

Posloupnosti a řady – příklad 5 s výsledky

Najděte limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 + n + 1})$. [$\frac{1}{2}$.]

Najděte limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n + 2} \sin n^2}{n + 1}$. [0.]

Najděte limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}) \cos n!$. [0.]

Najděte limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n + 1} - \sqrt{2n - 1}) \sin e^n$. [0.]

Najděte limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - 2n}{2n}\right)^{-n} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n(n + 1)})$. [0.]

Najděte limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \dots + \frac{2n - 1}{n^2}\right)$. [1.]

Najděte limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n + 3} - \frac{n}{2}\right)$. [-1.]

Najděte limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2})$. [2.]

Dokažte, že existuje limita posloupnosti $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdot \dots \cdot \frac{n + 9}{2n - 1}$.
[posloupnost je klesající a zdola omezená nulou.]

Dokažte, že existuje limita posloupnosti $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{8}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
[posloupnost je klesající a zdola omezená nulou.]

Dokažte, že existuje limita posloupnosti $a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \dots \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$.
[posloupnost je klesající a zdola omezená nulou.]

Nechť je posloupnost a_n definována vztahy $a_1 = -1$ a $a_{n+1} = \frac{2n - 1}{2n} a_n$. Dokažte, že existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
[posloupnost je rostoucí a shora omezená nulou.]

Nechť je posloupnost a_n definována vztahy $a_1 = 10$ a $a_{n+1} = \left(\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\right)^{n-3} a_n$.

Dokažte, že existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

[posloupnost je pro $n > 4$ klesající a zdola omezená nulou.]

Najděte všechny hromadné body posloupnosti $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n+2} \cos \frac{\pi n}{3}$.

[$\{\pm e^6, \pm \frac{1}{2} e^6\}$.]

Najděte všechny hromadné body posloupnosti $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}\right)^{n+1} \sin \frac{\pi n}{2}$.

[$\{0, \pm \sqrt{e}\}$.]

Najděte všechny hromadné body posloupnosti

$$a_n = (-1)^{n(n+1)/2} \left(\sqrt{n^2 + 2n + 2} - \sqrt{n^2 - (-1)^n n + 1} \right).$$

[$\{\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\}$.]

Najděte $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ a $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ pro posloupnost $a_n = (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{3n^3 + 2n^2 + 1}}{n\sqrt{2n-1}}$.

[$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\sqrt{\frac{3}{2}}$.]

Nalezněte $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ a $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ pro posloupnost $a_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$.

[$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$; $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$.]

Nalezněte $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ a $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ pro posloupnost $a_n = \left(\frac{1-n}{n}\right)^n + \sin \frac{2n\pi}{3}$.

[$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-1} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -e^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.]

Najděte $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ a $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ pro posloupnost $a_n = \left(\frac{n+2+(-1)^n}{n-1}\right)^{1-2n}$.

[$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-4}$; $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-8}$.]

Najděte $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ a $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ pro posloupnost $a_n = \left(\frac{3 - (-1)^n - 2n}{2n - 3} \right)^{3n-2}$.

$$\left[\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{3/2}; \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -e^{-3/2}. \right]$$

Najděte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

$$\left[\frac{1}{3}. \right]$$

Najděte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

$$\left[\frac{1}{2}. \right]$$

Najděte součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$.

$$\left[1 - \sqrt{2}. \right]$$

Najděte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)$.

$$\left[\ln 2. \right]$$

Určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n(x-1)}}{2^n}$, a najděte její součet.

$$\left[x < 1 + \ln 2; s = \frac{2}{2 - e^{x-1}}. \right]$$

Určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n}(x-4)^n$, a najděte její součet.

$$\left[2 < x < 6; s = \frac{2(x-4)}{6-x}. \right]$$

Určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^n$, a najděte její součet.

$$\left[x < 0; s = -\frac{1}{2}(x+1). \right]$$

Určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} \left(\frac{2-x}{x+1} \right)^n$, a najděte její součet.

$$\left[1 < x < 5; s = \frac{x+1}{6(x-1)}. \right]$$

Určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{2x+1}{1-x} \right)^n$, a najděte její součet.

$$\left[x < \frac{1}{4}; s = \frac{1+2x}{1-4x}. \right]$$

Určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n e^{2nx}$, a najděte její součet.

$$\left[x < -\frac{1}{2} \ln 2; s = \frac{1}{1 - 2e^{2x}} \right]$$

Určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \operatorname{tg}^{2n} x$, a najděte její součet.

$$\left[x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{1}{6} \pi + k\pi, \frac{1}{6} \pi + k\pi \right); s = \frac{1}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} \right]$$

Určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin^n 2x$, a najděte její součet.

$$\left[x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{1}{12} \pi + \frac{1}{2} k\pi, \frac{1}{12} \pi + \frac{1}{2} k\pi \right); s = \frac{2 \sin 2x}{1 - 2 \sin 2x} \right]$$

Určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - x^2)^n$, a najděte její součet.

$$\left[x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2}); s = x^{-2} \right]$$

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{2^{n^2}}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n n^{2n}}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^{2n}}{(2n)!}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}) (\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \dots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{n(n-1)}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n-n^2}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-2n}{3-2n} \right)^{2n^2}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2n^2+n+1}}{\sqrt[3]{8n^3+3n^2+2}} \right)^n$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{4n^2+2n+3}}{\sqrt[3]{3n^3+4n^2+5}} \right)^n$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^4}{(2+1/n)^{n-1}}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+3}}{(2n-1)^n}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{n/2}}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^{n-1} + 2^{n+1}}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 + \sin 2n}{3 + \sin 2n} \right)^n$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^{2n} n}{(1 + \cos^2 n)^n}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^n n}{2^n}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 4n - 1}}{\sqrt{n^3 + 3n^2 + 2}}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n + 1}}{\sqrt{n^4 + n^3 + 2n + 2}}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 - 2n^2 + n + 5}}{n\sqrt{n^3 + 3n + 2}}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{\sqrt{2n^3 + 3n^2 + 5}}{\sqrt[3]{n^4 + 3n^2 + 2}}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 2n^2 + 3}}{\sqrt{n^2 - n + 1} \sqrt[3]{n^4 + n^2 + 3}}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n - 2}}{\sqrt{n^3 + 3n^2 + 2} \sqrt[4]{n^3 + n + 3}}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 3n + 2}}{\sqrt{n^2 + 1} \sqrt[3]{n^2 + n + 2}}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-1)\sqrt{2n+1}}{(2n-1)\sqrt{n^4+n^2+1}}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$. [konverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+n+1}}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(2+n^{-1})^n}$. [diverguje.]

Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{-2n-3}$. [diverguje.]

Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{2^{2n} n!}$. [konverguje absolutně.]

Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2n}{2-3n}\right)^{n+1}$. [konverguje absolutně.]

Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2n}{2-3n}\right)^{2-n}$. [diverguje.]

Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{(n+1)\sqrt{n}}$. [konverguje neabsolutně.]

Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$.
[konverguje neabsolutně.]

Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+5}$.
[konverguje neabsolutně.]

Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n+3}}$. [diverguje.]

Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\ln n}}$.
[konverguje neabsolutně.]

Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n^2}$.
[konverguje absolutně.]

Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2} \operatorname{arctg} n}{n\sqrt{n+1}}$.
[konverguje absolutně.]

Určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n}$.
[$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\langle -\frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{1}{6}\pi + 2k\pi \rangle \cup (\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{7}{6}\pi + 2k\pi))$.]

Určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n \cos^{2n} x}{n(n+1)}$.
[$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle \frac{1}{4}\pi + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi \rangle$.]

Najděte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{x^n}$.
[$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.]

Najděte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$.
[$\langle 0, +\infty \rangle$].

Určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \left(\frac{x}{1+x} \right)^n$.
[$(-\frac{1}{2}, +\infty)$].

Najděte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2-n} e^{-nx}$.
[$(-2, +\infty)$].

Určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která absolutně konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \operatorname{tg}^n x$.
[$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{1}{4}\pi + k\pi, \frac{1}{4}\pi + k\pi)$].

Najděte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} x^n$.
[$R = 1$].

Najděte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2} x^{2n}$.
[$R = \infty$].

Najděte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + n^2 + 1}{(2+n^{-1})^n} x^n$.
[$R = 2$].

Najděte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n-3}{2n+3} \right)^{n(n+1)/2} x^{2n}$.
[$R = e^{3/4}$].

Najděte poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n} \right)^n x^n$.
[$R = \frac{3}{2}$].

Najděte interval konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{n} (x+1)^n$.
[$(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$].

Najděte interval konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \left(\frac{2x+1}{3} \right)^{2n}$.
[$(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$].

Najděte interval konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n^2} (x+2)^{2n}$. $\left[(-2 - e^{-1}, -2 + e^{-1})\right]$

Najděte interval konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \left(\frac{3x+2}{4}\right)^n$. $\left[\left\langle -2, \frac{2}{3} \right\rangle\right]$

Najděte interval konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \left(\frac{2x-3}{2}\right)^n$. $\left[\left\langle \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle\right]$

Najděte interval konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n} (x-2)^n$. $\left[(2 - e, 2 + e)\right]$

Najděte interval konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n)!}{n^n} (x+3)^n$. $\left[\{-3\}\right]$
