Diferenciální počet – příklad 1 s výsledky

Najděte definiční obor funkce $f(x) = \ln\left(\arcsin\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. $\left[D_f = (-1, 0\rangle\,.\right]$

Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^3 + x - 2$, která je rovnoběžná s přímkou $y = 4x - 1$. $\left[4x - y - 4 = 0 \text{ nebo } 4x - y = 0\,.\right]$

Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$, která je kolmá k přímce $2x - 6y + 1 = 0$. $\left[3x + y + 6 = 0\,.\right]$

Najděte rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = x \ln x$, která je rovnoběžná s přímkou $2x - 2y + 3 = 0$. $\left[x - y - 3\mathrm{e}^{-2} = 0\,.\right]$

Najděte rovnice tečen k hyperbole $7x^2 - 2y^2 = 14$, které jsou kolmé k přímce $2x + 4y - 3 = 0$.

$\left[2x - y - 1 = 0 \text{ nebo } 2x - y + 1 = 0\,.\right]$

Najděte rovnice tečen k parabole $y = \frac{1}{2}\,x^2 + 2$, které procházejí bodem $A = [1; 2]$.

$\left[y = 2 \text{ nebo } y = 2x\,.\right]$

Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = 2x^2 - 1$, která prochází bodem $A = [2; 5]$.

$\left[4x - y = 3 \text{ nebo } 12x - y = 19\,.\right]$

Najděte rovnici tečen ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$, které procházejí bodem $A = [-1; 3]$.

$\left[x + y - 2 = 0 \text{ nebo } 9x + y + 6 = 0\,.\right]$

Najděte dvacátou derivaci $f^{(20)}(x)$ pro funkci $f(x) = x^2 \sin x$.

$\left[f^{(20)}(x) = \left(x^2 - 380\right)\sin x - 40x\cos x\,.\right]$

Najděte otevřené intervaly, ve kterých je funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$$

konstantní, a určete hodnotu funkce $f(x)$ na každém z těchto intervalů.

$\Big[$na intervalu $(-\infty, -1)$ je $f(x) = -\frac{3}{4}\,\pi$ a na intervalu $(-1, +\infty)$ je $f(x) = \frac{1}{4}\,\pi\,.\Big]$

Najděte otevřené intervaly, ve kterých je funkce

$$f(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

konstantní, a určete hodnotu funkce $f(x)$ na každém z těchto intervalů.

$\Big[$na intervalu $(-\infty, -1)$ je $f(x) = -\pi$ a na intervalu $(1, +\infty)$ je $f(x) = \pi\,.\Big]$

Najděte otevřené intervaly, ve kterých je funkce

$$f(x) = 2\operatorname{arctg} x - \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

konstantní, a určete hodnotu funkce $f(x)$ na každém z těchto intervalů.

$\Big[$na intervalu $(0, +\infty)$ je $f(x) = 0\,.\Big]$

Určete definiční obor funkce $f(x) = \ln \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ a nalezněte rovnici tečen ke grafu této funkce v bodech $\left[\frac{1}{2}; ?\right]$ a $\left[-\frac{1}{2}; ?\right]$.

$\Big[D_f = (0,1)$; tečna v bodě $\left[\frac{1}{2}, -\ln\sqrt{3}\,\right]$ je $8x - 3y - 4 - 3\ln\sqrt{3} = 0$; $x = -\frac{1}{2} \notin D_f\,.\Big]$

Určete definiční obor funkce $f(x) = \ln \dfrac{3-x^2}{3x^3}$ a nalezněte rovnici tečen ke grafu této funkce v bodech $[2; ?]$ a $[1; ?]$.

$$\left[\begin{array}{l} D_f = \big(-\infty, -\sqrt{3}\big) \cup \big(0, \sqrt{3}\big)\,; \\ x = 2 \notin D_f\,; \quad \text{tečna v bodě } \left[1, \ln\frac{2}{3}\right] \text{ je } 4x + y - 4 - \ln\frac{2}{3} = 0. \end{array}\right]$$

Určete definiční obor funkce $f(x) = \big(\mathrm{e}^2 - x^2\big)^{\sin x}$ a nalezněte rovnici tečen ke grafu této funkce v bodech $[3; ?]$ a $[0; ?]$.

$\Big[D_f = (-\mathrm{e}, \mathrm{e})$; $x = 3 \notin D_f$; tečna v bodě $[0; 1]$ je $2x - y + 1 = 0\,.\Big]$

Určete definiční obor funkce $f(x) = \big(\cos x\big)^{\cosh x} + \operatorname{arctg} 3x$ a nalezněte rovnici tečen ke grafu této funkce v bodech $[0; ?]$ a $\left[\frac{2}{3}\,\pi; ?\right]$.

$$\left[\begin{array}{l} D_f = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \big(-\frac{1}{2}\,\pi + 2k\pi, \frac{1}{2}\,\pi + 2k\pi\big)\,; \\ \text{tečna v bodě } [0; 1] \text{ je } 3x - y + 1 = 0;\ \text{bod } x = \frac{2}{3}\,\pi \notin D_f. \end{array}\right]$$

Určete definiční obor funkce $f(x) = \left(\mathrm{e}^2 - x^2\right)^{\sin x} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}x$ a nalezněte její diferenciály v bodech $x_1 = 0$ a $x_2 = -4$.

$$\left[D_f = (-\mathrm{e}, \mathrm{e});\ \text{diferenciál v bodě } x = 0 \text{ je } \mathrm{d}f(0;h) = \tfrac{5}{2}\,h;\ \text{bod } x = -4 \notin D_f\,.\right]$$

Určete definiční obor funkce $f(x) = \left(\cos x\right)^{2x} + \arccos \frac{1}{2}x$ a nalezněte rovnici normál ke grafu této funkce v bodech $\left[0; ?\right]$ a $\left[\pi; ?\right]$.

$$\left[\begin{array}{l} D_f = \left(-\tfrac{1}{2}\,\pi, \tfrac{1}{2}\,\pi\right);\\ \text{normála v bodě } \left[0; 1 + \tfrac{1}{2}\,\pi\right] \text{ je } 4x - 2y + 2 + \pi = 0;\ \text{bod } x = \pi \notin D_f. \end{array}\right]$$

Určete definiční obor funkce $f(x) = \left(\cos x\right)^{2x} + \arcsin \frac{1}{3}x$ a nalezněte rovnici tečen ke grafu této funkce v bodech $\left[0; ?\right]$ a $\left[2\pi; ?\right]$.

$$\left[D_f = \left(-\tfrac{1}{2}\,\pi; \tfrac{1}{2}\,\pi\right);\ \text{tečna v bodě } [0;1] \text{ je } x - 3y + 3 = 0;\ \text{bod } x = 2\pi \notin D_f\,.\right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 - 2x)^{\cos x}$ v bodě $\left[0; f(0)\right]$.

$$\left[2x + y - 1 = 0\,.\right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \sqrt[2x]{x}$ v bodě $\left[1; f(1)\right]$.

$$\left[x - 2y + 1 = 0\,.\right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^{x(x+1)}$ v bodě $\left[1; f(1)\right]$.

$$\left[2x - y - 1 = 0\,.\right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 - 3x)^{\mathrm{e}^x}$ v bodě $\left[0; f(0)\right]$.

$$\left[3x + y - 1 = 0\,.\right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 + 2\sin x)^{\cos x}$ v bodě $\left[0; f(0)\right]$.

$$\left[2x - y + 1 = 0\,.\right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (\cos x + 2\sin x)^{x+1}$ v bodě $\left[0; f(0)\right]$.

$$\left[2x - y + 1 = 0\,.\right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 - 3\sin x)^{\cos x}$ v bodě $\left[0; f(0)\right]$.

$$\left[3x + y - 1 = 0\,.\right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 + \cos x)^{2\sin x}$ v bodě $\left[\frac{1}{2}\pi; f(\frac{1}{2}\pi)\right]$.

$$\left[2x + y - \pi - 1 = 0\,.\right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 + \operatorname{tg} x)^{x-2}$ v bodě $\left[0; f(0)\right]$.

$$\left[2x + y - 1 = 0\,.\right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 + 2\ln x)^{x}$ v bodě $\left[1; f(1)\right]$.

$$\left[2x - y - 1 = 0\,.\right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (1 + \sin 2x)^{\cos x}$ v bodě $\left[0; f(0)\right]$.

$$\left[2x - y + 1 = 0\,.\right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{x}$ v bodě $\left[\frac{1}{4}\pi; f(\frac{1}{4}\pi)\right]$.

$$\left[\pi x - 2y + 2 - \tfrac{1}{4}\,\pi^2 = 0\,.\right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (\cos x + \sin 2x)^{\cos x}$ v bodě $\left[0; f(0)\right]$.

$$\left[2x - y + 1 = 0\,.\right]$$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = (2\mathrm{e}^{x} - \cos x)^{2x+1}$ v bodě $\left[0; f(0)\right]$.

$$\left[2x - y + 1 = 0\,.\right]$$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (\sin x + 2\cos x)^{x}$ v bodě $\left[\frac{1}{2}\pi; f(\frac{1}{2}\pi)\right]$.

$$\left[2x - 2\pi y + \pi = 0\,.\right]$$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (\sin x + \sin 2x)^{x}$ v bodě $\left[\frac{1}{2}\pi; f(\frac{1}{2}\pi)\right]$.

$$\left[2x - 2\pi y + \pi = 0\,.\right]$$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (\mathrm{e}^{x} - 3\sin x)^{\cos 2x}$ v bodě $\left[0; f(0)\right]$.

$$\left[x - 2y + 2 = 0\,.\right]$$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (x + \ln x)^{2x}$ v bodě $\big[1; f(1)\big]$.

$\Big[x + 4y - 5 = 0\,.\Big]$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x)^{2x-1}$ v bodě $\big[0; f(0)\big]$.

$\Big[x - y + 1 = 0\,.\Big]$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (1 + 2\arcsin x)^{x-2}$ v bodě $\big[0; f(0)\big]$.

$\Big[x - 4y + 4 = 0\,.\Big]$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (1 + x)^{\arccos x}$ v bodě $\big[0; f(0)\big]$.

$\Big[2x + \pi y - \pi = 0\,.\Big]$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (\mathrm{e}^x - 2\sin x)^{1-2x}$ v bodě $\big[0; f(0)\big]$.

$\Big[x - y + 1 = 0\,.\Big]$

Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = (\mathrm{e}^x + \operatorname{tg} x)^{2-x}$ v bodě $\big[0; f(0)\big]$.

$\Big[x + 4y - 4 = 0\,.\Big]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} - \dfrac{1}{x}\Big)$. $\Big[-\frac{1}{2}\,.\Big]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 1}\Big(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\Big)$. $\Big[-\frac{1}{2}\,.\Big]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\Big(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\Big)$. $\Big[\frac{1}{6}\,.\Big]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{1/x^2}$. $\Big[\mathrm{e}^{-1/2}\,.\Big]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 1}\big(x^x - 1\big)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$. $\Big[-\frac{2}{\pi}\,.\Big]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\pi - 2\operatorname{arctg} x)$. $\Big[2\,.\Big]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$. $\left[-2\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2} \cdot \ln x$. $\left[-\frac{2}{\pi}\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\pi - 2\arccos \dfrac{1}{x}\right)$. $\left[2\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\operatorname{arctg} x - x}$. $\left[-\frac{1}{2}\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \arcsin x}{x^3}$. $\left[-\frac{1}{6}\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0_+} (\sin 3x)^{1/\ln x}$. $\left[\mathrm{e}\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$. $\left[\frac{9}{4}\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\sin x}}{x^3}$. $\left[\frac{1}{6}\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos x - \sin x}$. $\left[\mathrm{e}^{-1}\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + \operatorname{tg} 2x}$. $\left[\mathrm{e}^{2}\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to \pi/2} \sin(\cos x) \cdot \operatorname{tg} x$. $\left[1\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$. $\left[\mathrm{e}^{-1}\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^x - 1}{x^2}$. $\left[1\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$. $\left[-\frac{2}{\pi}\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\cos \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$. $\left[\mathrm{e}^{-1/2}\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0_+} \left(\operatorname{cotg} x\right)^{\sin 2x}$. $\left[1\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{tg} t \cdot \cos t^2 \,\mathrm{d}t}{x \sin 2x}$. $\left[\frac{1}{4}\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\displaystyle\int_0^x t(\operatorname{arctg} t)^2 \,\mathrm{d}t}{x\sqrt{x^2+1}}$. $\left[\frac{\pi^2}{8}\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0_+} x \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} \,\mathrm{d}t$. $\left[1\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\displaystyle\int_x^\infty t^{-1}\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t}{\ln(\operatorname{tg} 2x)}$. $\left[-1\,.\right]$

Najděte limitu $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\displaystyle\int_1^x \sqrt{t^2-1} \,\mathrm{d}t\right)^2}{x^4}$. $\left[\frac{1}{4}\,.\right]$

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{\ln(4-x)}{9-x^2}$.

$\left[\text{svislé asymptoty } x = 4 \text{ a } x = -3, \text{ vodorovná asymptota } y = 0 \text{ v } -\infty\,.\right]$

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{x^2-1}$.

$\left[\text{svislé asymptoty } x = -2 \text{ a } x = 0, \text{ vodorovná asymptota } y = 0 \text{ v } +\infty\,.\right]$

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^x$.

$\left[\text{svislé asymptoty } x = \pm 2, \text{ vodorovná asymptota } y = \mathrm{e}^4 \text{ v } \pm\infty\,.\right]$

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{2x^2+5x+3-2x\operatorname{arctg} x}{x+1}$.

$$\left[\begin{array}{l}\text{svislá asymptota } x = -1\,,\\ \text{šikmé asymptoty } y = 2x+3-\pi \text{ v } +\infty \text{ a } y = 2x+3+\pi \text{ v } -\infty\,.\end{array}\right]$$

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{3x^3+2x^2-12x-8+\mathrm{e}^{-x}}{x^2+x-6}$.

$\left[\text{svislé asymptoty } x = 2 \text{ a } x = -3\text{, šikmá asymptota } y = 3x - 1 \text{ v } +\infty\,.\right]$

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

$\left[\text{svislé asymptoty } x = \pm 1\text{, šikmé asymptoty } y = 4x \text{ v } +\infty \text{ a } y = -4x \text{ v } -\infty\,.\right]$

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = x \ln\left(\mathrm{e} + \dfrac{1}{x}\right)$.

$\left[\text{svislá asymptota } x = -\mathrm{e}^{-1}\text{, šikmá asymptota } y = x + \mathrm{e}^{-1} \text{ v } \pm\infty\,.\right]$

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x - x^2}}$.

$\left[\text{svislá asymptota } x = 0\,.\right]$

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

$\left[\text{šikmé asymptoty } y = -x \text{ v } \pm\infty\,.\right]$

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$.

$\left[\text{šikmé asymptoty } y = x + \tfrac{1}{3} \text{ v } \pm\infty\,.\right]$

Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - 1}{x^2 - x}$.

$\left[\text{svislé asymptoty } x = 0 \text{ a } x = 1\,.\right]$
