Přednáška 5

Limita a spojitost funkce

V této přednášce se konečně dostaneme k diferenciálnímu počtu funkce jedné reálné proměnné. Diferenciální počet se v podstatě zabývá "lokálním" chováním funkce v daném bodě, tj. chováním funkce v nějakém "nekonečně" malém okolí tohoto bodu. Pomocí lokálního chování funkce v každém bodě množiny M pak usuzujeme na chování funkce na celé množině M, tzv. "globální" chování, které nás většinou zajímá.
Je-li dána funkce $y = f(x)$ a bod a, který je vnitřní bod definičního oboru, snažíme se tuto funkci v bezprostředním okolí bodu a přibližně nahradit nějakou jednodušší funkcí, u které jsme schopni zkoumat její vlastnosti. V diferenciálním počtu budeme nahrazovat dané funkce polynomy, tj. budeme se snažit napsat

$$f(x) \approx c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots\,, \tag{1}$$

kde $c_0, c_1, \dots$ jsou nějaké konstanty. Ty se snažíme vybrat tak, aby chyba, kterou uděláme, když nahradíme funkci polynomem určitého stupně byla v okolí bodu a, tj. pro malá $|x-a|$, co nejmenší. Například, pokud se snažíme nahradit funkci $y = f(x)$ a okolí budu $x = a$ lineární funkcí, tj. přímkou, je z grafického názoru přirozené vybrat tuto přímku tak, aby byla tečnou ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\bigl[a; f(a)\bigr]$.
Jestliže do vztahu (1) dosadíme $x = a$, dostaneme $c_0 = f(a)$. Vztah (1) pak můžeme pro $x \neq a$ napsat jako

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \approx c_1 + c_2(x-a) + \dots\,.$$

Konstantu c_1 dostaneme tak, že do pravé strany tohoto vztahu "dosadíme" $x = a$. Bohužel na levé straně je neurčitý výraz $\dfrac{0}{0}$. Přitom je pro každé x z okolí bodu a na levé straně definovaný výraz, který je pro malá $|x-a|$ může "skoro" rovnat nějakému číslu c_1.
Nejprve budeme přesně definovat, co máme na mysli tvrzením "funkce $y = f(x)$ se v bezprostředním okolí bodu a skoro rovna A", tj. limitu funkce.

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$, bod $a \in \mathbb{R}$, který je hromadný bod definičního oboru D_f, a $A \in \mathbb{R}$. Jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\,;\ \forall x \in D_f\,;\ 0 < |x-a| < \delta \ \text{ je } \ \bigl|A - f(x)\bigr| < \varepsilon \tag{2}$$

(ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé x z definičního oboru funkce $f(x)$, které se nerovná a a jehož vzdálenost od bodu a je menší než δ, je vzdálenost bodu $f(x)$ od bodu A menší než ε), řekneme, že *funkce* $f(x)$ *má v bodě* a *limitu* A. Tento výrok budeme zapisovat jako

$$\lim_{x\to a} f(x) = A\,.$$

Limitě z této definice, tj. když bod a i limita A jsou konečná reálná čísla, se říká vlastní limita ve vlastním bodě. Budeme ještě definovat limity pro $a = \pm\infty$, tj. limity v nevlastním bodě, a limity, které jsou rovny $\pm\infty$, tzv. nevlastní limity.

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$ a bod $a \in \mathbb{R}$, který je hromadným bodem D_f. Jestliže

$$\forall K\ \exists \delta > 0\,;\ \forall x \in D_f\,;\ 0 < |x-a| < \delta \ \text{ je } \ f(x) > K\,, \tag{3}$$

říkáme, že má funkce $f(x)$ v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $+\infty$. Tento výrok zapisujeme jako

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \,.$$

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$ a $A \in \mathbb{R}$. Jestliže je $+\infty$ hromadným bodem D_f a

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{R} \, ; \; \forall x \in D_f \, ; \; x > K \; \text{ je } \; \bigl|A - f(x)\bigr| < \varepsilon \,, \tag{4}$$

říkáme, že má funkce v bodě $+\infty$ vlastní limitu A. Tento výrok zapisujeme jako

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \,.$$

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$ a $+\infty$ je hromadným bodem D_f. Jestliže

$$\forall K \; \exists L \, ; \; \forall x \in D_f \, ; \; x > L \; \text{ je } \; f(x) > K \,, \tag{5}$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě $+\infty$ limitu $+\infty$ a píšeme

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \,.$$

Podobně se definují limity v bodě $-\infty$ a limity rovné $-\infty$.

Všechny definice limity lze jediným způsobem zapsat pomocí okolí bodů.

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$, bod $a \in \mathbb{R}^*$, který je hromadný bod D_f a $A \in \mathbb{R}^*$. Jestliže ke každému okolí $U(A)$ bodu A existuje okolí $V(a)$ bodu a takové, že pro každé x z definičního oboru funkce $f(x)$, které je prvkem okolí $V(a)$ a $x \neq a$ patří hodnota funkce $f(x)$ do okolí $U(A)$ bodu A, tj.

$$\forall U(A) \; \exists V(a) \, ; \; \forall x \in D_f \cap V(a) \, ; \; x \neq a \; \text{ je } \; f(x) \in U(A) \,, \tag{6}$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu A.

Limita funkce je pokud existuje, pouze jedna. To je tvrzení následující věty.

Věta. Jestliže existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ je tato limita jediná.

Důkaz: Nechť existují $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$ a platí $A \neq B$. Protože $A \neq B$, existují okolí $U(A)$ a $U(B)$ takové, že $U(A) \cap U(B) = \emptyset$. Podle definice limity (6) existují okolí $V_A(a)$ a $V_B(a)$ bodu a takové, že pro každé $x \in D_f \cap V_A(a)$, $x \neq a$, je $f(x) \in U(A)$ a pro každé $x \in D_f \cap V_B(a)$, $x \neq a$, je $f(x) \in U(B)$. Protože je bod a hromadný bod D_f, obsahuje množina $D_f \cap V_A(a) \cap V_B(a)$ alespoň jeden bod $x \neq a$. Pak ale je $f(x) \in U(A) \cap U(B) = \emptyset$. To je nemůže být pravda (= spor).

Proto není pravda tvrzení: Existují $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$ a platí $A \neq B$, a platí jeho negace. To je právě tvrzení věty.

Důkaz tohoto typu se v matematice nazývá *důkaz sporem*. Jeho logická podstata spočívá $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní výroku $\overline{A} \vee B$. Jeho negace je $A \wedge \overline{B}$. Při důkazu sporem dokážeme, že tento výrok, tj. $A \wedge \overline{B}$, neplatí. Proto musí platit jeho negace, tj. výrok $\overline{A} \vee B$, což je ekvivalentní výroku $A \Rightarrow B$.

Definici limity funkce můžeme ještě rozšířit tak, že nebudeme při limitě uvažovat všechna $x \in D_f$, ale pouze $x \in M \subset D_f$. V podstatě se jedná o limitu zúžené funkce $f_{|M}$.

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$, množina $M \subset D_f$, bod a, který je hromadný bod množiny M a $A \in \mathbb{R}^*$. Jestliže

$$\forall U(A)\ \exists V(a)\,;\ \forall x \in M \cap V(a)\,;\ x \neq a \ \text{ je } \ f(x) \in U(A)\,, \tag{7}$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě a vzhledem k množině M limitu A. Toto tvrzení zapisujeme jako

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = A\,.$$

Pro takové limity platí věta:

Věta. Nechť existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Nechť je $M \subset D_f$ a bod a je hromadný bod množiny M. Pak platí

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = A\,.$$

Limity funkcí vzhledem k množinám se pro funkci jedné reálné proměnné používají ve dvou případech, když je M posloupnost a když je $M = (a, +\infty)$ nebo $M = (-\infty, a)$.

Věta. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $x_n \in D_f$ takovou, že $x_n \neq a$ a $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, je $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Tato věta převádí výpočet limity funkce na výpočet limity posloupnosti a v některých případech může být užitečná.

Příklad: Jestliže víte, že existuje $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$, je tato limita rovna e, protože posloupnost $x_n = \dfrac{1}{n}$ splňuje předpoklady věty a platí

$$\lim_{n \to \infty} \big(1 + x_n\big)^{1/x_n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\,.$$

Jestliže je $a \in \mathbb{R}$ a $M = (a, +\infty)$, resp. $M = (-\infty, a)$, mluvíme o limitě funkce v bodě a zprava, resp. zleva.

Definice. Nechť je $a \in \mathbb{R}$ hromadný bod množiny $D_f \cap (a, +\infty)$ a $A \in \mathbb{R}^*$. Jestliže

$$\forall U(A)\ \exists \delta > 0\,;\ \forall x \in D_f\,;\ 0 < x - a < \delta \ \text{ je } \ f(x) \in U(A)\,, \tag{8}$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu zprava rovnou A a píšeme $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = A$.

Podobně, nechť je $a \in \mathbb{R}$ hromadný bod množiny $D_f \cap (-\infty, a)$ a $A \in \mathbb{R}^*$. Jestliže

$$\forall U(A)\ \exists \delta > 0\,;\ \forall x \in D_f\,;\ 0 < a - x < \delta \ \text{ je } \ f(x) \in U(A)\,, \tag{9}$$

říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě a limitu zleva rovnou A a píšeme $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = A$.

Limity zprava a zleva se nazývají jednostranné limity a limitu $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ budeme nazývat oboustranná limita funkce $f(x)$ v bodě a.

Věta. Pokud je bod a hromadným bodem množin $D_f \cap (a, +\infty)$ a $D_f \cap (-\infty, a)$ existuje oboustranná limita funkce $f(x)$ v bodě a právě tehdy, když existují obě jednostranné limity funkce $f(x)$ v bodě a a jsou si rovny.

Tato věta se často používá k tomu, abychom ukázali, že limita funkce neexistuje.

Příklad. Ukažte, že neexistuje limita $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+3}{(x-1)^3}$.

Řešení: Jestliže dosadíme $x = 1$, vidíme, že se jedná o limitu typu $\dfrac{4}{0}$, tj. tato limita rovna $\pm\infty$. Protože pro $x > 1$ je $x - 1 > 0$, platí $\lim\limits_{x \to 1_+} \dfrac{x^2+3}{(x-1)^3} = +\infty$, a protože pro $x < 1$ je $x - 1 < 0$, je $\lim\limits_{x \to 1_-} \dfrac{x^2+3}{(x-1)^3} = -\infty$. A protože jsou tyto limity různé, oboustranná limita neexistuje.

Limity funkcí počítáme většinou tak, že známe základní limity a ostatní limity počítáme pomocí základních limit a určitých vět. Je věcí každého, jaké limity bude považovat za základní. Uvedeme některé limity, které byste měli umět zpaměti

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = \mathrm{e}\,,$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^p}{\mathrm{e}^{qx}} = 0\,, \qquad p \in \mathbb{R}\,, \quad q > 0\,,$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^p x}{x^q} = 0\,, \qquad p \in \mathbb{R}\,, \quad q > 0\,,$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1\,,$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

a vlastně všechny limity typu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)\,.$$

Pro algebraické operace s limitami platí

Věta. Jestliže existují limity $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$ a α, $\beta \in \mathbb{R}$, a je-li a hromadný bod $D_f \cap D_g$ (pro podíl $D_{f/g}$) pak platí

$$\lim_{x \to a} \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha A + \beta B\,,$$
$$\lim_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = AB\,,$$
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}\,,$$

za předpokladu, že jsou výrazy vpravo definovány v $\mathbb{R}^*$.

Připomeňme, že nejsou definovány výrazy typu $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$.

Jestliže předpokládáme, že bod a je hromadným bodem definičních oborů průniku všech funkcí, jsou následující věty bezprostředním důsledkem definice limity.

Věta. Jestliže na nějakém okolí bodu a platí $f(x) \le g(x)$, je $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Věta. Jestliže na nějakém okolí bodu a platí $f(x) \le g(x) \le h(x)$, a existují $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, pak je $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Příklad: Dokažte, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Řešení: Protože funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ je sudá, stačí ukázat, že $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Úhel x v obloukové míře budeme měřit délkou oblouku na jednotkové kružnici se středem v počátku $O = [0;0]$ od kladné vodorovné polopřímky, na které leží bod $P = [1;0]$. Bod M, který odpovídá velikosti úhlu $x \ge 0$ pak má souřadnice $M = [\cos x; \sin x]$. Obsah pravoúhlého trojúhelníka s přeponou OM a odvěsnou na polopřímce OP je roven $P_1 = \frac{1}{2}\cos x \sin x$ a je menší než obsah kruhové výseče OPM, která je $P_2 = \frac{1}{2}\,x$. Tedy pro $x \in (0, \frac{1}{2}\,\pi)$ platí nerovnost

$$\frac{\cos x \sin x}{2} \le \frac{x}{2} \implies \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{\cos x}\,.$$

Na druhé straně je obsah výseče OPM menší než obsah pravoúhlého trojúhelníka a odvěsnou OP, jehož přepona leží na polopřímce OM, který je $P_3 = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,x$. Z toho dostaneme pro $x \in (0, \frac{1}{2}\,\pi)$ nerovnost

$$\frac{x}{2} \le \frac{\mathrm{tg}\,x}{2} = \frac{\sin x}{2\cos x} \implies \cos x \le \frac{\sin x}{x}\,.$$

Celkově tedy pro $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ platí

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{\cos x}\,.$$

A protože $\lim\limits_{x\to 0_+} \cos x = 1$, je podle předchozí věty $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Věta. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ právě tehdy, když $\lim\limits_{x\to a} \bigl|f(x)\bigr| = 0$.

Věta. Jestliže je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a existuje okolí bodu a, ve kterém je funkce $g(x)$ omezená, je $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$

Příklad: Protože $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ a platí nerovnost $\left|\sin \dfrac{1}{x}\right| \le 1$, je $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \sin \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Nyní uvedeme větu, které se týká limity složené funkce $h = g \circ f$. Jde o to, kdy můžeme počítat limitu složené funkce počítat jako dvě limity, nejprve limitu funkce f a následně limitu funkce g.

Přesněji, jsou dány funkce $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$. Nechť a je hromadný bod množiny X a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Nechť je A hromadný bod množiny Y a existuje $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$. Otázka je, kdy je $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g\bigl(f(x)\bigr) = B$?

Příklad: Nechť je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována předpisem $f(x) = 0$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována jako $g(y) = 0$ pro $y \neq 0$ a $g(0) = 1$. Pak je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Ale pro složenou funkci $h(x) = g\big(f(x)\big) = g(0) = 1 \neq 0$.
Tento příklad ukazuje, že obecně nelze limitu složené funkce počítat jako dvě limity. Problém spočívá v tom, že při definici limity $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$ nebereme v úvahu samotný bod $y = A$. Proto musíme vyloučit případ, kdy v každém okolí bodu a existuje bod $x \neq a$ takový, že $f(x) = A$, nebo do definice "limity" funkce $g(y)$ zahrnout i bod A.

Věta: Nechť jsou dány funkce $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ a $h = g \circ f : X \to Z$. Nechť a je hromadný bod množiny X a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Nechť je A hromadný bod množiny Y a existuje $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$. Nechť existuje prstencové okolí $P(a)$ bodu a takové, že pro každé $x \in P(a)$ je $f(x) \neq A$. Pak je $\lim\limits_{x\to a} h(x) = B$.

Jestliže do definice "limity" funkce $f(x)$ v bodě a zahrneme i samotný bod a dostaneme tzv. funkci spojitou v bodě a.

Definice. Řekneme, že funkce $f(x)$ je *spojitá v bodě* $a \in D_f$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\,;\ \forall x \in D_f\,;\ |x - a| < \delta \ \text{ je }\ \big|f(a) - f(x)\big| < \varepsilon\,. \tag{10}$$

Body $a \in D_f$, ve kterých je funkce $f(x)$ spojitá, jsou dvojího druhu:

1. a je izolovaný bod D_f;
2. a je hromadný bod D_f a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Věta. Nechť jsou dány funkce $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ a $h = g \circ f : X \to Z$. Nechť a je hromadný bod množiny X, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a nechť je funkce $g(y)$ spojitá v bodě A. Pak je

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g\Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big) = g(A)\,.$$

Definice. Nechť je dána funkce $f(x)$ a $M \subset D_f$. Říkáme, že funkce $f(x)$ je *spojitá na množině* M, je-li spojitá v každém bodě množiny M.
Funkce $f(x)$ spojité na D_f nazýváme *spojité*.

Všechny elementární funkce, které jsme definovali v minulé přednášce jsou spojité. Například funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$ je spojitá, protože $x = 0$ není prvkem D_f. Proto se předcházející věta používá velmi často.

Jako příklad ukážeme použití této věty při výpočtu limit typu 1^∞.
Příklad: Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, pak platí

$$\lim_{x\to a}\big(1 + f(x)\big)^{g(x)} = \exp\Big(\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)\Big). \tag{11}$$

Řešení: Protože podle předpokladu je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, existuje okolí $U(a)$ bodu a takové, že pro každé $x \in U(a) \setminus \{a\}$ je $1 + f(x) > 0$. Tedy podle definice platí v tomto okolí

$$\big(1 + f(x)\big)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln\left(1+f(x)\right)}.$$

Protože je funkce e^x spojitá v $\mathbb{R}$, platí

$$\lim_{x\to a}\big(1 + f(x)\big)^{g(x)} = \exp\Big(\lim_{x\to a} g(x) \cdot \ln\big(1 + f(x)\big)\Big).$$

Protože je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, je funkce $F(x)$ definovaná pro $x \in (-1, +\infty)$ předpisem

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{pro } \ x \neq 0\,, \\ 1 & \text{pro } \ x = 0 \end{cases}$$

spojitá. Podle věty o limitě součinu a uvedené věty o limitě složené funkce je tedy

$$\lim_{x\to a} g(x)\ln\big(1 + f(x)\big) = \lim_{x\to a}\big(g(x)\cdot f(x)\big)\cdot \lim_{x\to a} \frac{\ln\big(1+f(x)\big)}{f(x)} = \lim_{x\to a}\big(g(x)\cdot f(x)\big).$$

Pomocí limit se počítají tzv. asymptoty ke grafu funkce $y = f(x)$. Asymptoty jsou v podstatě přímky, ke kterým se blíží graf funkce v krajním bodě definičního oboru nebo v bodě nespojitosti funkce $f(x)$.

Definice. Přímka $x = a$ se nazývá *svislou asymptotou* ke grafu funkce $y = f(x)$, jestliže v bodě a existuje aspoň jedna nevlastní jednostranná limita funkce $f(x)$, tj. když

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to a_-} f(x) = \pm\infty\,.$$

Příklad: Funkce

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{x^3 + 2x^2 - x - 2}} = \frac{x+1}{\sqrt{(x+2)(x+1)(x-1)}}$$

má definiční obor $(-2,-1) \cup (1,+\infty)$. Protože

$$\lim_{x\to -2_+} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to 1_+} f(x) = +\infty\,,$$

jsou přímky $x = -2$ a $x = 1$ svislé asymptoty ke grafu funkce $y = f(x)$. Ale protože

$$\lim_{x\to -1_-} f(x) = 0\,,$$

není přímka $x = -1$ asymptota.

Definice. Přímka $y = kx + q$ se nazývá *asymptota* ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. v bodě $-\infty$, jestliže

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - kx - q\big) = 0\,, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - kx - q\big) = 0\,. \tag{12}$$

Je-li $k = 0$ nazývá se asymptota *vodorovná* a je-li $k \neq 0$ mluvíme o *šikmé asymptotě.*

Je zřejmé, že pokud existuje limita $\lim_{x\to+\infty} f(x) = q$, resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = q$, je přímka $y = q$ vodorovná asymptota ke grafu funkce v bodě $+\infty$, resp. v bodě $-\infty$.

Je-li přímka $y = kx + q$ asymptota ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\pm\infty$, je

$$0 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} - k\,, \quad \text{tj.} \quad k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}\,.$$

Jestliže známe k, lze najít hodnotu q jako limitu

$$q = \lim_{x\to\pm} \bigl(f(x) - kx\bigr)\,.$$

Příklad: V bodech $\pm\infty$ najděte asymptoty funkce $y = \sqrt{x^2 + 2x} + x$.

Řešení: Pro $x \to -\infty$ jde o výraz typu $+\infty - \infty$. Protože je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \bigl(\sqrt{x^2+2x} + x\bigr) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\bigl(\sqrt{x^2+2x} + x\bigr)\bigl(\sqrt{x^2+2x} - x\bigr)}{\sqrt{x^2+2x} - x} = \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} - x} = -1\,,\end{aligned}$$

je přímka $y = -1$ vodorovná asymptota ke grafu funkce v bodě $-\infty$.

Pro $x \to +\infty$ se jedná o výraz $+\infty + \infty$ a vodorovná asymptota v bodě $x = +\infty$ neexistuje. Abychom našli šikmou asymptotu, najdeme nejprve

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x} + x}{x} = 2\,.$$

Člen q je pak

$$\begin{aligned}q = \lim_{x\to+\infty} \bigl(\sqrt{x^2+2x} - x\bigr) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\bigl(\sqrt{x^2+2x} - x\bigr)\bigl(\sqrt{x^2+2x} + x\bigr)}{\sqrt{x^2+2x} + x} = \\ = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x} + x} = 1\,.\end{aligned}$$

Tedy v bodě $+\infty$ šikmá asymptota přímka $y = 2x + 1$.

Pro spojité funkce platí mnoho užitečných vět, z nichž některé lze najít ve skriptech. Zde uvedeme pouze jednu větu, kterou budeme potřebovat při výpočtu globálních extrémů spojité funkce na kompaktní, tj. omezené a uzavřené, množině M.

Věta. Je-li funkce $f(x)$ spojitá na kompaktní množině M, existují body $x_{\min}, x_{\max} \in M$ takové, že pro každé $x \in M$ je $f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$.

Tvrzení této, tzv. *Weierstrassovy věty*, lze vyjádřit tak, že každá funkce spojitá na kompaktní množině M má v množině M minimum a maximum.

Důkaz: Aby bylo vidět, jak se v matematice dokazují věty, uvedeme pro zajímavost důkaz této věty. Zároveň na důkazu budeme demonstrovat důležitou vlastnost kompaktních množin, že pro každou posloupnost x_n prvků kompaktní množiny M existuje z ní vybraná podposloupnost, která má limitu v M.

Nejprve ukážeme, že každá funkce $f(x)$, která je spojitá na kompaktní množině M je na M omezená. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ na množině M omezená není. Pak je každému $n \in \mathbb{N}$ je množina $M_n = \{x \in M\,;\; f(x) > n\}$ neprázdná. Z každé množiny M_n vybereme prvek x_n. Takto dostaneme posloupnost $x_n \in M$. Protože je množina M kompaktní, existuje posloupnost y_n vybraná z posloupnosti x_n, která konverguje k prvku $y \in M$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in M$. Podle definice vybrané posloupnosti je $y_n \in M_n$, a tedy $f(y_n) > n$. Protože je funkce $f(x)$ spojitá na množině M, je

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = +\infty\,,$$

což je spor se spojitostí funkce $f(x)$ v bodě $y \in M$.
Podobně se ukáže, že funkce $f(x)$ je na množině M omezená zdola.

Označme $A = \{f(x) \in \mathbb{R}\,;\; x \in M\}$. Protože je funkce $f(x)$ na množině M omezená, je omezená i množina A, a proto existují $S = \sup A \in \mathbb{R}$ a $s = \inf A \in \mathbb{R}$. Podle definice suprema a infima platí pro každé $x \in M$ nerovnosti $s \le f(x) \le S$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $A_n = \left\{x \in M\,;\; f(x) > S - \dfrac{1}{n}\right\}$. Podle definice suprema, je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina A_n neprázdná. Z každé množiny A_n vybereme prvek $x_n \in A_n$. Tím dostaneme posloupnost $x_n \in M$. Protože M je kompaktní, lze z ní vybrat posloupnost y_n, která konverguje k prvku $y \in M$. Protože je $y_n \in A_n$, platí nerovnost

$$S - \frac{1}{n} \le f(y_n) \le S\,.$$

Jestliže označíme $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \in M$, dostaneme ze spojitosti funkce $f(x)$ v bodě y

$$\lim_{n\to\infty}\left(S - \frac{1}{n}\right) = S \le \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(y) \le S\,,$$

tj. $f(y) = S$. Tedy existuje $y = x_{\max} \in M$, pro které platí

$$S = f(x_{\max}) \ge f(x) \qquad \forall x \in M\,.$$

Důkaz existence prvku $x_{\min} \in M$ je obdobný.

Řešené příklady

Příklad 1. Najděte limity

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^4+2x^2-8x+5}}{(1-x)\sqrt{4x^2+3x+1}}$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^4+2x^2-8x+5}}{(1-x)\sqrt{4x^2+3x+1}}$,

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+2x^2-8x+5}}{(1-x)\sqrt{4x^2+3x+1}}$, d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+2x^2-8x+5}}{(1-x)\sqrt{4x^2+3x+1}}$.

Řešení: Když do výrazu v limitě dosadíme $x=2$, dostaneme

$$\frac{\sqrt{2^4+2\cdot 2^2-8\cdot 2+5}}{(1-2)\sqrt{4\cdot 2^2+3\cdot 2+1}} = -\sqrt{\frac{13}{23}}\,.$$

A protože je tento výraz definovaný v $\mathbb{R}^*$, je

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^4+2x^2-8x+5}}{(1-x)\sqrt{4x^2+3x+1}} = -\sqrt{\frac{13}{23}}\,.$$

Jestliže do výrazu v limitě dosadíme $x=1$, dostaneme výraz $\frac{0}{0}$, který v $\mathbb{R}^*$ není definován. Proto výraz trochu upravíme. Označme $P(x)=x^4+2x^2-8x+5$. Už víme, že $P(1)=0$. Protože $x=1$ je kořen polynomu $P(x)$, musí existovat polynom $P_1(x)$ takový, že $P(x) = (x-1)P_1(x)$. Dělením dostaneme $P_1(x)=x^3+x^2+3x-5$, tj.

$$P(x) = x^4+2x^2-8x+5 = (x-1)(x^3+x^2+3x-5)\,.$$

Protože $P_1(1)=0$, musí existovat polynom $P_2(x)$ takový, že $P_1(x)=(x-1)P_2(x)$. Dělením zjistíme, že $P_2(x)=x^2+2x+5$. Tedy

$$P(x) = x^4+2x^2-8x+5 = (x-1)^2(x^2+2x+5)\,.$$

Tedy hledaná limita je

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^4+2x^2-8x+5}}{(1-x)\sqrt{4x^2+3x+1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{(x-1)^2(x^2+2x+5)}}{(1-x)\sqrt{4x^2+3x+1}} = \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|\sqrt{x^2+2x+5}}{(1-x)\sqrt{4x^2+3x+1}}\,.$$

Protože

$$\frac{|x-1|}{1-x} = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad x>1\,, \\ 1 & \text{pro} \quad x<1\,, \end{cases}$$

jsou limity

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{\sqrt{x^4+2x^2-8x+5}}{(1-x)\sqrt{4x^2+3x+1}} = -\lim_{x\to 1_+} \frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{\sqrt{4x^2+3x+1}} = -1\,,$$

$$\lim_{x\to 1_-} \frac{\sqrt{x^4+2x^2-8x+5}}{(1-x)\sqrt{4x^2+3x+1}} = \lim_{x\to 1_-} \frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{\sqrt{4x^2+3x+1}} = 1$$

a limita v případě b) neexistuje.

V případě c) postupujeme podobně, jako jsme postupovali v případě limit posloupností. To znamená, že napíšeme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+2x^2-8x+5}}{(1-x)\sqrt{4x^2+3x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{1+2x^{-2}-8x^{-3}+5x^{-4}}}{x^2(x^{-1}-1)\sqrt{4+3x^{-1}+x^{-2}}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+2x^{-2}-8x^{-3}+5x^{-4}}}{(x^{-1}-1)\sqrt{4+3x^{-1}+x^{-2}}} = -\frac{1}{2}\,.$$

Podobně postupujeme i v případě d). Občas si ale musíme dát pozor na to, že $\sqrt{x^2} = |x|$ a ne x, tj. pro $x < 0$ je $\sqrt{x^2} = -x$. Proto dostaneme

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+2x^2-8x+5}}{(1-x)\sqrt{4x^2+3x+1}} = \frac{1}{2}\,.$$

Limity z příkladů c) a d) se často objevují v příkladech, které dostanete před písemkou. Obvykle se počítají tak, že ve výrazech ponecháte pouze nejvyšší mocniny x, tj.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+2x^2-8x+5}}{(1-x)\sqrt{4x^2+3x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{-x\sqrt{4x^2}} = -\frac{1}{2}\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+2x^2-8x+5}}{(1-x)\sqrt{4x^2+3x+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{-x\sqrt{4x^2}} = \frac{1}{2}\,.$$

Příklad 2. Najděte limitu $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^3+x+1}-\sqrt{x^3-x^2+3}}$.

Řešení: Tuto limitu nelze počítat tak, že v odmocninách necháme pouze nejvyšší mocniny. Problém je v tom, že pro $x > 0$ dostaneme po úpravě

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^3+x+1}-\sqrt{x^3-x^2+3}} = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt{1+2x^{-1}}}{x^{3/2}\big(\sqrt{1+x^{-2}+x^{-3}}-\sqrt{1-x^{-1}+3x^{-3}}\big)} =$$
$$= \frac{\sqrt{1+2x^{-1}}}{x\big(\sqrt{1+x^{-2}+x^{-3}}-\sqrt{1-x^{-1}+3x^{-3}}\big)}$$

ve jmenovateli limitu typu $\infty\cdot 0$, kterou nelze počítat jako součin limit. Proto výraz v limitě nejprve upravíme. Snad už známým postupem dostaneme

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^3+x+1}-\sqrt{x^3-x^2+3}} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^3+x+1}-\sqrt{x^3-x^2+3}}\cdot\frac{\sqrt{x^3+x+1}+\sqrt{x^3-x^2+3}}{\sqrt{x^3+x+1}+\sqrt{x^3-x^2+3}}$$
$$= \frac{\sqrt{x+2}\big(\sqrt{x^3+x+1}+\sqrt{x^3-x^2+3}\big)}{x^2+x-2}\,.$$

A protože se v této limitě už nevyskytuje výraz typu $\infty-\infty$ jako v původní limitě, je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^3+x+1}-\sqrt{x^3-x^2+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}\big(\sqrt{x^3+x+1}+\sqrt{x^3-x^2+3}\big)}{x^2+x-2} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\big(\sqrt{x^3}+\sqrt{x^3}\big)}{x^2} = 2\,.$$

Příklad 3. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x\ln(1+x)}$.

Řešení: Jedná se o limitu typu $\dfrac{0}{0}$. Tyto limity budeme později počítat pomocí derivaci. Ukážeme, jak lze tuto limitu počítat pomocí známých limit, které jsme uvedli v přednášce. Protože platí $1-\cos 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\sin^2 x$, je

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x\ln(1+x)} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)}\,.$$

Víme, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Proto je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\ln(1+x)} &= 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = 2\lim_{x\to 0}\Bigl(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)}\Bigr) = \\ &= 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 2\,,\end{aligned}$$

protože, jak víme, platí $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Příklad 4. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Řešení: Označme $x = \operatorname{tg} y$, kde $y \in \bigl(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\bigr)$. Pak je $\operatorname{arctg} x = y$ a $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg} x = 0$. A protože pro $x \neq 0$ je $y \neq 0$, platí podle věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0} \frac{y\cos y}{\sin y} = \lim_{y\to 0} \cos y \cdot \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1\,.$$

Příklad 5. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{1+3x}$.

Řešení: V tomto příkladě se jedná o limitu typu 1^∞. Tyto limity se obvykle, podobně jako u posloupností, počítají pomocí vztahu (11).
Protože $\dfrac{2x-1}{2x+3} = 1 + \dfrac{-4}{2x+3}$ a $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-4}{2x+3} = 0$, je podle (11)

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{1+3x} = \lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{-4}{2x+3}\right)^{1+3x} = \exp\left(\lim_{x\to -\infty} \frac{-4(1+3x)}{2x+3}\right) = \mathrm{e}^{-6}\,.$$

Příklad 6. Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+\sin 2x}$.

Řešení: Podle definice je $\sqrt[x]{1+\sin 2x} = \bigl(1+\sin 2x\bigr)^{1/x}$. Jedná se tedy o limitu typu 1^∞. Podle (11) dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+\sin 2x} = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}\right) = \mathrm{e}^2\,,$$

protože po substituci $y = 2x$ získáme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 2\,.$$

Příklad 7. Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x + 4 - \mathrm{e}^x}{x^2 - x - 2}$.

Řešení: Protože z rovnice $x^2 - x - 2 = 0$ plyne, $x = -1$ nebo $x = 2$, je definiční obor funkce $f(x)$ roven $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$. Asymptoty budeme hledat v krajích bodech definičního oboru, tj. v bodech $x_1 = -\infty$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ a $x_4 = +\infty$. Přitom v bodech $x_2 = -1$ a $x_3 = 2$ mohou být svislé asymptoty a v bodech $x_{1,4} = \pm\infty$ vodorovné nebo šikmé asymptoty.

Aby v bodě $x_2 = -1$ měl graf funkce $y = f(x)$ svislou asymptotu, musí být alespoň jedna z jednostranných limit v tomto bodě nevlastní. Například pro limitu zprava dostaneme

$$\lim_{x\to -1_+} f(x) = \lim_{x\to -1_+} \frac{x^3 + x^2 - 2x + 4 - \mathrm{e}^x}{(x+1)(x-2)} = -\infty\,,$$

protože v bodě $x = -1$ je čitatel roven $6 - \mathrm{e} > 0$ a pro $x \in (-1, 2)$ je jmenovatel záporný. Podobně v bodě $x_3 = 2$ je

$$\lim_{x\to 2_+} f(x) = \lim_{x\to 2_+} \frac{x^3 + x^2 - 2x + 4 - \mathrm{e}^x}{(x+1)(x-2)} = +\infty\,,$$

protože čitatel je v tomto bodě roven $12 - \mathrm{e}^2 > 0$ a jmenovatel je pro $x > 2$ kladný. Dostali jsme tak dvě svislé asymptoty $x = -1$ a $x = 2$.

Aby měl graf funkce $y = f(x)$ v bodě $+\infty$ vodorovnou asymptotu $x = a$, musí existovat konečná limita $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$. Při výpočtu této limity je dobré si uvědomit, že pro velká x je e^x daleko větší, než jakákoliv mocnina x. Toto tvrzení je vyjádřeno limitou $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^p}{\mathrm{e}^x} = 0$ pro každé $p \in \mathbb{R}$. Proto dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + x^2 - 2x + 4 - \mathrm{e}^x}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2 - x - 2} \left(\frac{x^3 + x^2 - 2x + 4}{\mathrm{e}^x} - 1 \right) = -\infty\,,$$

Protože $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2 - x - 2} = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3 + x^2 - 2x + 4}{\mathrm{e}^x} - 1 \right) = -1$.

Graf funkce $y = f(x)$ tedy nemá v bodě $x = +\infty$ vodorovnou asymptotu. Ale ještě může v bodě $x = +\infty$ existovat šikmá asymptota $y = kx + q$. Pak musí existovat konečná limita $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. V našem případě dostaneme stejně jako dříve

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + x^2 - 2x + 4 - \mathrm{e}^x}{x(x^2 - x - 2)} = -\infty\,.$$

Tedy v bodě $x = +\infty$ nemá graf dané funkce asymptotu.

Podobně budeme postupovat při hledání asymptoty v bodě $x = -\infty$. Protože $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, dostaneme

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + x^2 - 2x + 4 - \mathrm{e}^x}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = -\infty\,.$$

Tedy v bodě $x = -\infty$ nemá graf dané funkce vodorovnou asymptotu.
Budeme tedy hledat šikmou asymptotu $y = kx + q$. Pro směrnici k dostaneme

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + x^2 - 2x + 4 - \mathrm{e}^x}{x(x^2 - x - 2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1\,.$$

Pokud asymptota v bodě $x = -\infty$ existuje, je $y = x + q$. Hodnotu q najdeme jako limitu

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3 + x^2 - 2x + 4 - \mathrm{e}^x}{x^2 - x - 2} - x\right) = \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 + 4 - \mathrm{e}^x}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2\,. \end{aligned}$$

Tedy graf funkce $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x + 4 - \mathrm{e}^x}{x^2 - x - 2}$ má svislé asymptoty $x = -1$ a $x = 2$ a šikmou asymptotu $y = x + 2$ v bodě $x = -\infty$.