Přednáška 3

Číselné řady

Posloupnosti se často používají například k řešení rovnic typu $x = f(x)$. Postupuje se tak, že se zvolí x_1 a definujeme posloupnost vztahy

$$x_2 = f(x_1)\,, \quad x_3 = f(x_2)\,, \quad \ldots, x_{n+1} = f(x_n)\,, \quad \ldots$$

Za jistých předpokladů o funkci $f(x)$ je limita $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ řešením rovnice $x = f(x)$.
Pro jisté typy rovnic se ukazuje výhodnější zapisovat posloupnost, která konverguje k řešení jako součet, tj.

$$x_1 = a_1\,, \quad x_2 = a_1 + a_2\,, \quad x_3 = a_1 + a_2 + a_3\,, \quad \ldots, \quad x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n\,, \quad \ldots$$

V dnešní přednášce se budeme zabývat právě takovými posloupnostmi. Pro ty se v matematice používá pojem řada.

Definice. Nechť je (a_n) posloupnost reálných čísel. Součet prvních N členů posloupnosti, tj.

$$s_N = a_1 + a_2 + \ldots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \tag{1}$$

nazýváme *N–tým částečným součtem* posloupnosti (a_n).

Definice. Nechť je (a_n) posloupnost a (s_N) posloupnost jejích částečných součtů. Pokud existuje limita

$$s = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right), \tag{2}$$

nazýváme tuto limitu *součtem řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Jestliže posloupnost částečných součtů konverguje, tj. když je $s \in \mathbb{R}$, nazýváme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní*, a pokud limita $\lim\limits_{N\to\infty} s_N$ neexistuje nebo je rovna $\pm\infty$, nazýváme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Příklad (*geometrická řada*). Uvažujme geometrickou posloupnost $a_n = a_1 q^{n-1}$. Pro součet prvních N členů geometrické posloupnosti platí

$$s_N = \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^N}{1-q} & \text{pro} \quad q \neq 1\,, \\ N a_1 & \text{pro} \quad q = 1\,. \end{cases}$$

Z toho dostaneme

$$s = \begin{cases} \operatorname{sign}(a_1)\cdot\infty & \text{pro} \quad q \geq 1\,, \\ \dfrac{a_1}{1-q} & \text{pro} \quad |q| < 1\,, \\ \text{neexistuje} & \text{pro} \quad q \leq -1\,, \end{cases}$$

kde funkce $\operatorname{sign}(x) = 1$ pro $x > 0$, -1 pro $x < 0$ a 0 pro $x = 0$ je znaménko čísla x.
Tedy geometrická řada má součet pro $q > -1$ a je konvergentní pro $|q| < 1$.

Příklad: Dokažte, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ konverguje a najděte její součet.

Řešení: Abychom našli součet prvních N členů posloupnosti $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, pokusíme se najít konstanty a, b tak, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ bylo

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}\,.$$

Jestliže tento vztah vynásobíme $n(n+1)$, dostaneme

$$1 = a(n+1) + bn \implies a = 1\,, \quad b = -1\,.$$

Tedy $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Když použijeme toto vyjádření a_n, dostaneme

$$s_N = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}\,.$$

Tento vztah by bylo možné snadno dokázat indukcí.
Tedy součet řady je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} s_N = 1\,.$$

Protože je součet řady definován jako limita posloupnosti částečných součtů, platí pro řady mnoho vět, které platí pro limity posloupností. Například platí

Věta: Jestliže řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují a α, $\beta \in \mathbb{R}$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.$$

V přednášce se budeme zabývat hlavně konvergencí řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a ne metodami, jak najít jejich součet. Pokud zbyde čas, vrátíme se k hledání součtu řad na konci semestru.
Protože zkoumáme konvergenci posloupnosti částečných součtů (1), budeme používat věty z předchozí přednášky, které zaručují konvergenci posloupnosti. Nejprve uvedeme formulaci těchto vět pro řady.

Věta (*Cauchy–Bolzanova podmínka konvergence*). Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když splňuje Cauchy–Bolzanovu podmínku:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n,\, k \in \mathbb{N}\,,\ n > n_0 \ \text{ je } \left|\sum_{r=n}^{n+k} a_r\right| < \varepsilon\,. \tag{3}$$

Protože pro posloupnosti částečných součtů platí $s_{n+k}-s_n = \sum\limits_{r=n+1}^{n+k} a_r$ je tato věta obdobou Cauchy–Bolzanovy podmínky pro posloupnosti, kterou jsem nestihl říct v přednášce o limitách posloupností.

Druhá věta, která zaručovala konvergenci se týkala monotonních posloupností. V řadách budeme požadovat, aby posloupnost částečných součtů byla neklesající, tj. aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ platilo $s_{n+1} - s_n = a_n \geq 0$. Proto budeme požadovat, aby se jednalo o řady s nezápornými členy.

Je zřejmé, že konvergence řady, tj. kdy je součet nekonečně mnoha členů posloupnosti konečné číslo, nezávisí na tom, jak vypadá konečný počet členů na počátku řady, tj. pro $n < n_0$, kde n_0 je konečné číslo, ale pouze na členech z "konce" řady, tj. na členech a_n pro $n > n_0$. Proto lze mnoho vět z přednášky zobecnit tak, že předpoklady o členech a_n musí platit pro každé $n > n_0$ a ne každé $n \in \mathbb{N}$, podobně jako v následující větě.

Věta (*o konvergenci řad s nezápornými členy*). Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $a_n \geq 0$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když je posloupnost jejích částečných součtů s_n omezená.

Nejprve uvedeme některé věty, kterou jsou důsledek Cauchy–Bolzanovy podmínky.

Věta. Nechť je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Pak je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

DŮKAZ: Jestliže v Cauchy–Bolzanově podmínce (3) zvolíme $k = 0$, dostaneme tvrzení

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \text{ je } |a_n| < \varepsilon\,,$$

což je právě tvrzení $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tato věta se často používá k důkazu divergence řady. Například řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ diverguje, protože $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$.

Uvědomte si ale, že věta neříká nic o tom, zda konverguje či diverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, když platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Důležitým příkladem divergentní řady, pro kterou je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ je tzv. *harmonická řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{4}$$

Pro tuto řadu je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a přesto nekonverguje, protože nesplňuje Cauchy–Bolzanova podmínku (3), tj. platí její negace

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n,\ k \in \mathbb{N}\ n > n_0 \text{ takové, že } \left|\sum_{r=n}^{n+k} \frac{1}{r}\right| \geq \varepsilon\,.$$

Vezměme $\varepsilon < \frac{1}{2}$, například $\varepsilon = \frac{1}{4}$, a $n = k > n_0$. Pak dostaneme

$$\sum_{r=n}^{2n} \frac{1}{r} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2} > \frac{1}{4}\,.$$

Trochu normálnějšími slovy říkám, že když budete předpokládat, že existuje součet harmonické řady $s \in \mathbb{R}$ a sečtete tolik členů, že si budete myslet, že už součet s skoro máte, tj. lišíte se málo od součtu s, dejme tomu o $\varepsilon = \frac{1}{4}$, a pak přičtete ještě jednou tolik členů, kolik jste už sečetli, dostanete číslo, které se od vašeho součtu s liší o víc než jednu polovinu. Jde jen o to, zda připustíte vysvětlení, že z toho plyne, že uvedená řada nemá konečný součet.

Věta. Nechť existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_1$ je $a_n \le b_n \le c_n$ a řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergují. Pak konverguje také řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz: Protože řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergují, splňují Cauchy–Bolzanovu podmínku. Proto ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 > n_1$ takové, že pro každé $n > n_0$ a $k \in \mathbb{N}$ platí

$$-\varepsilon < \sum_{r=n}^{n+k} a_n \le \sum_{r=n}^{n+k} b_n \le \sum_{r=n}^{n+k} c_n < \varepsilon\,.$$

To ale znamená, že pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ platí Cauchy–Bolzanova podmínka, a tedy konverguje.

Věta. Když konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, konverguje také řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Toto tvrzení plyne z Cauchy–Bolzanovy podmínky a nerovnosti $\left|\sum\limits_{r=n}^{n+k} a_r\right| \le \sum\limits_{r=n}^{n+k} |a_r|$.

Definice. Jestliže konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, nazývá se řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní*. Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, nazývá se řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *neabsolutně konvergentní*.

Dokazovat absolutní konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je podstatně snazší než dokazovat její neabsolutní konvergenci, protože řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je řada s nezápornými členy a k důkazu konvergence posloupnosti jejích částečných součtů můžeme využít větu o konvergenci monotonní posloupnosti.

Řady s nezápornými členy

V této části budeme předpokládat, že $a_n \ge 0$. Pak totiž na rozdíl od obecných řad vždy existuje limita posloupnosti částečných součtů a stačí pouze rozhodnout, zda je tato limita konečná.

Věta. Nechť je $a_n \ge 0$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když je posloupnost jejích částečných součtů s_n omezená.

Proto věty o konvergenci řad s nezápornými členy jsou vlastně věty o tom, zda je omezená posloupnost částečných součtů. Jednoduchá věta je tzv. srovnávací kritérium.

Věta (*srovnávací kritérium konvergence řad*). Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$. Pak platí: pokud konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a pokud diverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

DŮKAZ: Jestliže označíme $s_n^{(a)}$ a $s_n^{(b)}$ posloupnost částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $s_n^{(a)} \leq s_n^{(b)}$.

Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a její součet je $s^{(b)}$, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $s_n^{(a)} \leq s_n^{(b)} \leq s^{(b)}$, a tedy posloupnost částečných součtů $s_n^{(a)}$ je omezená.

Pokud diverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, není posloupnost jejich částečných součtů $s_n^{(a)}$ omezená, a proto není omezená ani posloupnost částečných součtů $s_n^{(b)}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Tuto větu používáme tak, že pokud dokazujeme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, zvolíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ takovou, že $a_n \leq b_n$ a o které víme, že konverguje, a pokud dokazujeme divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, zvolíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pro kterou je $a_n \leq b_n$ a o které víme, že diverguje.

Příklad: Jestliže máme dokázat konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, můžeme použít řadu $b_n = \frac{1}{n(n-1)}$, $n = 2, 3, \ldots$. Konvergence této řady jsme dokázali ve druhém příkladu. Dokonce jsme zjistili, že její součet je roven 1. Z nerovnosti $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$, která platí pro $n \geq 2$, pak plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Jestliže máme dokázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, vybereme divergentní harmonickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Divergence řady pak plyne z nerovnosti $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Když zkoumáme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, zajímáme se o chování členů řady pro velká n, přesněji pro $n \to \infty$. Řady, které se pro velká n chovají v jistém smyslu "podobně", konvergují nebo divergují současně. Co máme na mysli "podobností" vyjadřuje následující věta.

Věta. Nechť je a_n, $b_n \geq 0$. Jestliže existuje konečná limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0$, pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují nebo divergují současně.

DŮKAZ: Protože existuje konečná limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = A > 0$, k $\varepsilon = \frac{1}{2}A > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí

$$\frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3A}{2} \implies \tfrac{1}{2}Ab_n < a_n < \tfrac{3}{2}Ab_n \,.$$

Tedy jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, plyne z levé části nerovnosti, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, a jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, plyne z pravé části nerovnosti, že i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

Abychom mohli použít ke zkoumání konvergence řad této věty, musíme znát dostatečný počet konvergentních a divergentních řad. Zatím víme, že geometrická řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, kde $q > 0$, konverguje pro $q < 1$ a diverguje pro $q \geq 1$.
Další řady, které se často používají jako srovnávací, jsou řady typu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$. Lze ukázat, že tyto řady konvergují pro $p > 1$ a divergují pro $p \leq 1$. Tyto řady se používají pro řady, jejichž členy jsou podílem mocninných funkcí v n.

Příklad: Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^4 + n^3 + 1}}{\sqrt{n^3 + n + 1}\,\sqrt[5]{n^4 + 1}}$.
ŘEŠENÍ: Z hlediska konvergence řady nás bude zajímat, jak vypadá

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^4 + n^3 + 1}}{\sqrt{n^3 + n + 1}\,\sqrt[5]{n^4 + 1}}$$

pro velká n. Je zřejmé, že pro taková n je

$$a_n \approx \frac{n^{4/3}}{n^{3/2} n^{4/5}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2} + \frac{4}{5} - \frac{4}{3}}} = \frac{1}{n^{29/30}} \,.$$

To je právě posloupnost b_n, která má tu vlastnost, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$. Proto řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje nebo diverguje stejně jako řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{29/30}}$. A protože $p = \frac{29}{30} < 1$, řada diverguje.

Následující kritéria konvergence využívají srovnání s geometrickou řadou $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, kde $q \geq 0$.
V podstatě hledají $q \geq 0$ takové, aby platilo $a_n \sim q^n$.
Odmocninové kritérium využívá využívá tohoto vztahu ve tvaru $q \sim \sqrt[n]{a_n}$.
Věta (*limitní odmocninové kritérium*). Nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \,. \tag{5}$$

Je-li $q < 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a je-li $q > 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
Toto kritérium lze zobecnit i na případ, kdy limita neexistuje.

Věta (*limitní odmocninové kritérium*). Nechť je

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q\,. \tag{6}$$

Je-li $q < 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a je-li $q > 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Podílové kritérium využívá toho, že pro geometrickou řadu je $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Přesněji

Věta (*limitní podílové kritérium*). Nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q\,. \tag{7}$$

Je-li $q < 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a je-li $q > 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

V limitních kritériích musíme předpokládat existenci uvedené limity. Existuje i nelimitní tvar těchto kritérií, ale nebudeme ho zde uvádět.

Příklad: Najděte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n^2} x^{2n}$.

Řešení: Označme $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n^2} x^{2n}$. Jestliže se rozhodneme použít limitní odmocninové kritérium, dostaneme z (5)

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n x^2 = x^2 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^n = x^2 \mathrm{e}^2\,.$$

Tedy řada konverguje pro $q = x^2\mathrm{e}^2 < 1$, tj. pro $|x| < \mathrm{e}^{-1}$ a diverguje pro $q = x^2\mathrm{e}^2 > 1$, tj. pro $|x| > \mathrm{e}^{-1}$. Pro $x = \pm\mathrm{e}^{-1}$ nemůžeme tímto kritériem rozhodnout.

Příklad: Najděte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$.

Řešení: Pokud se vám v a_n vyskytne faktoriál, použijte raději podílové kritérium. Protože $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ dostaneme z (7)

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!x^{2n+2}}{\big((n+1)!\big)^2} \, \frac{(n!)^2}{(2n)!\,x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)x^2}{(n+1)^2} = 2x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 4x^2\,.$$

Tedy řada konverguje pro $4x^2 < 1$, tj. pro $|x| < \frac{1}{2}$ a diverguje pro $4x^2 > 1$, tj. pro $|x| > \frac{1}{2}$. Pro $|x| = \frac{1}{2}$ nemůžeme pomocí tohoto kritéria o konvergenci řady rozhodnout.

Jak jsme se zmínili, je odmocninové a podílové kritérium založené na srovnání dané řady s geometrickou řadou. Proto nedává možnost rozhodnou o konvergenci řad, které jsou podílem mocnin v n, protože dostaneme $q = 1$. V takových případech je možné se pokusit použít kritérium založené na srovnání s řadami typu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$. Následující kritérium v podstatě počítá příslušné p.

Věta (*Raabeovo kritérium*). Nechť existuje limita

$$p = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right). \tag{8}$$

Je-li $p > 1$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a je-li $p < 1$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad: Vyšetřete, jestli konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

Řešení: Jedná se o řadu z předcházejícího příkladu pro $|x| = \frac{1}{2}$, o jejíž konvergenci jsme pomocí podílového kritéria nemohli rozhodnout. Použijeme-li Raabeovo kritérium, dostaneme z (8)

$$p = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\,\frac{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2}{(2n+2)!} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2(n+1)}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1\,.$$

Tedy daná řada diverguje.

Řady s obecnými členy

Jestliže pro členy řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ není $a_n \geq 0$, je situace komplikovanější, protože nevíme, zda existuje limita posloupnosti částečných součtů. Ale protože z konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ plyne konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, nabízí se možnost zkoumat absolutní konvergenci řady, tj. konvergenci řady z absolutních hodnot. To už je řada s nezápornými členy, a proto pro ní lze použít všechna tvrzení z předchozí části přednášky.

Příklad: Zkoumejte konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$.

Řešení: Z nerovnosti $0 \leq \left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ a konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ plyne, že uvedená řada konverguje (dokonce absolutně).

Pro zkoumání absolutní konvergence řad lze použít také kritéria konvergence uvedená dříve. Ale protože je používáme pro řadu z absolutních hodnot, musíme v těchto kritériích nahradit a_n absolutní hodnotou $|a_n|$. Tak dostaneme následující kritéria absolutní konvergence:

Věta (*limitní odmocninové kritérium*). Nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q\,. \tag{9}$$

Je-li $q < 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně a je-li $q > 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta (*limitní odmocninové kritérium*). Nechť je

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q\,. \tag{10}$$

Je-li $q < 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně a je-li $q > 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta (*limitní podílové kritérium*). Nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q\,. \tag{11}$$

Je-li $q < 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně a je-li $q > 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta (*Raabeovo kritérium*). Nechť existuje limita

$$p = \lim_{n\to\infty} n\Big(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| - 1\Big). \tag{12}$$

Je-li $p > 1$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně a je-li $p < 1$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně nekonverguje.

Jestliže ale řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je pouze neabsolutně konvergentní, je situace komplikovaná podstatně víc. Krátce ukážeme, kde je příčina problému.
Nechť je dána řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Definujme posloupnosti

$$b_n = \max(a_n, 0) = \begin{cases} a_n & \text{pro } \ a_n > 0\,, \\ 0 & \text{pro } \ a_n \le 0\,, \end{cases} \qquad c_n = \max(-a_n, 0) = \begin{cases} -a_n & \text{pro } \ a_n < 0\,, \\ 0 & \text{pro } \ a_n \ge 0\,. \end{cases}$$

Pak je b_n, $c_n \ge 0$, $a_n = b_n - c_n$ a $|a_n| = b_n + c_n$. Označme

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{a} \quad c = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,. \tag{13}$$

Protože se jedná o řady s nezápornými členy, oba uvedené součty existují v $\mathbb{R}^*$. Mohou nastat čtyři případy:

1. Když obě řady v (13) konvergují, tj. b, $c \in \mathbb{R}$, je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní řada se součtem $b - c$;
2. Je-li $b = +\infty$ a $c \in \mathbb{R}$ není řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a její součet je $+\infty$;
3. Je-li $b \in \mathbb{R}$ a $c = +\infty$ není řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a její součet je $-\infty$;
4. Jestliže $b = c = +\infty$ není řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, ale může být neabsolutně konvergentní. Jedná se totiž o limitu neurčitého výrazu $+\infty - \infty$.

U neabsolutně konvergentních řad záleží na tom, jakým způsobem počítáme neurčitý výraz $+\infty - \infty$. Lze ukázat, že neabsolutně konvergentní řadu je vždy možné přeuspořádat, tj. zvolit vzájemně jednoznačné zobrazení $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a definovat řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kde $b_n = a_{\varphi(n)}$, tak, aby výsledná řada měla za limitu libovolné dané číslo z $\mathbb{R}^*$ nebo aby limita částečných součtů přeuspořádané řady vůbec neexistovala.

Pro neabsolutně konvergentní řady uvedeme pouze jedno kritérium konvergence, které se týká tzv. *alternujících řad*, tj. řad jejichž členy střídají znaménka.

Věta (*Leibnizovo kritérium*). Nechť je $a_n \geq 0$ nerostoucí posloupnost, pro kterou platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

Příklad: Ukažte, že pro každé $p \in (0, 1\rangle$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$.

Řešení: Označme $a_n = \frac{1}{n^p}$. Pak je $a_n > 0$, a_n je klesající posloupnost, protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{n^p}$. Protože je $p > 0$, platí $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$. Tedy uvedená řada konverguje podle Leibnizova kritéria.

Řešené příklady

Příklad 1. Rozhodněte, zda konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\left(1+n^{-1}\right)^n}$.

Řešení: Protože platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+n^{-1}\right)^n} = \mathrm{e}^{-1} \neq 0\,,$$

daná řada diverguje.

Příklad 2. Rozhodněte, zda konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^3+4n^2+3}}{\sqrt{2n^3+n^2+n-3}}$.

Řešení: Příklady tohoto typu se nejčastěji řeší tak, že pro velké n nahradíme členy řady a_n výrazem $\dfrac{A}{n^p}$, kde $A > 0$ a $p \in \mathbb{R}$ tak, aby $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^p a_n}{A} = 1$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje nebo diverguje současně s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$. To znamená, že pro $p > 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a pro $p \le 1$ diverguje.
Protože pro velká n je

$$\sqrt[4]{n^3+4n^2+3} \sim n^{3/4} \quad \text{a} \quad \sqrt{2n^3+n^2+n-3} \sim \sqrt{2}\, n^{3/2}$$

zjistíme, že

$$a_n = \frac{\sqrt[4]{n^3+4n^2+3}}{\sqrt{2n^3+n^2+n-3}} \sim \frac{n^{3/4}}{\sqrt{2}\, n^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{3/4}}\,.$$

Snadno se lze přesvědčit, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\, n^{3/4} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\, n^{3/4} \sqrt[4]{n^3+4n^2+3}}{\sqrt{2n^3+n^2+n-3}} = 1\,.$$

Tedy uvedená řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2}\, n^{3/4}}$. Ale protože $p = \frac{3}{4} < 1$, tato řada diverguje, a tedy diverguje také uvedená řada.

Příklad 3. Rozhodněte, zda konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}$.

Řešení: Tato řada je podobného typu jako řada v příkladě 1. Jediná komplikace je v tom, že ve čitateli nemůžeme nechat pouze nejvyšší mocniny v n, protože bychom dostali nulu. Proto budeme postupovat podobně jako u výpočtu limit posloupností. Pro velká n dostaneme

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right) \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$$

$$\sqrt[3]{n^2+n+1} \sim n^{2/3}\,.$$

Celkově tedy

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^2+n+1}} \sim \frac{1}{n^{1/2}\, n^{2/3}} = \frac{1}{n^{7/6}}\,.$$

A protože $p = \frac{7}{6} > 1$ uvedená řada konverguje.

Příklad 4. Rozhodněte, zda konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\sqrt{4n^3+7n^2+5}}{(n+1)\sqrt{3n-1}} \right)^{2n+1}$.

Řešení: Uvědomte si, že tento příklad už není stejného typu jako předcházející příklady. Pokud se podíváme na člen řady a_n, přímo se nabízí použít odmocninové kritérium. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{4n^3+7n^2+5}}{(n+1)\sqrt{3n-1}} \right)^{2+1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{4n^3+7n^2+5}}{(n+1)\sqrt{3n-1}} \right)^{2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{4}{3}$$

a $\frac{4}{3} > 1$, uvedená řada diverguje.

Příklad 5. Rozhodněte, zda konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n-1}{2n+1} \right)^{n(n-1)}$.

Řešení: Je vidět, že bude výhodné použít odmocninové kritérium. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{2n+1} \right)^{n-1} = \mathrm{e}^{-1} < 1\,,$$

uvedená řada konverguje.

Příklad 6. Rozhodněte, zda konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{4+\sin n}{5+\sin n} \right)^{n}$.

Řešení: Opět se nabízí použít odmocninové kritérium. Pak dostaneme

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{4+\sin n}{5+\sin n}\,.$$

Ale limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4+\sin n}{5+\sin n}$ neexistuje. Přesto můžeme použít obecnější formu tohoto kritéria, tj. když

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

a $q < 1$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a pokud $q > 1$ řada diverguje.
Protože platí rovnost

$$\frac{4+x}{5+x} = 1 - \frac{1}{5+x}$$

a $-1 \le \sin n \le 1$, je

$$\frac{4+\sin n}{5+\sin n} = 1 - \frac{1}{5+\sin n} \le 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}\,.$$

Z této nerovnosti pak plyne, že

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{4+\sin n}{5+\sin n} \le \frac{5}{6} < 1\,.$$

Tedy uvedená řada konverguje.

Příklad 7. Rozhodněte, zda konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n\, n^{2n}}{(2n)!}$.

Řešení: Jestliže se v členech řady vyskytují faktoriály, je většinou výhodné použít podílové kritérium. V našem případě dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\,(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{2^n n^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)n^{2n}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} > 1\,,$$

a tedy daná řada diverguje.

Příklad 8. Rozhodněte, zda konverguje řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt[7]{2}\right) \dots \left(\sqrt{2} - \sqrt[2n-1]{2}\right).$$

Řešení: Protože pro členy řady platí $a_{n+1} = a_n\left(\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2}\right)$, je v tomto případě výhodné použít podílové kritérium. Protože platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2}\right) = \sqrt{2} - 1 < 1\,,$$

uvedená řada konverguje.

Příklad 9. Zkoumejte absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Řešeni: Nejprve budeme zkoumat absolutní konvergenci dané řady, tj. konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Protože $a_n \sim \dfrac{1}{n^{1/2}}$ a $\frac{1}{2} < 1$ uvedená řada nekonverguje absolutně.

Protože se jedná o alternující řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, kde $b_n = \dfrac{n-1}{n+1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, použijeme k vyšetřování její konvergence Leibnizovo kritérium. Je zřejmé, že

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0\,.$$

Musíme ještě ukázat, že posloupnost b_n je od určitého n_0 nerostoucí, tj. že pro $n > n_0$ platí $b_{n+1} \le b_n$. To lze nejsnáze ukázat tak, že pomocí derivace dokážeme, že je funkce $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)\sqrt{x}}$ pro dostatečně velká x klesající.

Trochu pracnější je ukázat nerovnost $b_{n+1} \le b_n$ přímo. V našem případě je

$$\frac{n}{(n+2)\sqrt{n+1}} \le \frac{n-1}{(n+1)\sqrt{n}}\,.$$

Protože se pro $n \geq 2$ vesměs jedná o nezáporná čísla, je tato nerovnost ekvivalentní nerovnosti

$$n^{3/2}\sqrt{n+1} \leq (n+2)(n-1) = n^2 + n - 2\,.$$

Jestliže tuto nerovnost umocníme, dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$n^3(n+1) \leq n^4 + 2n^3 - 3n^3 - 4n + 4 \iff 0 \leq n^3 - 3n^2 - 4n + 4\,.$$

A protože je $\lim\limits_{n\to\infty}\big(n^3 - 3n^2 - 4n + 4\big) = +\infty$, existuje n_0 takové, že pro $n > n_0$ je $n^3 - 3n^2 - 4n + 4 > 0$.