Přednáška 2

Posloupnosti reálných čísel

V minulé přednášce jsme se zabývali množinami čísel. Druhý základní pojem v matematice je pojem *zobrazení*. Zobrazení f množiny X do množiny Y zhruba řečeno přiřazuje každému prvku $x \in X$ právě jeden prvek $y = f(x) \in Y$.
V první semestru budeme zkoumat zobrazení, kde $X \subset \mathbb{R}$ a ve druhém pak bude $X \subset \mathbb{R}^n$. V této přednášce bude X množina přirozených čísel $\mathbb{N}$. Taková zobrazení se nazývají posloupnosti.

Definice. Posloupnost reálných čísel je zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$.

Posloupnost tedy přiřazuje každému $n \in \mathbb{N}$ reálné číslo, které budeme značit a_n a nazývat ho *členem posloupnosti*. Pro celou posloupnost pak budeme používat značku (a_n).

Příklad: (*aritmetická posloupnost*). Aritmetická posloupnost je určena dvěmi reálnými čísly a_1 a d a vztahem $a_{n+1} - a_n = d$ pro $n \in \mathbb{N}$. Proto se číslo d nazývá *diference* aritmetické posloupnosti. n–tý člen aritmetické posloupnosti lze zapsat jako $a_n = a_1 + (n-1)d$.
Občas je užitečné znát součet prvních n členů posloupnosti, s_n. Pro aritmetickou posloupnost je

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \tfrac{1}{2}\big(a_n + a_1\big)n\,. \tag{1}$$

Tento vztah lze dokázat například matematickou indukcí. Označme U množinu všech $n \in \mathbb{N}$ takových, že platí vztah (1). Protože

$$s_1 = a_1 = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_1) \cdot 1\,,$$

je $1 \in U$. Jestliže je $n \in U$, tj. platí pro ně vztah (1), lze psát

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + a_1)n + a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_{n+1} - d + a_1)n + a_{n+1} = \\ &= \tfrac{1}{2}(a_{n+1} + a_1)n - \tfrac{1}{2}\,nd + a_{n+1}\,. \end{aligned}$$

Jestliže použijeme vztah $nd = a_{n+1} - a_1$, dostaneme

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \tfrac{1}{2}(a_{n+1} + a_1)n - \tfrac{1}{2}(a_{n+1} - a_1) + a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_{n+1} + a_1)n + \tfrac{1}{2}(a_{n+1} - a_1) = \\ &= \tfrac{1}{2}(a_{n+1} + a_1)(n+1)\,. \end{aligned}$$

To ale znamená, že $(n+1) \in U$ a podle axiomu matematické indukce je $U = \mathbb{N}$.

Příklad (*geometrická posloupnost*). Geometrická posloupnost je zadána dvěmi reálnými čísly a_1 a q a vztahem $a_{n+1} = qa_n$, který platí pro $n \in \mathbb{N}$. Je-li $a_1 q \neq 0$, je $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ a nazývá se *kvocient* geometrické posloupnosti. n–tý člen geometrické posloupnosti je $a_n = a_1 q^{n-1}$.
Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti dostaneme

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1\big(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\big)\,.$$

Jestliže použijeme vztah $\big(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}\big)\big(1-q\big)=1-q^n$, dostaneme

$$s_n=\begin{cases} a_1\,\dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{pro}\ \ q\neq 1\,,\\ na_1 & \text{pro}\ \ q=1\,. \end{cases} \tag{2}$$

Limita posloupnosti

Nyní se budeme zabývat jedním z nejdůležitějších pojmů, se kterými se v přednášce setkáme, s pojmem *limity* posloupnosti.

Nechť je (a_n) posloupnost a $A\in\mathbb{R}$. Budeme chtít matematicky vyjádřit tvrzení, že pro velká n se hodnota členů posloupnosti blíží k číslu A. Vezmeme $\varepsilon>0$ a interval délky 2ε se středem v bodě A. Aby se hodnota členů posloupnosti (a_n) blížila k hodnotě A musí od určitého $n_0\in\mathbb{N}$ ležet hodnoty členů posloupnosti v intervalu $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$. Matematicky lze toto tvrzení vyjádřit tak, že pro dané $\varepsilon>0$ existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $n>n_0$ je $|A-a_n|<\varepsilon$. Toto tvrzení závisí na námi zvolené hodnotě ε. Ale interval, který jsme vybrali kolem hodnoty A může být libovolně malý. Proto musí takové tvrzení platit pro každé $\varepsilon>0$. To nás vede k definici:

Definice. Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu $A\in\mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $n>n_0$ je $|A-a_n|<\varepsilon$, tj.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\,;\ \forall n\in\mathbb{N}\,,\ n>n_0\ \text{ je }\ |A-a_n|<\varepsilon\,. \tag{3}$$

Tento výrok budeme psát jako $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu $+\infty$, jestliže pro každé K existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $n>n_0$ je $a_n>K$, tj.

$$\forall K\ \exists n_0\in\mathbb{N}\,;\ \forall n\in\mathbb{N}\,,\ n>n_0\ \text{ je }\ a_n>K\,. \tag{4}$$

Tento výrok budeme psát jako $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu $-\infty$, jestliže pro každé K existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $n>n_0$ je $a_n<K$, tj.

$$\forall K\ \exists n_0\in\mathbb{N}\,;\ \forall n\in\mathbb{N}\,,\ n>n_0\ \text{ je }\ a_n<K\,. \tag{5}$$

Tento výrok budeme psát jako $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

Posloupnosti, které mají konečnou limitu se nazývají *konvergentní* a ostatní posloupnosti, tj. posloupnosti, které mají limitu $\pm\infty$ nebo nemají žádnou limitu, se nazývají *divergentní*.

Tvrzení (3), (4) a (5) lze vyjádřit jediným způsobem pomocí okolí bodu.

Definice. Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu $A\in\mathbb{R}^*$, jestliže pro každé okolí $U(A)$ existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $n>n_0$ je $a_n\in U(A)$, tj.

$$\forall U(A)\ \exists n_0\in\mathbb{N}\,;\ \forall n\in\mathbb{N}\,,\ n>n_0\ \text{ je }\ a_n\in U(A)\,. \tag{6}$$

Poznámka: Tvrzení (6) je ekvivalentní tomu, že $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ právě tehdy, když pro každé okolí $U(A)$ je množina $M=\big\{n\in\mathbb{N}\,;\ a_n\notin U(A)\big\}$ konečná.

Příklad: Dokažte podle definice, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2n^2+3n+2}{n^3+n+3} = 1$.

Řešení: Nechť je $\varepsilon > 0$ a označme M_ε množinu všech $n \in \mathbb{N}$ takových, že

$$\left|\frac{n^3+2n^2+3n+2}{n^3+n+3} - 1\right| = \left|\frac{2n^2+2n-1}{n^3+n+3}\right| = \frac{2n^2+2n-1}{n^3+n+3} < \varepsilon\,.$$

Množinu M_ε není snadné najít. Proto najdeme její vhodnou podmnožinu $\widehat{M_\varepsilon}$.
Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti $2n^2+2n-1 \le 3n^2$ a $n^3+n+1 > n^3$, je

$$\frac{2n^2+2n-1}{n^3+n+3} < \frac{3n^2}{n^3} = \frac{3}{n}\,. \tag{7}$$

Označme $\widehat{M_\varepsilon}$ množinu všech $n \in \mathbb{N}$ takových, že $\dfrac{3}{n} < \varepsilon$, tj.

$$\widehat{M_\varepsilon} = \left\{n \in \mathbb{N}\,;\ n > \frac{3}{\varepsilon}\right\}.$$

Z nerovnosti (7) plyne, že $\widehat{M_\varepsilon} \subset M_\varepsilon$.
Pro $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\dfrac{3}{\varepsilon} < n_0 \le \dfrac{3}{\varepsilon} + 1$, je každé $n > n_0$ prvkem množiny $\widehat{M_\varepsilon}$, a tedy i množiny M_ε, tj. platí pro ně nerovnost

$$\left|\frac{n^3+2n^2+3n+2}{n^3+n+3} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Pro limitu posloupnosti platí následující věta o jednoznačnosti limity.
Věta. Pokud existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, je tato limita jediná.

Limity posloupností většinou počítáme tak, že nějaké základní limity známe a další limity se snažíme převést na základní limity pomocí jistých vět.
Není jasné, které limity máme považovat za základní. Uvedeme zde jen několik známých limit, ale záleží na každém, jaké limity se naučí.

$$\lim_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} +\infty & \text{pro } p > 0\,; \\ 0 & \text{pro } p < 0\,. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{pro } a > 1\,; \\ 1 & \text{pro } a = 1\,; \\ 0 & \text{pro } |a| < 1\,; \\ \text{neexistuje} & \text{pro } a \le -1\,. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

Mnohé další limity lze najít podle následující věty.

Věta: Nechť existují limity $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, kde A, $B \in \mathbb{R}^*$ a α, $\beta \in \mathbb{R}$. Pokud mají výrazy na pravé straně smysl v $\mathbb{R}^*$, platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \bigl(\alpha a_b + \beta b_n\bigr) = \alpha A + \beta B\,;\\
&\lim_{n\to\infty} \bigl(a_n b_n\bigr) = AB\,;\\
&\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}\,.
\end{aligned}$$

Příklad: Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-2n+2}\,\sqrt{2n+3}}{\sqrt{8n^3-2n^2+2}}$.

Řešení: Předchozí větu nemůžeme použít přímo, protože by se jednalo o výraz $\dfrac{\infty}{\infty}$, který není v $\mathbb{R}^*$ definován. Proto nejprve upravíme výraz v limitě na tvar

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{n^2-2n+2}\,\sqrt{2n+3}}{\sqrt{8n^3-2n^2+2}} &= \frac{n^{3/2}\sqrt{1-2n^{-1}+2n^{-2}}\,\sqrt{2+3n^{-1}}}{n^{3/2}\sqrt{8-2n^{-1}+2n^{-3}}} = \\
&= \frac{\sqrt{1-2n^{-1}+2n^{-2}}\,\sqrt{2+3n^{-1}}}{\sqrt{8-2n^{-1}+2n^{-3}}}\,.
\end{aligned}$$

Podle známých limit a předchozí věty je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-2n+2}\,\sqrt{2n+3}}{\sqrt{8n^3-2n^2+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1-2n^{-1}+2n^{-2}}\,\sqrt{2+3n^{-1}}}{\sqrt{8-2n^{-1}+2n^{-3}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2}\,.$$

Příklad: Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \bigl(\sqrt{n^2+3n+4}-n\bigr)$.

Řešení: Protože se jedná o neurčitý výraz typu $\infty-\infty$, nemůžeme přímo použít uvedenou větu. Ale když upravíme výraz v limitě na tvar

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+3n+4}-n &= \bigl(\sqrt{n^2+3n+4}-n\bigr)\,\frac{\sqrt{n^2+3n+4}+n}{\sqrt{n^2+3n+4}+n} = \frac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}+n} = \\
&= \frac{3+4n^{-1}}{\sqrt{1+3n^{-1}+4n^{-2}}+1}\,,
\end{aligned}$$

dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \bigl(\sqrt{n^2+3n+4}-n\bigr) = \lim_{n\to\infty} \frac{3+4n^{-1}}{\sqrt{1+3n^{-1}+4n^{-2}}+1} = \frac{3}{2}\,.$$

Nyní uvedeme několik takřka samozřejmých vět o limitách posloupností, které použijeme později.

Věta. Nechť existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > N$ je $a_n \le b_n$. Pokud existují $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, platí $A \le B$.

Věta. Nechť existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > N$ je $a_n \leq b_n \leq c_n$. Pokud existují $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, pak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Věta. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Existuje ještě jeden typ limity, který lze najít. K tomu budeme potřebovat definici omezené posloupnosti.

Definice. Posloupnost (a_n) se nazývá *omezená*, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $|a_n| \leq k$.

Věta. Nechť je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a (b_n) je omezená posloupnost. Pak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Příklad: Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{n} \sin n^2$.

Řešení: Pro posloupnost $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{n}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Posloupnost $b_n = \sin n^2$ je omezená, protože $\left|\sin n^2\right| \leq 1$. Tedy podle předchozí věty je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n+1}}{n} \sin n^2 = 0$.

Uvědomte si, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2$ neexistuje, a proto jsme nemohli použít větu o limitě součinu.

Někdy je při výpočtu limit užitečné vědět, že limita existuje, i když neznáme její hodnotu. Například, jestliže budeme vědět, že existuje konečná nezáporná limita posloupnosti (a_n), která je definována předpisem $a_1 = 1$ a

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{a_n} + a_n\right), \tag{8}$$

lze této znalosti využít k jejímu výpočtu. Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \geq 0$. Jestliže přejdeme ve vztahu (8) k limitě, dostaneme pro A rovnici

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{A} + A\right),$$

ze které plyne $A^2 = 2$. A protože $A \geq 0$, je $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

Nyní uvedeme dvě důležité věty, které zaručují existenci limity. K první budeme potřebovat pojem monotonní posloupnosti.

Definice.
Řekneme, že posloupnost (a_n) je *rostoucí*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} > a_n$.
Řekneme, že posloupnost (a_n) je *klesající*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} < a_n$.
Řekneme, že posloupnost (a_n) je *nerostoucí*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} \leq a_n$.
Řekneme, že posloupnost (a_n) je *neklesající*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} \geq a_n$.
Takové posloupnosti se nazývají souhrnně *monotonní* a posloupností rostoucí nebo klesající se nazývají *ryze monotonní* posloupnosti.

Věta. Každá monotonní posloupnost má limitu v $\mathbb{R}^*$.

Jestliže označíme $M = \{a_n ;\ n \in \mathbb{N}\}$, je limita neklesající posloupnosti rovna $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup M$ a pro nerostoucí posloupnost je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf M$ a tvrzení věty plyne z toho, že každá množina $M \subset \mathbb{R}$ má v $\mathbb{R}^*$ supremum a infimum.

Věta. Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.
Každá nerostoucí zdola omezená posloupnost je konvergentní.

Tvrzení věty plyne z předchozí věty a toho, že pro každou neprázdnou shora omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ je $\sup M \in \mathbb{R}$ a pro každou neprázdnou zdola omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}$ je $\inf M \in \mathbb{R}$.

Příklad: Posloupnost $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ je zdola omezená klesající posloupnost. Proto existuje její limita. Pro tuto limitu budeme psát

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}\,,$$

kde $\mathrm{e} \doteq 2{,}718282\ldots$ je tzv. *Eulerovo číslo.*
Řešení: Členy posloupnosti (a_n) jsou nezáporné, a proto je posloupnost zdola omezená nulou.
Nerovnost $a_{n+1} < a_n$ plyne z následující série nerovností:

$$n(n+2) < (n+1)^2 \iff 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{n+1}{n(n+2)} < \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \iff$$
$$\iff \frac{n+2}{n+1} < \left(\frac{n^2+2n+1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \iff \frac{n+2}{n+1} < \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \iff$$
$$\iff \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \iff \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Jak jsme se už zmínili v první přednášce je výraz typu 1^∞ neurčitý výraz. Limity takového typu lze často najít pomocí následujícího tvrzení:
Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, pak platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + a_n\right)^{b_n} = \exp\Bigl(\lim_{n\to\infty} a_n b_n\Bigr), \quad \text{kde} \quad \exp(x) = \mathrm{e}^x\,. \tag{9}$$

Příklad: Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{1-3n}$.
Řešení: Protože $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2n-3} = 1$, jedná se o limitu typu 1^∞. Jestliže napíšeme $\dfrac{2n+1}{2n-3} = 1 + \dfrac{4}{2n-3}$, zjistíme, že $a_n = \dfrac{4}{2n-3}$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a $b_n = 1 - 3n$, je

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{4(1-3n)}{2n-3} = -6 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{1-3n} = \mathrm{e}^{-6}\,.$$

Následující věta udává podmínku, která je ekvivalentní konvergenci posloupnosti (a_n) a má v teorii posloupností velký význam.

Věta (*Cauchy–Bolzanova podmínka konvergence*). Posloupnost (a_n) je konvergentní právě tehdy, když splňuje Cauchy–Bolzanovu podmínku:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \; \forall n, \, k \in \mathbb{N} \, , \; n > n_0 \quad \text{platí} \quad |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon \, .$$

Hromadné body posloupnosti

Jestliže má posloupnost (a_n) limitu, je tato limita jediná. Ale pokud limita posloupnosti neexistuje, může existovat více bodů, kolem kterých se pro velká n hodnoty členů posloupnosti "hromadí". Takové body nazýváme hromadné body posloupnosti. Než uvedeme definici definici hromadného bodu posloupnosti, zavedeme pojem vybrané posloupnosti (b_n) a posloupnosti (a_n).

Definice. Nechť je dána posloupnost (a_n). Řekneme, že posloupnost (b_n) je *vybraná* z posloupnosti (a_n), jestliže existuje rostoucí posloupnost $\varphi(n)$ s hodnotami v $\mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $b_n = a_{\varphi(n)}$.

Zdůrazněme, že posloupnost $\varphi(n)$ je taková, že $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.

Věta. Jestliže existuje limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ a posloupnost (b_n) je vybraná z posloupnosti (a_n), pak je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Tato věta se často používá k důkazu tvrzení, že posloupnost (a_n) nemá limitu.

Příklad 1. Dokažte, že posloupnost $a_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$ nemá limitu.

Řešení: Z posloupnosti (a_n) vybereme dvě posloupnosti

$$b_n = a_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \quad \text{a} \quad c_n = a_{2n-1} = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} .$$

Pak je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \mathrm{e}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \mathrm{e}^{-1}$. Protože se tyto limity nerovnají, nemá posloupnost (a_n) limitu.

Definice. Bod A se nazývá *hromadný bod* posloupnosti (a_n) právě tehdy, když existuje posloupnost (b_n) vybraná z posloupnosti (a_n) taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Příklad 2. Najděte všechny hromadné body posloupnosti $a_n = \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) \sin \frac{2}{3} n\pi$.

Řešení: Limita posloupnosti $b_n = \sqrt{n^2+n} - n$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{2} .$$

Z posloupnosti (a_n) vybereme tři podposloupnosti

$$\begin{aligned}
c_{0,n} = a_{3n} &= \left(\sqrt{(3n)^2 + 3n} - 3n\right) \sin \tfrac{2}{3}\, 3n\pi = 0 \, , \\
c_{1,n} = a_{3n+1} &= \left(\sqrt{(3n+1)^2 + 3n + 1} - 3n + 1\right) \sin \tfrac{2}{3}\, (3n+1)\pi = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt{(3n+1)^2 + 3n + 1} - 3n + 1\right) , \\
c_{2,n} = a_{3n+2} &= \left(\sqrt{(3n+2)^2 + 3n + 2} - 3n + 2\right) \sin \tfrac{2}{3}\, (3n+2)\pi = \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt{(3n+1)^2 + 3n + 1} - 3n + 1\right) .
\end{aligned}$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} c_{0,n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_{1,n} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} c_{2,n} = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$, je množina hromadných bodů posloupnosti (a_n) rovna $\left\{0, \frac{1}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{4}\sqrt{3}\right\}$.

Příklad 3. Najděte množinu všech hromadných bodů posloupnosti

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, \dots\right\}.$$

Řešení: Posloupnost obsahuje všechna racionální čísla z intervalu $(0,1)$. Protože každé reálné číslo z intervalu $\langle 0,1\rangle$ je limitou posloupnosti racionálních čísel z intervalu $(0,1)$ je množina všech hromadných bodů této posloupnosti interval $\langle 0,1\rangle$.

Mnohdy nás nezajímá množina všech hromadných bodů posloupnosti (a_n), ale pouze největší nebo nejmenší hromadný bod.

Definice. Supremum množiny všech hromadných bodů posloupnosti (a_n) se nazývá *limes superior* a značí se $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Infimum množiny všech hromadných bodů posloupnosti (a_n) se nazývá *limes inferior* a značí se $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Příklad: Limes superior a limes inferior pro posloupnosti z příkladů 1.–3. jsou

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{-1}$ v příkladu 1;

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$ v příkladu 2 a

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ v příkladu 3.

Příklad. Nechť je (a_n) posloupnost. Označme $M_n = \left\{a_k\,;\ k \ge n\right\}$ a definujme posloupnosti $b_n = \sup M_n$ a $c_n = \inf M_n$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $M_{n+1} \subset M_n$, je $b_{n+1} \le b_n$ a $c_{n+1} \ge c_n$. Tedy posloupnost (b_n) je nerostoucí a posloupnost (c_n) je neklesající. Proto existují jejich limity a platí

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = \liminf_{n\to\infty} a_n\,.$$

Význam kompaktních množin $M \subset \mathbb{R}$ v matematické analýze je v tom, že jsou to jediné podmnožiny $\mathbb{R}$, pro které má každá posloupnost prvků množiny M alespoň jeden hromadný bod, který leží v množině M.

Věta. Množina $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní právě tehdy, když z libovolné posloupnosti (a_n) v M, tj. $a_n \in M$, lze vybrat konvergentní posloupnost takovou, že její limita leží v M.

Řešené příklady

Příklad 1. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n-1}\,\sqrt[3]{2+3n^3-8n^3}}{(2n+3)\sqrt[4]{2n^2+3n+5}}$.

Řešení: Při výpočtu limit podobného typu postupujeme většinou tak, že se čitatele i jmenovatele snažíme napsat ve tvaru $n^\alpha \cdot a_n$, kde posloupnost a_n má konečnou nenulovou limitu. Protože

$$\begin{aligned}
\sqrt{2n-1}\,\sqrt[3]{2+3n^3-8n^3} &= n^{1/2}\sqrt{2-n^{-1}}\,n\sqrt[3]{2n^{-3}+3n^{-1}-8} = \\
&= n^{3/2}\,\sqrt{2-n^{-1}}\,\sqrt[3]{2n^{-3}+3n^{-1}-8}\,, \\
(2n+3)\sqrt[4]{2n^2+3n+5} &= n\big(2+3n^{-1}\big)\,n^{1/2}\sqrt[4]{2+3n^{-1}+5n^{-2}} = \\
&= n^{3/2}\,\big(2+3n^{-1}\big)\,\sqrt[4]{2+3n^{-1}+5n^{-2}}\,,
\end{aligned}$$

je uvedená limita rovna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}\,\sqrt[3]{2+3n^3-8n^3}}{(2n+3)\sqrt[4]{2n^2+3n+5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2-n^{-1}}\,\sqrt[3]{2n^{-3}+3n^{-1}-8}}{\big(2+3n^{-1}\big)\,\sqrt[4]{2+3n^{-1}+5n^{-2}}} = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt[3]{-8}}{2\,\sqrt[4]{2}} = -\sqrt[4]{2}\,.$$

Při praktických výpočtech postupujeme často tak, že v polynomech ponecháme pouze nejvyšší mocniny a píšeme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}\,\sqrt[3]{2+3n^3-8n^3}}{(2n+3)\sqrt[4]{2n^2+3n+5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}\,\sqrt[3]{-8n^3}}{2n\,\sqrt[4]{2n^2}} = -\sqrt[4]{2}\,.$$

Příklady tohoto typu se u zkoušky dávají ještě před tím, než dostanete písemku a měli byste je umět spočítat.

Příklad 2. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+n+1}-\sqrt{n^3-n^2-n+3}}$.

Řešení: V této limitě není možné použít postup z předcházejícího případu, protože ve jmenovateli je výraz typu $\infty-\infty$. Proto výraz v limitě nejprve upravíme

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{3n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+n+1}-\sqrt{n^3-n^2-n+3}} = \\
&= \frac{\sqrt{3n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+n+1}-\sqrt{n^3-n^2-n+3}} \cdot \frac{\sqrt{n^3+n^2+n+1}+\sqrt{n^3-n^2-n+3}}{\sqrt{n^3+n^2+n+1}+\sqrt{n^3-n^2-n+3}} = \\
&= \frac{\sqrt{3n-1}\,\big(\sqrt{n^3+n^2+n+1}+\sqrt{n^3-n^2-n+3}\big)}{2(n^2+n-1)}\,.
\end{aligned}$$

Uvedená limita tedy je

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+n+1}-\sqrt{n^3-n^2-n+3}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n-1}\,\big(\sqrt{n^3+n^2+n+1}+\sqrt{n^3-n^2-n+3}\big)}{2(n^2+n-1)}\,.
\end{aligned}$$

Protože v limitě už nemáme nepříjemný výraz typu $\infty - \infty$, můžeme použít postup z předcházejícího příkladu a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+n+1} - \sqrt{n^3-n^2-n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n}\left(\sqrt{n^3}+\sqrt{n^3}\right)}{2n^2} = \sqrt{3}\,.$$

Příklad 3. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^{n+1}+5^{n+1}}{2^n-5^n}$.

Řešení: Jedná se o limitu $\dfrac{\infty}{\infty}$. Protože pro velká n je $5^n \gg 2^n$, zapíšeme výraz v limitě ve tvaru

$$\frac{(-2)^{n+1}+5^{n+1}}{(-2)^n-5^n} = \frac{5^{n+1}\left((-\frac{2}{5})^{n+1}+1\right)}{5^n\left((\frac{2}{5})^n-1\right)} = 5\,\frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n-1}\,.$$

Protože $\left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5} < 1$, je $\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{2}{5})^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^{n+1}+5^{n+1}}{2^n-5^n} = 5\lim_{n\to\infty} \frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n-1} = -5\,.$$

Příklad 4. Najděte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right).$$

Řešení: Jestliže výraz v limitě zapíšeme ve tvaru

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2} = \frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2}\,,$$

vidíme, že v čitateli je součet prvních $(n-1)$ členů aritmetické posloupnosti. A protože

$$1+2+3+\ldots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}\,,$$

dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Příklad 5. Najděte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[9]{2}\cdot\sqrt[27]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[3^n]{2}\right).$$

Řešení: Výraz v limitě lze zapsat ve tvaru

$$2\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[9]{2}\cdot\sqrt[27]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[3^n]{2} = 2^{1+3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}+\ldots+3^{-n+1}}\,.$$

Protože $1+3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}+\ldots+3^{-n+1}$ je součet prvních n členů geometrické posloupnosti s kvocientem $q=\frac{1}{3}$, je

$$1+3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}+\ldots+3^{-n+1} = \frac{1-3^{-n}}{1-\frac{1}{3}}\,.$$

A protože $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{-n} = 0$, je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + 3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-3} + \ldots + 3^{-n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-3^{-n}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\,.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[9]{2}\cdot\sqrt[27]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[3^n]{2}\right) = 2^{3/2}\sqrt{8}\,.$$

Příklad 6. Najděte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}\right).$$

Řešení: Výraz $\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ se pokusíme napsat jako součet zlomků se jmenovateli $(3n-1)$ a $(3n+2)$, tj. budeme hledat konstanty A a B tak, aby pro každé $n\in\mathbb{N}$ platilo

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{A}{3n-1} + \frac{B}{3n+2}\,.$$

Jestliže tento vztah vynásobíme nejmenším společným jmenovatelem $(3n-1)(3n+2)$, dostaneme vztah

$$1 = A\,(3n+2) + B\,(3n-1) = 3(A+B)n + 2A - B\,,$$

který musí platit pro každé $n\in\mathbb{N}$. To je možné pouze tehdy, když

$$3(A+B) = 0 \quad \text{a} \quad 2A - B = 1 \Longrightarrow A = \tfrac{1}{3}\,, \quad B = -\tfrac{1}{3}\,.$$

Tedy pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \dfrac{1}{3(3n-1)} - \dfrac{1}{3(3n+2)}$. Proto je výraz v limitě roven

$$\left(\frac{1}{3\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 5}\right) + \left(\frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{3\cdot 8}\right) + \left(\frac{1}{3\cdot 8} - \frac{1}{3\cdot 11}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3(3n-1)} - \frac{1}{3(3n+2)}\right) =$$
$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{3(3n+2)}\,.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3(3n+2)}\right) = \frac{1}{6}\,.$$

Příklad 7. Najděte limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+4}\right)^{1-2n}$.

Řešení: Toto je limita typu 1^∞. Tyto limity jsou druhý typ příkladu, který můžete dostat ještě před zkouškovou písemkou.

Většinou se počítají tak, že se výraz v limitě se nejprve převede na tvar $\left(1+a_n\right)^{b_n}$ a pak použijeme vztahu (9).
V našem případě je $\dfrac{3n-1}{3n+4} = 1 + \dfrac{-5}{3n+4}$, tj. $a_n = \dfrac{-5}{3n+4}$. Protože $b_n = 1-2n$ a

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n b_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{-5(1-2n)}{3n+4} = \frac{10}{3}\,,$$

je hledaná limita

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+4}\right)^{1-2n} = \mathrm{e}^{10/3}\,.$$

Příklad 8. Najděte následující limity:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-5}\right)^{2n+1}$;
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-5}\right)^{2n+1}$;
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-5}\right)^{2n+1}$.

Řešení:
V prvním případě se jedná o limitu typu $\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}$, a proto je $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-5}\right)^{2n+1} = +\infty$.
Ve druhém případě jde o limitu typu 1^{∞}. Proto je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-5}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{2n-5}\right)^{2n+1} = \mathrm{e}^{6}\,.$$

Ve třetím případě se jedná o limitu typu $\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}$, a proto je $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-5}\right)^{2n+1} = 0$.

Příklad 9. Najděte $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $\left(a_n\right)$ je posloupnost

$$a_n = \left(\frac{n+(-1)^n}{n+2}\right)^{n} + \frac{2n+1}{n}\,\sin\frac{2\pi n}{3}\,.$$

Řešení: V prvním členu je nepříjemný výraz $(-1)^n$. Abychom se ho zbavili, budeme uvažovat podposloupnosti s indexy $2n$ a $(2n+1)$.
Ve druhém členu je nepříjemný výraz $\sin\dfrac{2\pi n}{3}$. Protože $\sin\dfrac{2\pi n}{3} = \sin\dfrac{2\pi(n+3)}{3}$, bude rozumné uvažovat podposloupnosti s indexy $3n$, $(3n+1)$ a $(3n+2)$.
Celkově tedy posloupnost a_n rozdělíme na šest podposloupností

$$\begin{aligned}
c_{0,n} &= a_{6n} = \left(\frac{6n+1}{6n+2}\right)^{6n}, \\
c_{1,n} &= a_{6n+1} = \left(\frac{6n}{6n+3}\right)^{6n+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{12n+3}{6n+1}\,, \\
c_{2,n} &= a_{6n+2} = \left(\frac{6n+3}{6n+4}\right)^{6n+2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{12n+5}{6n+2}\,, \\
c_{3,n} &= a_{6n+3} = \left(\frac{6n+2}{6n+5}\right)^{6n+3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{4,n} = a_{6n+4} &= \left(\frac{6n+5}{6n+6}\right)^{6n+4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{12n+9}{6n+4}\,,\\
c_{5,n} = a_{6n+5} &= \left(\frac{6n+4}{6n+7}\right)^{6n+5} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{12n+11}{6n+5}\,.
\end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že limity těchto posloupností jsou

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} c_{0,n} = \mathrm{e}^{-1}\,, &&\lim_{n\to\infty} c_{1,n} = \mathrm{e}^{-3} + \sqrt{3}\,, &&\lim_{n\to\infty} c_{2,n} = \mathrm{e}^{-1} - \sqrt{3}\,,\\
&\lim_{n\to\infty} c_{3,n} = \mathrm{e}^{-3}\,, &&\lim_{n\to\infty} c_{4,n} = \mathrm{e}^{-1} + \sqrt{3}\,, &&\lim_{n\to\infty} c_{5,n} = \mathrm{e}^{-3} - \sqrt{3}\,.
\end{aligned}$$

Proto je

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} a_n &= \max\bigl(\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-3}+\sqrt{3}, \mathrm{e}^{-1}-\sqrt{3}, \mathrm{e}^{-3}, \mathrm{e}^{-1}+\sqrt{3}, \mathrm{e}^{-3}-\sqrt{3}\bigr) = \mathrm{e}^{-1}+\sqrt{3}\,,\\
\liminf_{n\to\infty} a_n &= \min\bigl(\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-3}+\sqrt{3}, \mathrm{e}^{-1}-\sqrt{3}, \mathrm{e}^{-3}, \mathrm{e}^{-1}+\sqrt{3}, \mathrm{e}^{-3}-\sqrt{3}\bigr) = \mathrm{e}^{-3}-\sqrt{3}\,.
\end{aligned}$$

Příklad 10. Najděte $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $\bigl(a_n\bigr)$ je posloupnost $a_n = \left(\frac{1-2n}{1+2n}\right)^n$.

ŘEŠENÍ: Pro velká n je vlastně $a_n \sim (-1)^n$. Proto se zdá rozumné, rozdělit posloupnost $\bigl(a_n\bigr)$ na podposloupnosti se sudými a lichými členy, tj. uvažovat podposloupnosti

$$\begin{aligned}
c_{0,n} = a_{2n} &= \left(\frac{1-4n}{1+4n}\right)^{2n} = \left(\frac{4n-1}{4n+1}\right)^{2n},\\
c_{1,n} = a_{2n+1} &= \left(\frac{-1-4n}{3+4n}\right)^{2n+1} = -\frac{4n+1}{4n+3}\cdot\left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^{2n}.
\end{aligned}$$

A protože

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} c_{0,n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{4n+1}\right)^{2n} = \mathrm{e}^{-1},\\
\lim_{n\to\infty} c_{1,n} &= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{4n+1}{4n+3}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{4n+3}\right)^{2n} = -\mathrm{e}^{-1},
\end{aligned}$$

je $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{-1}$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\mathrm{e}^{-1}$.