv. *zobecněných funkcí* neboli *distribucí*. Nejznámější příklad takové zobecněné funkce je tzv. *Diracova funkce* $\delta(\omega-\omega_0)$. Ta je definována předpisem

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\delta(\omega-\omega_0)\,\mathrm{d}\omega=F(\omega_0)$$

pro každou funkci $F(\omega)$ spojitou v bodě ω_0. Diracova funkce není funkce v obvyklém smyslu, ale lze si ji představit jako funkci, která je rovna nule pro každé $\omega \neq \omega_0$ a v bodě $\omega = \omega_0$ je rovna nekonečnu.

Příklad: Podle definice je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \alpha) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t} .$$

Proto je

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \big(\delta(\omega - \alpha) + \delta(\omega + \alpha)\big) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}}{2\pi} = \frac{\cos \alpha t}{\pi} .$$

A protože vpravo je podle (26) inverzní Fourierova transformace, je Fourierova transformace funkce $f(t) = \cos \alpha t$ rovna

$$\mathfrak{F}\big[\cos \alpha t\big](\omega) = \pi \big(\delta(\omega - \alpha) + \delta(\omega + \alpha)\big)$$

Kosinová a sinová Fourierova transformace

Jestliže je funkce $f(t)$ reálná a $F(\omega)$ její Fourierova transformace, pak z (22) plyne $\overline{F(\omega)} = F(-\omega)$. V takovém případě se často zavádí

$$A(\omega) = \mathrm{Re}\big(F(\omega)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, \mathrm{d}t = A(-\omega) , \tag{28}$$

$$B(\omega) = \mathrm{Im}\big(F(\omega)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, \mathrm{d}t = -B(-\omega) . \tag{29}$$

Potom platí

$$F(\omega) = A(\omega) + \mathrm{i}B(\omega) , \qquad F(-\omega) = A(\omega) - \mathrm{i}B(\omega) ,$$
$$A(\omega) = \tfrac{1}{2} \big(F(\omega) + F(-\omega)\big) , \qquad B(\omega) = \tfrac{1}{2\mathrm{i}} \big(F(\omega) - F(-\omega)\big) .$$

Pro inverzní Fourierovu transformaci reálné funkce $f(t)$ pak z (25) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{f(t_+) + f(t_-)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \big(A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t\big) \, \mathrm{d}\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} \big(A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t\big) \, \mathrm{d}\omega . \end{aligned} \tag{30}$$

Jestliže v tomto vztahu použijeme definice funkcí $A(\omega)$ a $B(\omega)$, lze jej přepsat ve tvaru

$$\frac{f(t_+) + f(t_-)}{2} = \frac{1}{\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) \, \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\omega , \tag{31}$$

který se nazývá *Fourierův integrál.*

Příklad: Nechť je $a > 0$ a

$$f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-at} & \text{pro} \quad t > 0\,, \\ 0 & \text{pro} \quad t < 0\,. \end{cases}$$

Pak je

$$F(\omega) = \mathfrak{F}\big[f(t)\big](\omega) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}\omega)t}}{-a+\mathrm{i}\omega}\right]_0^\infty = \frac{1}{a-\mathrm{i}\omega} = \frac{a+\mathrm{i}\omega}{a^2+\omega^2}\,.$$

Proto dostaneme

$$A(\omega) = \mathrm{Re}\Big(\frac{a+\mathrm{i}\omega}{a^2+\omega^2}\Big) = \frac{a}{a^2+\omega^2}\,, \qquad B(\omega) = \mathrm{Im}\Big(\frac{a+\mathrm{i}\omega}{a^2+\omega^2}\Big) = \frac{\omega}{a^2+\omega^2}\,.$$

Podle vztahu (30) pak je pro $a > 0$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} \mathrm{e}^{-at} & \text{pro} \quad t > 0\,, \\ 0 & \text{pro} \quad t < 0\,. \end{cases}$$

Je-li funkce $f(t)$ definovaná a absolutně integrovatelná na intervalu $\langle 0, +\infty)$, lze pro ni definovat tzv. kosinovou a sinovou Fourierovu transformaci.

Při kosinové Fourierově transformaci rozšíříme funkci $f(t)$ na celé $\mathbb{R}$ tak, aby byla sudá, tj. definujeme funkci

$$f_s(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pro} \quad t \geq 0\,, \\ f(-t) & \text{pro} \quad t < 0\,. \end{cases}$$

Fourierova transformace funkce $f_s(t)$ pak je

$$\mathfrak{F}\big[f_s(t)\big](\omega) = \int_{-\infty}^\infty f_s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\big)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

a definujeme *kosinovou Fourierovu transformaci* funkce $f(t)$ jako

$$\mathfrak{C}\big[f(t)\big](\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t = C(\omega)\,. \tag{32}$$

Z tohoto vztahu okamžitě plyne, že $C(-\omega) = C(\omega)$, tj. kosinová Fourierova transformace je sudá funkce.

Protože je kosinová Fourierova transformace funkce $f(t)$ vlastně Fourierova transformace sudého rozšíření funkce $f(t)$, dostaneme z (25)

$$\begin{aligned}\frac{f_s(t_+) + f_s(t_-)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R C(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_0^R C(\omega)\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)\,\mathrm{d}\omega = \\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{R\to\infty}\int_0^R C(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega\,.\end{aligned}$$

Tedy inverzní kosinová Fourierova transformace je

$$\frac{f(t_+) + f(t_-)}{2} = \frac{1}{\pi} \lim_{R\to\infty} \int_0^R C(\omega) \cos \omega t \, \mathrm{d}\omega \,. \tag{33}$$

Jestliže rozšíříme funkci $f(t)$ z intervalu $\langle 0, \infty)$ na celé $\mathbb{R}$ do liché funkce, tj. položíme

$$f_\ell(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pro} \quad t \geq 0 \,, \\ -f(-t) & \text{pro} \quad t < 0 \end{cases}$$

dostaneme pro Fourierovu transformaci funkce $f_\ell(t)$

$$\mathfrak{F}\big[f_\ell(t)\big](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\ell(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t) \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\big) \, \mathrm{d}t = 2\mathrm{i} \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, \mathrm{d}t \,.$$

Sinovou Fourierovu transformaci pak definujeme vztahem

$$\mathfrak{S}\big[f(t)\big](\omega) = \mathrm{Im}\Big(\mathfrak{F}\big[f_\ell(t)\big](\omega)\Big) = 2 \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, \mathrm{d}t = S(\omega) \,. \tag{34}$$

Je vidět, že sinová Fourierova transformace je lichá funkce, tj. platí $S(-\omega) = -S(\omega)$. Podobně jako pro kosinovou Fourierovu transformaci lze odvodit vztah pro inverzní sinovou Fourierovu transformaci

$$\frac{f(t_+) + f(t_-)}{2} = \frac{1}{\pi} \lim_{R\to\infty} \int_0^R S(\omega) \sin \omega t \, \mathrm{d}\omega \,. \tag{35}$$

Příklad: Nechť je $f(t) = \mathrm{e}^{-at}$, kde $a > 0$. Pro kosinovou a sinovou Fourierovu transformaci funkce $f(t)$ dostaneme

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}\big[\mathrm{e}^{-at}\big](\omega) &= 2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-at} \cos \omega t \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-at} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\big) \, \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{a - \mathrm{i}\omega} + \frac{1}{a + \mathrm{i}\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = C(\omega) \,, \\ \mathfrak{S}\big[\mathrm{e}^{-at}\big](\omega) &= 2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-at} \sin \omega t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-at} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\big) \, \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}} \left(\frac{1}{a - \mathrm{i}\omega} - \frac{1}{a + \mathrm{i}\omega} \right) = \frac{2\omega}{a^2 + \omega^2} = S(\omega) \,. \end{aligned}$$

Vztahy pro inverzní kosinovou a sinovou Fourierovu transformaci nám pak pro $t > 0$ dávají integrály

$$\mathrm{e}^{-at} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2a \cos \omega t \, \mathrm{d}\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2\omega \sin \omega t \, \mathrm{d}\omega}{a^2 + \omega^2} \,.$$

Na závěr bych chtěl ještě podotknout, že se v různých knihách o Fourierově transformaci používají různé konvence. Mnohdy se Fourierova transformace definuje pomocí vztahu

$$\widehat{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, F(\omega) \,, \tag{36}$$

kde $F(\omega)$ je Fourierova transformace, kterou jsme zavedli v přednášce vztahem (22). Při této definici se pak změní vztah pro inverzní Fourierovu transformaci. Například místo vztahu (26) dostaneme

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}\omega \,.$$

V důsledku definice (36) se také změní vztahy (32) a (34) pro kosinovou a sinovou Fourierovu transformaci na

$$\widehat{C}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, C(\omega) \,,$$
$$\widehat{S}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, S(\omega)$$

a vztahy (33) a (35) pro inverzní Fourierovy transformace na

$$\frac{f(t_+) + f(t_-)}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{R \to \infty} \int_{0}^{R} \widehat{C}(\omega) \cos \omega t \, \mathrm{d}\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{R \to \infty} \int_{0}^{R} \widehat{S}(\omega) \sin \omega t \, \mathrm{d}\omega \,.$$