

Přednáška 4

Funkce a jejich základní vlastnosti

Definice. Necht' jsou $X, Y \subset \mathbb{R}$. Pak zobrazení $f : X \rightarrow Y$ nazýváme *reálnou funkcí jedné reálné proměnné*

Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ přiřazuje každému prvku $x \in X$ právě jeden prvek $y \in Y$. Pro prvek $y \in Y$, který je přiřazen prvku $x \in X$ při zobrazení f , budeme často používat označení $y = f(x)$.

Definice. Necht' je $f : X \rightarrow Y$ funkce. Množina X se nazývá *definiční obor* funkce f a budeme ji značit D_f .

Podle definice bychom měli pro funkci zadat také množiny X a Y . Například by se měly rozlišovat funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$, které jsou definované předpisem $x \mapsto y = x^2$.

Jestliže není explicitně zadána množina X , budeme za definiční obor funkce $y = f(x)$ považovat největší podmnožinu, na které je funkce $y = f(x)$ definována a má na ní reálné hodnoty.

Pokud nezadáme explicitně množinu Y , bude $Y = \mathbb{R}$.

Definice. Necht' je dána funkce $f : X \rightarrow Y$. Pak množinu

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in X \times Y; x \in X, y = f(x)\}$$

nazýváme *graf* funkce $y = f(x)$.

Definice. Necht' je dána funkce $f : X \rightarrow Y$ a $A \subset X$. Pak množinu

$$f(A) = \{y \in Y; \exists x \in A, y = f(x)\}$$

nazýváme *obraz množiny* A při zobrazení f .

Množina $f(X)$ se nazývá *obor hodnot* funkce f a budeme ji značit H_f .

Definice. Necht' je dána funkce $f : X \rightarrow Y$ a $B \subset Y$. Pak množinu

$$f^{(-1)}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

nazýváme *vor množiny* B při zobrazení f .

Definice. Necht' jsou dány funkce $f : X \rightarrow Y$ a $g : Y \rightarrow Z$. Funkci $h : X \rightarrow Z$ definovanou předpisem $h(x) = g(f(x))$ nazýváme *složenou funkcí*. Složenou funkci budeme značit $h = g \circ f$.

Pro funkci f se často používá označení *vnitřní* funkce a pro funkci g *vnější* funkce.

Další definice budou souviset s řešením rovnice $y = f(x)$, kde $f : X \rightarrow Y$.

Podle definice má tato rovnice řešení právě tehdy, když $y \in H_f$ a pro dané $y \in H_f$ je množina všech řešení této rovnice množina $f^{(-1)}(y) \subset X$.

Definice. Necht' je dána funkce $f : X \rightarrow Y$. Je-li $H_f = Y$ říkáme, že funkce f je *funkce na množinu* Y .

Je zřejmé, že funkce f je na množinu Y právě tehdy, když pro každé $y \in Y$ existuje aspoň jedno řešení rovnice $y = f(x)$. Například funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem $x \mapsto y = x^2$ není na množinu, ale funkce $g : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ definovaná stejným předpisem je na množinu.

Ted' nás budou zajímat funkce, pro které je řešení rovnice $y = f(x)$, pokud existuje, jediné. To znamená, že pro takové funkce je množina $f^{(-1)}(y)$ prázdná nebo obsahuje pouze jeden bod. Takové funkce se nazývají prosté.

Definice. Funkce $f : X \rightarrow Y$ se nazývá *prostá*, když ze vztahu $f(x_1) = f(x_2)$ plyne $x_1 = x_2$.

Ze známe, aspoň doufám, logické identity

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$$

plyne, že funkce $f : X \rightarrow Y$ je prostá právě tehdy, když ze vztahu $x_1 \neq x_2$ plyne $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Zvlášť důležité jsou funkce, pro které má rovnice $y = f(x)$ právě jedno řešení pro každé $y \in Y$. V tomto případě mezi sebou jednoznačně souvisí prvek $x \in X$ s prvkem $y = f(x) \in Y$.

Definice. Funkce $f : X \rightarrow Y$, která je prostá a na množinu Y se nazývá *vzájemně jednoznačná*.

Je-li funkce $f : X \rightarrow Y$ vzájemně jednoznačná je každému $x \in X$ přiřazeno právě jedno $y = f(x) \in Y$ podle definice funkce, ale navíc každému $y \in Y$ odpovídá právě jedno $x \in X$, pro které je $y = f(x)$. Proto můžeme definovat funkci $g : Y \rightarrow X$ předpisem $x = g(y)$ právě tehdy, když je $y = f(x)$.

Věta. Nechť je funkce $f : X \rightarrow Y$ vzájemně jednoznačná. Pak existuje právě jedna funkce $g : Y \rightarrow X$ taková, že

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{a} \quad f \circ g = \text{id}_Y, \quad (1)$$

kde $\text{id}_X : X \rightarrow X$ je identická funkce, tj. $\text{id}_X(x) = x$ pro každé $x \in X$ a podobně id_Y .

Definice. Je-li $f : X \rightarrow Y$ vzájemně jednoznačná funkce, nazývá se funkce $g : Y \rightarrow X$ z předchozí věty *inverzní funkcí* k funkci f a často se značí $f^{(-1)}$.

Z definice plyne, že inverzní funkce $f^{(-1)}$ existuje pouze k vzájemně jednoznačné funkci f a je také vzájemně jednoznačná. Proto k ní můžeme sestavit inverzní funkci. Je zřejmé, že inverzní funkce k inverzní funkci je původní funkce f , tj. že platí $(f^{(-1)})^{(-1)} = f$. Tedy vzájemně jednoznačné funkce tvoří jakési dvojice: $(f, f^{(-1)})$.

Inverzní funkce slouží především k tomu, abychom zavedli značku pro řešení rovnice $y = f(x)$. Jestliže toto řešení existuje pro každé $y \in Y$ a je jediné, označíme ho prostě $x = f^{(-1)}(y)$. Podobně jako pro funkce, které se často používají, se pro inverzní funkce zavádějí speciální značky.

Nechť je funkce $f : X \rightarrow Y$ vzájemně jednoznačná. Její graf je množina

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in X \times Y ; x \in X, y = f(x)\}.$$

Graf její inverzní funkce $f^{(-1)} : Y \rightarrow X$ je podle množina

$$\mathcal{G}_{f^{(-1)}} = \{(y, x) \in Y \times X; y \in Y, x = f^{(-1)}(y) \Leftrightarrow y = f(x)\}.$$

Tedy graf inverzní funkce $f^{(-1)}$ je v rovině (xy) stejná množina pouze nezávisle proměnná je na svislé ose. Abychom přešli k obvyklému znázornění, kde je nezávisle proměnná na vodorovné ose, můžeme například udělat zrcadlení podle osy prvního a třetího kvadrantu, tj. přímky $y = x$.

Podle definice je

$$y = f(x) \iff x = f^{(-1)}(y).$$

Abychom dostali obvyklý zápis, kde se značí nezávisle proměnná x a závisle proměnná y , musíme v předchozím vztahu pro inverzní funkci zaměnit x za y .

Příklad: Najděte inverzní funkce k funkci $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

ŘEŠENÍ: Definiční obor funkce $f(x)$ je $X = D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Protože není dána množina Y , budeme pro začátek předpokládat, že $Y = \mathbb{R}$. Navíc ani nevíme, zda je tato funkce vzájemně jednoznačná. Proto budeme hledat řešení rovnice $y = f(x)$ pro dané $y \in \mathbb{R}$. To je

$$y = \frac{x+1}{x-2} \implies xy - 2y = x + 1 \implies x(y-1) = 2y + 1.$$

Tato rovnice nemá řešení pro $y = 1$. To znamená, že $\{1\} \notin H_f$. Pro ostatní $y \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení

$$x = \frac{2y+1}{y-1}.$$

Tedy funkce $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ má obor hodnot $H_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a je prostá na množině $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Funkce $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ je vzájemně jednoznačná funkce

$$f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Její inverzní funkce

$$f^{(-1)} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

je definovaná vztahem

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{(-1)}(y), \quad \text{tj.} \quad y = f(x) = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow x = f^{(-1)}(y) = \frac{2y+1}{y-1}.$$

Přejdeme-li k obvyklému značení, tj. zaměníme $x \leftrightarrow y$, dostaneme

$$y = f^{(-1)}(x) = \frac{2x+1}{x-1}.$$

Nechť je dána funkce $f : X \rightarrow Y$. Mnohdy nás nezajímají hodnoty funkce f pro všechna $x \in X$, ale pouze pro body z nějaké podmnožiny $M \subset X$. Tím definujeme novou funkci, které má menší definiční obor, ale je na něm definována stejným předpisem jako funkce f . Pro takové funkce se zavádí speciální pojmenování.

Definice. Necht' je dána funkce $f : X \rightarrow Y$ a množina $M \subset X$. Pak funkci $f|_M : M \rightarrow Y$ definovanou předpisem $f|_M(x) = f(x)$ pro každé $x \in M$ nazýváme *zúžení funkce f na množinu M* .

Příklad: Funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ definovaná předpisem $x \mapsto y = x^2$ je funkce na množinu $\langle 0, +\infty \rangle$, ale není prostá (protože $x^2 = (-x)^2$). Z této funkce vytvoříme prostou funkci tak, že zúžíme definiční obor funkce například na interval $\langle 0, +\infty \rangle$. Pak dostaneme funkci

$$f|_{\langle 0, +\infty \rangle} : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle,$$

která je vzájemně jednoznačná, a proto k ní existuje inverzní funkce. Je zvykem tuto inverzní funkci nazývat druhá odmocnina x a zapisovat ji ve tvaru $y = \sqrt{x}$.

Poznamenejme, že rovnosti (1), které v tomto případě jsou

$$(\sqrt{x})^2 = x, \quad \sqrt{x^2} = x,$$

platí pouze tehdy, když použijeme funkci $f|_{\langle 0, +\infty \rangle}$, tj. pro $x \geq 0$. Pro funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ danou jako $y = f(x) = x^2$ je $\sqrt{x^2} = |x|$.

Nyní budeme definovat další důležité vlastnosti funkcí. Budeme je definovat na množině $M \subset D_f$. Pokud se vynechá sousloví "na množině M ", znamená to, že $M = X = D_f$.

Definice. Necht' je $f : X \rightarrow Y$ funkce a $M \subset X$.

Jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ je $f(x) \leq K$, nazývá se funkce *shora omezená na množině M* .

Jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ je $f(x) \geq K$, nazývá se funkce *zdola omezená na množině M* .

Jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$, nazývá se funkce *omezená na množině M* .

Definice. Necht' je $f : X \rightarrow Y$ funkce a $M \subset X$.

Funkce f se nazývá *rostoucí na množině M* , jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce f se nazývá *klesající na množině M* , jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce f se nazývá *nerostoucí na množině M* , jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funkce f se nazývá *neklesající na množině M* , jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkce nerostoucí a neklesající na množině M se nazývají *monotonní na množině M* .

Funkce rostoucí a klesající na množině M se nazývají *ryze monotonní na množině M* .

Je snadno vidět, že platí

Věta. Je-li funkce f ryze monotonní na množině M , je na množině M prostá.

Definice.

Říkáme, že funkce $f : X \rightarrow Y$ má v bodě $x_0 \in X$ *ostré lokální maximum*, když existuje jeho prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ je $f(x) < f(x_0)$.

Říkáme, že funkce $f : X \rightarrow Y$ má v bodě $x_0 \in X$ *ostré lokální minimum*, když existuje jeho prstencové okolí $P(x_0)$ takové, že pro každé $x \in P(x_0)$ je $f(x) > f(x_0)$.

Říkáme, že funkce $f : X \rightarrow Y$ má v bodě $x_0 \in X$ *neostré lokální maximum*, když existuje jeho okolí $U(x_0)$ takové, že pro každé $x \in U(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$.

Říkáme, že funkce $f : X \rightarrow Y$ má v bodě $x_0 \in X$ *neostré lokální minimum*, když existuje jeho okolí $U(x_0)$ takové, že pro každé $x \in U(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$.

Lokální maxima a minima funkce se souhrnně nazývají *lokální extrém*y.

Definice.

Řekneme, že funkce $f : X \rightarrow Y$ má v bodě $x_0 \in M \subset X$ *ostré globální maximum na množině M* , jestliže pro každé $x \in M$, $x \neq x_0$, je $f(x) < f(x_0)$.

Řekneme, že funkce $f : X \rightarrow Y$ má v bodě $x_0 \in M \subset X$ *ostré globální minimum na množině M* , jestliže pro každé $x \in M$, $x \neq x_0$, je $f(x) > f(x_0)$.

Řekneme, že funkce $f : X \rightarrow Y$ má v bodě $x_0 \in M \subset X$ *neostré globální maximum na množině M* , jestliže pro každé $x \in M$ je $f(x) \leq f(x_0)$.

Řekneme, že funkce $f : X \rightarrow Y$ má v bodě $x_0 \in M \subset X$ *neostré globální minimum na množině M* , jestliže pro každé $x \in M$ je $f(x) \geq f(x_0)$.

Globální maxima a minima funkce se souhrnně nazývají *globální extrém*y.

Mnohé příklady vedou k nalezení globálních extrémů funkci na určité množině (většinou kompaktní). Je zřejmé, že pokud je x_0 vnitřní bod množiny M a existuje jeho okolí $U(x_0)$ takové, že funkce je v tomto okolí ryze monotónní, pak nemá v bodě x_0 na množině M globální extrém.

Později ukážeme, jak se dají u jistých funkcí poměrně snadno tyto body najít. Jestliže tyto body vyloučíme a zůstane nám konečný počet bodů, převedeme úlohu najít globální extrém funkce na množině M na hledání maxima nebo minima z konečné množiny hodnot.

Definice. Nechť je $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ interval a $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$.

Funkce f se nazývá *konvexní na intervalu \mathcal{I}* , jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{I}$, pro které platí $x_1 < x_2 < x_3$, je splněna nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Funkce f se nazývá *konkávní na intervalu \mathcal{I}* , jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{I}$, pro které platí $x_1 < x_2 < x_3$, je splněna nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Geometricky znamená podmínka pro konvexnost funkce, že pro každé tři body $x_1 < x_2 < x_3$ leží bod $[x_2; f(x_2)]$ na grafu funkce $y = f(x)$ pod přímkou, která spojuje body $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_3; f(x_3)]$. U konkávní funkce je tomu naopak.

Z této geometrické interpretace lze snadno nahlédnout, že konvexní (konkávní) funkce může mít na uzavřeném intervalu \mathcal{I} globální maximum (minimum) pouze v krajním bodě intervalu \mathcal{I} .

Definice. Funkce $f : X \rightarrow Y$ se nazývá *sudá*, když pro každé $x \in X$ platí $f(-x) = f(x)$. Funkce $f : X \rightarrow Y$ se nazývá *lichá*, když pro každé $x \in X$ platí $f(-x) = -f(x)$.

Příklad: Dokažte, že funkce $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ je lichá.

ŘEŠENÍ: Pro danou funkci platí

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln\left(\frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) = \\ &= \ln\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x). \end{aligned}$$

Definice. Nechť je $f : X \rightarrow Y$ a $L > 0$. Nechť je pro každé $x \in X$ také $x \pm L \in X$. Jestliže pro každé $x \in X$ platí $f(x + L) = f(x)$, nazývá se funkce f *periodická* s periodou L .

Některé elementární funkce

Polynomy (mnohočleny). Polynomem stupně n nazýváme funkci $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (2)$$

kde a_k , $k = 0, 1, \dots, n$, jsou reálná čísla a $a_n \neq 0$.

Reálné číslo x_0 , pro které je $P(x_0) = 0$ se nazývá *kořen* (nebo nulový bod) polynomu $P(x)$. Je-li x_1 kořen polynomu $P(x)$ pak existuje polynom $P_1(x)$ stupně $(n - 1)$ takový, že $P(x) = (x - x_1)P_1(x)$. Každý polynom stupně n lze zapsat ve tvaru

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}, \quad (3)$$

kde x_1, x_2, \dots, x_r jsou navzájem různé reálné kořeny polynomu $P(x)$, přirozená čísla k_i se nazývají *násobností* kořene x_i a navzájem různé polynomy $x^2 + p_i x + q_i$ nemají reálný kořen.

Navíc platí $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2(m_1 + m_2 + \dots + m_s) = n$.

Měli byste umět dělit polynom polynomem.

Exponenciální funkce. Nechť je $a > 0$, $a \neq 1$. Pak se funkce $a^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazývá *exponenciální funkce* (jak se přesně definuje iracionální mocnina je trochu složitější a nebudeme se tím zabývat). Pro $a > 1$ je funkce $y = a^x$ rostoucí v celém \mathbb{R} a pro $0 < a < 1$ je funkce $y = a^x$ klesající. V obou případech je tedy prostá. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Logaritmická funkce. Pro každé $a > 0$, $a \neq 1$, je funkce $y = f(x) = a^x$ prostá a její obor hodnot je interval $(0, +\infty)$. Proto existuje k funkci $y = f(x) = a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ inverzní funkce. Tato inverzní funkce se nazývá *logarithmus při základu a* a značí se $y = \log_a x$. Podle definice inverzní funkce je

$$\log_a : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

a platí vztahy

$$\log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a^{\log_a x} = x \quad \forall x > 0.$$

Ze vztahu

$$a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

plynou, že pro $x, y > 0$ platí

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

a ze vztahu

$$a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x} = (a^{\log_a b})^{\log_b x} = a^{\log_a b \cdot \log_b x}$$

dostaneme

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x. \quad (4)$$

Logaritmus při základu $a = 10$ se nazývá *dekadický logaritmus* a značí se $\log_{10} x = \log x$. Logaritmus při základu $a = e$ se nazývá *přirozený logaritmus* a značí se $\log_e x = \ln x$. V analýze budeme používat přirozený logaritmus. Pomocí vztahu (4) lze logaritmus při libovolném základu na tento logaritmus převést.

Příklad: Například, když ve vztahu (4) položíme $a = x = e$ a $b = x \neq 1$, dostaneme například

$$\log_e e = 1 = \log_e x \cdot \log_x e, \quad \text{tj.} \quad \log_x e = \frac{1}{\ln x}.$$

Obecná mocnina. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme funkce $f(x) = x^a$ vztahem $x^a = e^{a \ln x}$. Definiční obor této funkce je proto $x > 0$.

Přímo z definice plyne

$$e^{\ln x^y} = x^y = e^{y \ln x}, \quad \text{tj.} \quad \ln x^y = y \ln x.$$

Když ještě použijeme vztah (4) dostaneme $\log_a x^y = y \log_a x$ pro každé $a > 0$, $a \neq 1$, a $x > 0$.

Goniometrické funkce. Takto se souhrnně nazývají funkce $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$. V matematické analýze budeme velikost úhlu x zásadně vyjadřovat v obloukové míře (v radiánech). Pro goniometrické funkce byste měli znát zejména nějakou jejich definici, vztahy mezi nimi, jejich hodnoty v určitých speciálních bodech a vzorce

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Cyklometrické funkce. To je souhrnný název pro inverzní funkce k patřičně zúženým goniometrickým funkcím.

Funkce arcsin x . Funkci $\sin x$ zúžíme na interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, tj. definujeme funkci

$$f : \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$$

předpisem $f(x) = \sin x$. To je vzájemně jednoznačné zobrazení intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ na interval $\langle -1, 1 \rangle$. Inverzní funkci k této funkci nazveme *arkus sinus* a budeme ji značit $\arcsin x$. Tedy arkus sinus je funkce

$$y = \arcsin x : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$$

definovaná vztahem $y = \arcsin x$ právě tehdy, když $x = \sin y$, kde $y \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Platí vztahy

$$\sin(\arcsin x) = x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad \arcsin(\sin x) = x \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle.$$

Funkce $\arccos x$. Funkci $\cos x$ zúžíme na interval $\langle 0, \pi \rangle$, tj. definujeme funkci

$$f : \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$$

předpisem $f(x) = \cos x$. Tato funkce je vzájemně jednoznačné zobrazení intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ na interval $\langle -1, 1 \rangle$. Inverzní funkci k této funkci nazveme *arkus kosinus* a budeme ji značit $\arccos x$. Tedy arkus kosinus je funkce

$$y = \arccos x : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, \pi \rangle$$

definovaná vztahem $y = \arccos x$ právě tehdy, když $x = \cos y$, kde $y \in \langle 0, \pi \rangle$. Platí vztahy

$$\cos(\arccos x) = x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad \arccos(\cos x) = x \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Funkce $\arctg x$. Funkci $\operatorname{tg} x$ zúžíme na interval $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, tj. definujeme funkci

$$f : (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

předpisem $f(x) = \operatorname{tg} x$. To je vzájemně jednoznačné zobrazení intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ na \mathbb{R} . Inverzní funkci k této funkci nazveme *arkus tangens* a budeme ji značit $\arctg x$. Tedy arkus tangens je funkce

$$y = \arctg x : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$$

definovaná vztahem $y = \arctg x$ právě tehdy, když $x = \operatorname{tg} y$, kde $y \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Platí vztahy

$$\operatorname{tg}(\arctg x) = x \in \mathbb{R}, \quad \arctg(\operatorname{tg} x) = x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi).$$

Funkce $\operatorname{arccotg} x$. Funkci $\operatorname{cotg} x$ zúžíme na interval $(0, \pi)$, tj. definujeme funkci

$$f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

předpisem $f(x) = \operatorname{cotg} x$. Tato funkce je vzájemně jednoznačné zobrazení intervalu $(0, \pi)$ na \mathbb{R} . Inverzní funkci k této funkci nazveme *arkus kotangens* a budeme ji značit $\operatorname{arccotg} x$. Tedy arkus kotangens je funkce

$$y = \operatorname{arccotg} x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

definovaná vztahem $y = \operatorname{arccotg} x$ právě tehdy, když $x = \operatorname{cotg} y$, kde $y \in (0, \pi)$. Platí vztahy

$$\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) = x \in (0, \pi).$$

Hyperbolické funkce. Tak se souhrnně nazývají funkce

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{tgh} x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, & \operatorname{cotgh} x &= \frac{\cosh x}{\sinh x}. \end{aligned}$$

Tyto funkce se nazývají *sinus hyperbolický*, *kosinus hyperbolický*, *hyperbolický tangens* a *hyperbolický kotangens*.

Více podrobnosti a grafy těchto funkcí najdete ve skriptech.

Funkce hyperbolometrické. Tak se souhrnně nazývají funkce inverzní k hyperbolickým funkcím (v případě $\cosh x$ zúženým). Tyto funkce lze vyjádřit pomocí logaritmu.

Funkce $\operatorname{argsinh} x$. Funkce $f(x) = \sinh x$ je vzájemně jednoznačné zobrazení \mathbb{R} na \mathbb{R} . Její inverzní funkce se nazývá *argument hyperbolického sinu* a značí se $y = \operatorname{argsinh} x$. Podle definice je tato funkce definována vztahem

$$y = \operatorname{argsinh} x \iff x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

ze kterého plyne

$$y = \operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkce $\operatorname{argcosh} x$. Funkce $f(x) = \cosh x$ není prostá, ale její zúžení na interval $\langle 0, +\infty \rangle$ je vzájemně jednoznačné zobrazení intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ na $\langle 1, +\infty \rangle$. Její inverzní funkce se nazývá *argument hyperbolického kosinu* a značí se $y = \operatorname{argcosh} x$. Podle definice je tato funkce definována vztahem

$$y = \operatorname{argcosh} x \iff x = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2},$$

kde $x \geq 1$ a $y \geq 0$. Z této rovnice plyne

$$y = \operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1.$$

Funkce $\operatorname{argtgh} x$. Funkce $f(x) = \operatorname{tgh} x$ je vzájemně jednoznačné zobrazení \mathbb{R} na $(-1, 1)$. Její inverzní funkce se nazývá *argument hyperbolické tangenty* a značí se $y = \operatorname{argtgh} x$. Podle definice je tato funkce definována vztahem

$$y = \operatorname{argtgh} x \iff x = \operatorname{tgh} y = \frac{\sinh y}{\cosh y} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}},$$

ze kterého plyne

$$y = \operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Funkce $\operatorname{arccotgh} x$. Funkce $f(x) = \operatorname{cotgh} x$ je vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ na $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Její inverzní funkce se nazývá *argument hyperbolické kotangenty* a značí se $y = \operatorname{arccotgh} x$. Podle definice je tato funkce definována vztahem

$$y = \operatorname{arccotgh} x \iff x = \operatorname{cotgh} y = \frac{\cosh y}{\sinh y} = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}},$$

ze kterého plyne

$$y = \operatorname{arccotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Další podrobnosti a grafy jsou ve skriptech.