Diferenciální počet – **příklad 2 s výsledky**

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$.

$\left[\begin{array}{l}\text{rostoucí v intervalech } (-\infty, -1) \text{ a } \left(\frac{7}{5}, +\infty\right)\text{; klesající v intervalu } \left(-1, \frac{7}{5}\right)\,; \\ \text{v bodě } x = \frac{7}{5} \text{ je lokální minimum } -\frac{1}{24}\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{(x-2)^2}$.

$\left[\begin{array}{l}\text{klesající v intervalech } \left(-\infty, -\frac{7}{4}\right) \text{ a } \left(2, +\infty\right)\text{; rostoucí v intervalu } \left(-\frac{7}{4}, 2\right)\,; \\ \text{v bodě } x = -\frac{7}{4} \text{ je lokální minimum } -\frac{1}{15}\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.

$\left[\begin{array}{l}\text{rostoucí v intervalu } \left\langle 0, \frac{1}{2}\right)\text{; klesající v intervalu } \left(\frac{1}{2}, 1\right\rangle\,; \\ \text{v bodě } x = \frac{1}{2} \text{ je lokálaní maximum } \frac{1}{2}\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x\sqrt[3]{1-x}$.

$\left[\begin{array}{l}\text{rostoucí v intervalu } \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)\text{; klesající v intervalu } \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)\,; \\ \text{v bodě } x = \frac{3}{4} \text{ je lokálaní maximum } \frac{3}{8}\sqrt[3]{2}\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \sqrt{x}\,\ln x$.

$\left[\begin{array}{l}\text{klesající v intervalu } \left(0, \mathrm{e}^{-2}\right)\text{; rostoucí v intervalu } \left(\mathrm{e}^{-2}, +\infty\right)\,; \\ \text{v bodě } x = \mathrm{e}^{-2} \text{ je lokální minimum } -2\mathrm{e}^{-1}\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$.

$\left[\begin{array}{l}\text{klesající v intervalech } (0, 1) \text{ a } \left(\mathrm{e}^2, +\infty\right)\text{; rostoucí v intervalu } \left(1, \mathrm{e}^2\right)\,; \\ \text{v bodě } x = 1 \text{ je lokální minimum } 0\text{; v bodě } x = \mathrm{e}^2 \text{ je lokální maximum } 4\mathrm{e}^{-2}\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x\ln^2 x$.

$\left[\begin{array}{l}\text{rostoucí na intervalech } \left(0, \mathrm{e}^{-2}\right) \text{ a } (1, +\infty)\text{; klesající na intervalu } \left(\mathrm{e}^{-2}, 1\right)\,; \\ \text{v bodě } x = \mathrm{e}^{-2} \text{ je lokální maximu } 4\mathrm{e}^{-2}\text{; v bodě } x = 1 \text{ je lokální minimum } 0\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$.

$\left[\text{klesající na } \mathbb{R}\text{; nemá lokální extrémy.}\right]$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \ln \dfrac{3-x}{|x+5|}$.

$\left[\text{rostoucí na intervalech } (-\infty,-5) \text{ a } (-5,3)\text{; nemá lokální extrémy.}\right]$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

$\left[\begin{array}{l}\text{rostoucí na intervalu } (-\infty,1)\text{; klesající na intervalu } (1,+\infty)\,;\\ \text{v bodě } x=1 \text{ je lokální maximum } \frac{1}{4}\,\pi - \ln\sqrt{2}\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 e^{-x}$.

$\left[\begin{array}{l}\text{rostoucí v intervalu } (-\infty,3)\text{; klesající v intervalu } (3,+\infty)\,;\\ \text{v bodě } x=3 \text{ je lokální maximum } 27e^{-3}\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{1-x}$.

$\left[\begin{array}{l}\text{klesající v intervalech } (-\infty,0),\ \left(0,\frac{2}{3}\right) \text{ a } (2,\infty)\text{; rostoucí v intervalech } \left(\frac{2}{3},1\right) \text{ a } (1,2)\,;\\ \text{v bodě } x=\frac{2}{3} \text{ je lokální minimum } 9\text{; v bodě } x=2 \text{ je lokální maximum } 1\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x^2}$.

$\left[\begin{array}{l}\text{klesající v intervalu } \left(0,\sqrt{2}\right)\text{; rostoucí v intervalu } \left(\sqrt{2},+\infty\right)\,;\\ \text{v bodě } x=\sqrt{2} \text{ je lokální minimum } \frac{1}{2}\,(1+\ln 2)\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x e^{-x^2+x}$.

$\left[\begin{array}{l}\text{klesající v intervalech } (-\infty,-1) \text{ a } \left(\frac{1}{2},+\infty\right)\text{; rostoucí v intervalu } \left(-1,\frac{1}{2}\right)\,;\\ \text{v bodě } x=-1 \text{ je lokální minimum } -e^{-2}\text{, v bodě } x=\frac{1}{2} \text{ je lokální maximum } \frac{1}{2}\,\sqrt[4]{e}\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$.

$\left[\begin{array}{l}\text{klesající v intervalech } (-\infty,0) \text{ a } (1,3)\text{; rostoucí v intervalech } (0,1) \text{ a } (3,+\infty)\,;\\ \text{v bodě } x=0 \text{ je lokální minimum } 9\text{; v bodě } x=1 \text{ je lokální maximum } 4e\,;\\ \text{v bodě } x=3 \text{ je lokální minimum } 0\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x e^{-\sqrt{x}}$.

$\left[\begin{array}{l}\text{rostoucí v intervalu } \langle 0,4)\text{; klesající v intervalu } (4,+\infty)\,;\\ \text{v bodě } x=4 \text{ je lokální maximum } 4e^{-2}\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l}\text{konkávní v intervalech } \big(-\infty, -\sqrt{3}\big) \text{ a } \big(0, \sqrt{3}\big)\,; \\ \text{konvexní v intervalech } \big(-\sqrt{3}, 0\big) \text{ a } \big(\sqrt{3}, +\infty\big)\,; \\ \text{inflexní body jsou } x = \pm\sqrt{3} \text{ a } x = 0\,.\end{array}\right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l}\text{konvexní v intervalech } (-\infty, -1) \text{ a } (0, 1)\,; \\ \text{konkávní v intervalech } (-1, 0) \text{ a } (1, +\infty)\,; \\ \text{inflexní bod je } x = 0\,.\end{array}\right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \ln(1+x^3)$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l}\text{konkávní v intervalech } (-1, 0) \text{ a } \big(\sqrt{2}, +\infty\big)\text{; konvexní v intervalu } \big(0, \sqrt{2}\big)\,; \\ \text{inflexní body jsou } x = 0 \text{ a } x = \sqrt{2}\,.\end{array}\right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = x\sin(\ln x)$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l}\text{konkávní v intervalech } \big(\mathrm{e}^{(1/4+2k)\pi}, \mathrm{e}^{(5/4+2k)\pi}\big),\ k \in \mathbb{Z}\,; \\ \text{konvexní v intervalech } \big(\mathrm{e}^{(5/4+2k)\pi}, \mathrm{e}^{(9/4+2k)\pi}\big),\ k \in \mathbb{Z}\,; \\ \text{inflexní body } x = \mathrm{e}^{(1/4+k)\pi},\ k \in \mathbb{Z}\,.\end{array}\right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l}\text{konkávní v intervalech } (0, 1) \text{ a } \big(\mathrm{e}^2, +\infty\big)\text{; konvexní v intervalu } \big(1, \mathrm{e}^2\big)\,; \\ \text{inflexní bod je } x = \mathrm{e}^2\,.\end{array}\right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$$\left[\begin{array}{l}\text{konvexní v intervalech } (-\infty, 0) \text{ a } (8, +\infty)\text{; konkávní v intervalu } (0, 8)\,; \\ \text{inflexní body jsou } x = 0 \text{ a } x = 8\,.\end{array}\right]$$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \ln\dfrac{|x-1|}{x+3}$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$\left[\begin{array}{l}\text{konvexní v intervalu } (-3,-1)\text{; konkávní v intervalech } (-1,1) \text{ a } (1,+\infty)\,; \\ \text{inflexní bod je } x=-1\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$\left[\begin{array}{l}\text{konkávní v intervalu } \left(0,\mathrm{e}^{3/2}\right)\text{; konvexní v intervalu } \left(\mathrm{e}^{3/2},+\infty\right)\,; \\ \text{inflexní bod je } x=\mathrm{e}^{3/2}\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$\left[\begin{array}{l}\text{konvexní v intervalu } (0,2)\text{; konkávní v intervalu } (2,+\infty)\,; \\ \text{inflexní bod je } x=2\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = x\ln^2 x$ konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body této funkce.

$\left[\begin{array}{l}\text{konkávní v intervalu } \left(0,\mathrm{e}^{-1}\right)\text{; konvexní v intervalu } \left(\mathrm{e}^{-1},+\infty\right)\,; \\ \text{inflexní bod je } x=\mathrm{e}^{-1}\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ konvexní, resp. konkávní, a určete její inflexní body.

$\left[\begin{array}{l}\text{konkávní v intervalech } (-\infty,0) \text{ a } (2,+\infty)\text{; konvexní v intervalu } (0,2)\,; \\ \text{inflexní body } x=0 \text{ a } x=2\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2+t}\,\mathrm{d}t$ konvexní, resp. konkávní, a určete její inflexní body.

$\left[\begin{array}{l}\text{konkávní v intervalech } \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \text{ a } (1,+\infty)\text{; konvexní v intervalu } \left(-\frac{1}{2},1\right)\,; \\ \text{inflexní body } x=-\frac{1}{2} \text{ a } x=1\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ konvexní, resp. konkávní, a určete její inflexní body.

$\left[\begin{array}{l}\text{konvexní v intervalu } (0,4)\text{; konkávní v intervalu } (4,+\infty)\,; \\ \text{inflexní bod } x=4\,.\end{array}\right]$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{\ln t}$, $x > 1$, konvexní, resp. konkávní, a určete její inflexní body.

$\left[\begin{array}{l}\text{konkávní v intervalu } (1, \mathrm{e}); \text{ konvexní v intervalu } (\mathrm{e}, +\infty)\,; \\ \text{inflexní bod } x = \mathrm{e}\,. \end{array}\right]$

Najděte intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t - t^2}\,\mathrm{d}t$, $0 < x < 1$, konvexní, resp. konkávní, a určete její inflexní body.

$\left[\begin{array}{l}\text{konvexní v intervalu } \left(0, \frac{1}{2}\right); \text{ konkávní v intervalu } \left(\frac{1}{2}, 1\right)\,; \\ \text{inflexní bod } x = \frac{1}{2}\,. \end{array}\right]$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \ln(1 + x^2)$ v jejích inflexních bodech.

$\left[x - y - 1 + \ln 2 = 0 \text{ v bodě } [1; \ln 2];\ x + y + 1 - \ln 2 = 0 \text{ v bodě } [-1; \ln 2]\,.\right]$

Najděte rovnice tečen ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ v jejích inflexních bodech.

$\left[x + \mathrm{e}^3 y - 2\mathrm{e}^{3/2} = 0 \text{ v bodě } \left[\mathrm{e}^{3/2}; \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-3/2}\right]\,.\right]$

Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$ v jejích inflexních bodech.

$\left[x - 4y + 4\ln 2 = 0 \text{ v bodě } \left[2; \frac{1}{2} + \ln 2\right]\,.\right]$

Najděte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která je funkce $f(x) = 2x^2 + \ln|x|$ současně rostoucí a konkávní.

$\left[x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\,.\right]$

Najděte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která je funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 6x}$ současně rostoucí a konvexní.

$\left[x \in (3, 6)\,.\right]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$ na intervalu $\langle 0, 4\rangle$.

$\left[\text{maximum } 2 \text{ pro } x = 0; \text{ minimum } -\frac{1}{24} \text{ pro } x = \frac{7}{5}\,.\right]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{(x-2)^2}$ na intervalu $\langle -4, 1\rangle$.

$\left[\text{maximum } 8 \text{ pro } x = 1; \text{ minimum } -\frac{1}{15} \text{ pro } x = -\frac{7}{4}\,.\right]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = (x-1)^2\mathrm{e}^{-|x|}$ na intervalu $\langle -3, 2\rangle$.

$\left[\text{maximum } 4\mathrm{e}^{-1} \text{ pro } x = -1; \text{ minimum } 0 \text{ pro } x = 1\,.\right]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = (x+1)^2 \mathrm{e}^{|x-1|}$ na intervalu $\langle -2, 3\rangle$.

$\Big[$maximum $16\mathrm{e}^2$ pro $x = 3$; minimum 0 pro $x = -1$.$\Big]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \ln x + \dfrac{2}{x}$ na intervalu $\langle 1, \mathrm{e}^2\rangle$.

$\Big[$maximum $2 + 2\mathrm{e}^{-1}$ pro $x = \mathrm{e}^2$; minimum $1 + \ln 2$ pro $x = 2$.$\Big]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \operatorname{arccotg} |x^2 - 2x - 8|$ na intervalu $\langle -3, 2\rangle$. $\Big[$maximum $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{1}{2}\pi$ pro $x = -2$; minimum $\operatorname{arctg} 9$ pro $x = 1$.$\Big]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$ na intervalu $\langle -1, 2\rangle$.

$\Big[$maximum $\sqrt[3]{2}$ pro $x = -1$, minimum $-\sqrt[3]{4}$ pro $x = 2$.$\Big]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = x - |\sin 2x|$ na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

$\Big[$maximum π pro $x = \pi$, minimum $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ pro $x = \frac{\pi}{6}$.$\Big]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = x + |\sin 2x|$ na intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$.

$\Big[$maximum $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ pro $x = \frac{\pi}{3}$, minimum $-\frac{\pi}{2}$ pro $x = -\frac{\pi}{2}$.$\Big]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \left|\mathrm{e}^{-x} \sin x\right|$ na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

$\Big[$maximum $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-\pi/4}$ pro $x = \frac{\pi}{4}$, minimum 0 v bodech $x = 0$, $x = \pi$ a $x = 2\pi$.$\Big]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \left|\mathrm{e}^{-x} \cos x\right|$ na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$.

$\Big[$maximum e^{π} pro $x = -\pi$, minimum 0 pro $x = \pm\frac{\pi}{2}$.$\Big]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = x \ln^2 x$ na intervalu $\left\langle \mathrm{e}^{-3}, \mathrm{e}\right\rangle$.

$\Big[$maximum e pro $x = \mathrm{e}$; minimum 0 pro $x = 1$.$\Big]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = 2x + \mathrm{e}^{-x}$ na intervalu $\langle -2, 3\rangle$.

$\Big[$maximum $6 + \mathrm{e}^{-3}$ pro $x = 3$; minimum $2(1 - \ln 2)$ pro $x = -\ln 2$.$\Big]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ na intervalu $\left\langle \mathrm{e}, \mathrm{e}^3 \right\rangle$.

$\Big[$maximum $4\mathrm{e}^{-2}$ pro $x = \mathrm{e}^2$; minimum e^{-1} pro $x = \mathrm{e}\,.\Big]$

Najděte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = x \sin(\ln x)$ na intervalu $\left\langle 1, \mathrm{e}^\pi \right\rangle$.

$\Big[$maximum $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{3\pi/4}$ pro $x = \mathrm{e}^{3\pi/4}$; minimum 0 pro $x = 1$ a $x = \mathrm{e}^\pi\,.\Big]$

Pro které číslo x je jeho součet s jeho druhou mocninou minimální? $\Big[x = -\frac{1}{2}\,.\Big]$

Pro které kladné číslo x je jeho součet s jeho převrácenou hodnotou $\dfrac{1}{x}$ minimální?

$\Big[x = 1\,.\Big]$

Pro které kladné číslo x je jeho rozdíl s jeho druhou odmocninou minimální? $\Big[x = \frac{1}{4}\,.\Big]$

Najděte čísla x, $y \in \langle 0, 1\rangle$, taková, že $x + y = 1$, pro která je výraz $x^2 y^3$ největší.

$\Big[x = \frac{2}{5}$ a $y = \frac{3}{5}\,.\Big]$

Na hyperbole $\frac{1}{2}\,x^2 - y^2 = 1$ najděte bod, který je nejblíž bodu $A = [3; 0]$.

$\Big[$body $[2; 1]$ a $[2; -1]\,.\Big]$

Který obdélník vepsaný do půlkruhu s poloměrem R má největší obsah?

$\Big[$strany obdélníka jsou $\sqrt{2}\,R$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}\,R\,.\Big]$

Najděte kvádr se čtvercovou podstavou, který má při daném objemu V nejmenší povrch.

$\Big[$krychle se stranou $\sqrt[3]{V}\,.\Big]$

Který válec má při daném objemu V nejmenší povrch?

$\Big[$poloměr podstavy je $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ a výška $v = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r\,.\Big]$

Který válec má při daném povrchu S největší objem?

$\Big[$poloměr podstavy je $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ a výška $v = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}} = 2r\,.\Big]$

Najděte pravoúhlý trojúhelník, ve kterém je součet přepony a jedné odvěsny roven jedné a která má největší obsah. $\left[\text{odvěsny jsou } a = \frac{1}{3} \text{ a } b = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ a přepona } c = \frac{2}{3}\,.\right]$
