

Přednáška 1.

Definice 1.1. Nechť je M množina. Funkci $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme *metrikou*, jestliže má následující vlastnosti:

- (1) pro každé $x \in M$ je $\rho(x, x) = 0$;
- (2) pro každé $x, y \in M$, $x \neq y$, je $\rho(x, y) = \rho(y, x) > 0$;
- (3) pro každé $x, y, z \in M$ platí $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Množinu M , na které je definována metrika, nazýváme *metrický prostor*. Pokud budeme chtít zdůraznit, že M je metrický prostor s metrikou ρ , budeme psát (M, ρ) .

Definice 1.2. Nechť je (M, ρ) metrický prostor a $x_0 \in M$. Pro každé $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu všech $x \in M$, pro která je $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ *okolím bodu* x_0 (přesněji *otevřeným ε -ovým okolím* bodu x_0). ε -ové okolí bodu x_0 budeme značit $U_\varepsilon(x_0)$.

Množinu všech bodů $x \in M$, pro která je $0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon$ nazýváme *prstencové okolí bodu* x_0 a budeme jej značit $P_\varepsilon(x_0)$.

Definice 1.3. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $X \subset M$. Bod $x \in X$ nazveme *vnitřní bod* množiny X právě tehdy, když existuje okolí $U_\varepsilon(x)$ takové, že $U_\varepsilon(x) \subset X$. Množinu všech vnitřních bodů množiny $X \subset M$ nazýváme *vnitřkem množiny* M a značíme X° .

Definice 1.4. Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Množina $X \subset M$ se nazývá *otevřená* právě tehdy, je-li každý bod $x \in X$ vnitřním bodem množiny X , tj. právě tehdy, když $X = X^\circ$.

Definice 1.5. Nechť (M, ρ) a (M, σ) jsou metrické prostory. Jestliže existují reálná čísla a a b , $0 < a \leq b$ taková, že pro každé $x, y \in M$ platí $a\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq b\rho(x, y)$ nazveme metriky ρ a σ *ekvivalentní*.

Definice 1.6. Nechť je (M, ρ) metrický prostor a $X \subset M$. Bod $x \in M$ nazýváme *hromadný bod* množiny X právě tehdy, když každé prstencové okolí $P_\varepsilon(x)$ obsahuje alespoň jeden bod množiny X . Množinu všech hromadných bodů množiny X budeme značit $\text{der } X$.

Definice 1.7. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $X \subset M$. Pak množinu $\overline{X} = X \cup \text{der } X$ nazýváme *uzávěr množiny* X .

Definice 1.8. Podmnožina X metrického prostoru (M, ρ) se nazývá *uzavřená* právě tehdy, když obsahuje všechny své hromadné body, tj. právě když $X = \overline{X}$.

Definice 1.9. Nechť je (M, ρ) metrický prostor a $X \subset M$. *Hranicí množiny* X nazýváme množinu $\partial X = \overline{X} \cap \overline{M \setminus X}$. Bod $x \in \partial X$ se nazývá *hraniční bod* množiny X .

Definice 1.10. Nechť je (M, ρ) metrický prostor a $X \subset M$ je neprázdná. *Průměrem množiny X* nazýváme číslo

$$\text{dia}(X) = \sup_{x, y \in X} \rho(x, y).$$

Je-li $X = \emptyset$, klademe $\text{dia}(X) = 0$.

Množina $X \subset M$ se nazývá *omezená*, je-li $\text{dia}(X) < \infty$.

Definice 1.11. Nechť je (M, ρ) metrický prostor. Množina $X \subset M$ se nazývá *nesouvislá* právě tehdy, když existují podmnožiny $A, B \subset X$ takové, že $X = A \cup B$ a $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Množina $X \subset M$ se nazývá *souvislá* právě tehdy, když není nesouvislá.

Definice 1.12. *Vzdáleností* dvou neprázdných podmnožin X a Y metrického prostoru (M, ρ) nazýváme číslo

$$\text{dist}(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \rho(x, y).$$

Definice 1.13. Nechť je V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Zobrazení $\nu : V \rightarrow \mathbb{R}$, pro které platí:

- (1) $\nu(x) \geq 0$
- (2) $\nu(x) = 0 \implies x = 0$
- (3) $\nu(ax) = |a|\nu(x)$
- (4) $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$

se nazývá *norma*. Vektorový prostor V , na kterém je definována norma se nazývá *normovaný prostor*. Jestliže chceme zdůraznit, že V je normovaný prostor s normou ν , budeme psát (V, ν) .

Definice 1.14. Dvě normy ν_1 a ν_2 vektorového prostoru V se nazývají *ekvivalentní*, jestliže existují $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \leq b$, takové, že $a\nu_1(x) \leq \nu_2(x) \leq b\nu_1(x)$.

Definice 1.15. Nechť je V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Pak funkci $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, která má pro každé $x, y, z \in V$ a $a, b \in \mathbb{R}$ vlastnosti:

- (1) $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$,
- (2) $(x, y) = (y, x)$,
- (3) $(x, x) \geq 0$,
- (4) $(x, x) = 0 \iff x = 0$

nazýváme *skalární součin*. Často se značí $(x, x) = \|x\|^2$.

Definice 1.16. Nechť je V vektorový prostor a $x, y \in V$. Množina všech bodů $z = x + (y - x)t$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ se nazývá *úsečka* z bodu x do bodu y . Bod x je *počáteční bod* a y *koncový bod* této úsečky.

Definice 1.17. Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá *konvexní*, jestliže pro každé dva body $x, y \in M$ leží celá úsečka z bodu x do bodu y v množině M , tj. pro každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$ je $x + (y - x)t \in M$.

Definice 1.18. Podmnožina $M \subset \mathbb{R}^n$ s metrikou generovanou normou ν_p se nazývá *kompaktní*, jestliže je omezená a uzavřená.

Přednáška 2.

Definice 2.1. *Posloupností* v metrickém prostoru M nazýváme každé zobrazení $f : \mathbb{N} \rightarrow M$.

Definice 2.2. Posloupnost x_n v metrickém prostoru (M, ρ) se nazývá *omezená* právě tehdy, když je omezená množina $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, tj. když existuje $x \in M$ a $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\rho(x, x_n) < K$.

Definice 2.3. Nechť je x_n posloupnost a $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$, $k_i \in \mathbb{N}$. Pak posloupnost $y_n = x_{k_n}$ nazýváme *vybranou posloupností* z posloupnosti x_n .

Definice 2.4. Nechť je x_n posloupnost v metrickém prostoru (M, ρ) . Prvek $x \in M$ se nazývá *limitou posloupnosti* x_n právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x_n) = 0$, tj. když se každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ je $\rho(x, x_n) < \varepsilon$. Jestliže je x limitou posloupnosti x_n , píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ a říkáme, že posloupnost x_n konverguje k prvku x .

Posloupnosti x_n , které mají limitu se nazývají *konvergentní* a posloupnosti, jejichž limita neexistuje nazýváme *divergentní* posloupnosti.

Definice 2.5. Nechť je $f_n(x)$ posloupnost omezených funkcí na množině $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $f_n(x)$ *konverguje bodově* k funkci $f(x)$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ a pro každé $x \in M$ existuje $n_0(x)$ takové, že pro každé $n > n_0(x)$ je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Bodovou konvergenci posloupnosti funkcí $f_n(x)$ k funkci $f(x)$ budeme značit $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Definice 2.6. Nechť je $f_n(x)$ posloupnost omezených funkcí na množině $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně* k funkci $f(x)$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $x \in M$ a pro každé $n > n_0$ je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $f_n(x)$ k funkci $f(x)$ budeme značit $f_n(x) \Rightarrow f(x)$.

Definice 2.7. Posloupnost x_n v metrickém prostoru M se nazývá *Cauchyovská* právě tehdy, když splňuje *Cauchy-Bolzanovu podmínku*: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna $m, n > n_0$ platí nerovnost $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Definice 2.8. Metrický prostor (M, ρ) se nazývá *úplný*, má-li každá Cauchyovská posloupnost x_n v M limitu v M .

Přednáška 3.

Definice 3.1. Nechť $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení metrického prostoru (X, ρ) do metrického prostoru (Y, σ) . Nechť a je hromadný bod X . Řekneme, že $A \in Y$ je *limitou* zobrazení f a bodě a , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in X$, $\rho(a, x) < \delta$, $x \neq a$, je $\sigma(A, f(x)) < \varepsilon$.

Definice 3.2. Nechť $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení metrického prostoru (X, ρ) do metrického prostoru (Y, σ) a $M \subset X$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě a , který je hromadný bod množiny M *limitu A vzhledem k množině M* právě tehdy, když má funkce $\hat{f} = f|_M$ v bodě a limitu A . Pak píšeme $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = A$.

Definice 3.3. Nechť je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, kde $X \subset \mathbb{R}^n$, je funkce n proměnných a a je hromadný bod množiny X . Řekneme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě a *limitu plus nekonečno*, resp. *limitu minus nekonečno*, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje prstencové okolí $P_\delta(a)$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in X \cap P_\delta(a)$ je $f(\mathbf{x}) > K$, resp. $f(\mathbf{x}) < K$. Pak píšeme $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow a} f(\mathbf{x}) = +\infty$, resp. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow a} f(\mathbf{x}) = -\infty$.

Definice 3.4. Nechť $f : M \rightarrow S$ je zobrazení metrického prostoru (M, ρ) do metrického prostoru (S, σ) . Řekneme, že zobrazení f je *spojité v bodě $a \in M$* , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in M$, pro které je $\rho(a, x) < \delta$, platí nerovnost $\sigma(f(a), f(x)) < \varepsilon$.

Definice 3.5. Nechť je $f : M \rightarrow S$ zobrazení metrického prostoru M do metrického prostoru S a nechť $X \subset M$. Říkáme, že zobrazení f je *spojité v bodě $a \in X$ vzhledem k množině X* , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in X$, pro které je $\rho(a, x) < \delta$, platí nerovnost $\sigma(f(a), f(x)) < \varepsilon$.

Definice 3.6. Nechť je $f : M \rightarrow S$ zobrazení metrického prostoru (M, ρ) do metrického prostoru (S, σ) a $X \subset M$. Říkáme, že zobrazení f je *spojité na množině X* právě tehdy, když je spojité v každém bodě množiny X .

Přednáška 4.

Definice 4.1. Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $\mathbf{a} \in D_f^\circ$. Jestliže existují reálná čísla c_k , $k = 1, 2, \dots, n$ taková, že platí

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + c_1 h_1 + c_2 h_2 + \dots + c_n h_n + \eta(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^n c_k h_k + \eta(\mathbf{a}, \mathbf{h}),$$

a $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{|\eta(\mathbf{a}, \mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$, nazýváme lineární funkci

$$df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = c_1 h_1 + c_2 h_2 + \dots + c_n h_n = \sum_{k=1}^n c_k h_k = \mathbf{c} \cdot \mathbf{h}$$

proměnné $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ *diferenciálem funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$.*

Jestliže existuje diferenciál funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$, nazývá se funkce *diferencovatelná v bodě $\mathbf{a}$* . Funkce $f(\mathbf{x})$ se nazývá *diferencovatelná na množině $M \subset \mathbb{R}^n$* , je-li diferencovatelná v každém bodě množiny M .

Definice 4.2. Nechť je $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ a $\mathbf{a} \in D_{\mathbf{f}}^\circ$. Nechť existuje matice $\mathbf{C}$ typu $(k \times n)$ s prvky c_{ij} taková, že

$$\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{C}\mathbf{h} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{a}, \mathbf{h})$$

a

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\|\boldsymbol{\eta}(\mathbf{a}, \mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Pak lineární zobrazení

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{h} \Leftrightarrow y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} h_j$$

nazýváme *diferenciálem zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$.*

Jestliže existuje diferenciál zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$, nazýváme toto zobrazení *diferencovatelné v bodě $\mathbf{a}$* . Zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ se nazývá *diferencovatelné na množině $M \subset \mathbb{R}^n$* , jestliže je diferencovatelné v každém bodě $\mathbf{a} \in M$.

Definice 4.3. Nechť je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in D_f$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ vektor v $\mathbb{R}^n$. Nechť je bod $\mathbf{a}$ hromadným bodem množiny $M = \{\mathbf{x}; \mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t, t \in \mathbb{R}\} \cap D_f$ a $F(t) = f(\mathbf{a} + \mathbf{v}t)$. Jestliže existuje derivace $F'(0)$, řekneme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$ *derivaci podle vektoru $\mathbf{v}$* rovnou $F'(0)$. Derivaci funkce $f(\mathbf{x})$ podle vektoru $\mathbf{v}$ značíme $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$, $f_{,\mathbf{v}}$ apod.

Jestliže je $\|\mathbf{v}\| = 1$, nazýváme derivaci podle vektoru $\mathbf{v}$ *derivace ve směru $\mathbf{v}$* .

Jestliže je vektor $\mathbf{v}$ jeden z jednotkových vektorů ve směru souřadnicových os, tj. $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$, nazýváme derivaci $f_{\mathbf{e}_i}$ ve směru $\mathbf{e}_i$ *parciální derivací* podle proměnné x_i .

Parciální derivace budeme značit $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ nebo $f_{,i}$.

Definice 4.4. Necht má funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál. Pak vektor

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = (f_{,1}(\mathbf{a}), f_{,2}(\mathbf{a}), \dots, f_{,n}(\mathbf{a}))$$

nazýváme *gradient funkce* $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$.

Definice 4.5. Jestliže má zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$ spojitě parciální derivace, tj. všechny jeho složky $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, n$, mají na M spojitě parciální derivace, nazýváme zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *zobrazením třídy* C_1 na množině M . Množina všech zobrazení třídy C_1 na množině M se obvykle značí $C_1(M)$.

Přednáška 5.

Definice 5.1. Řekneme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$ *diferenciál druhého řádu* neboli *druhý diferenciál*, jestliže

- (1) funkce $f(\mathbf{x})$ má diferenciál prvního řádu v jistém okolí bodu $\mathbf{a}$,
- (2) všechny parciální derivace $f_{,k}$ mají v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál prvního řádu.

Druhý diferenciál funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ budeme značit $d^2f(\mathbf{a}, \mathbf{h})$ a platí

$$d^2f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \sum_{r,s=1}^n \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} \right) (\mathbf{a}) h_r h_s.$$

Definice 5.2. Nechť parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ existuje v jistém okolí bodu $\mathbf{a}$.

Jestliže existuje parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\mathbf{a})$ nazýváme tento výraz *druhou parciální derivací* funkce $f(\mathbf{x})$ podle proměnných x_i a x_k v bodě $\mathbf{a}$.

Druhé parciální derivace se často značí

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} (\mathbf{a}) = f_{,ik}(\mathbf{a}).$$

Definice 5.3. Nechť je $f(\mathbf{x})$ funkce n proměnných. Jestliže existuje parciální derivace

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \dots \partial x_{i_1}} \right) (\mathbf{a}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} (\mathbf{a}) = f_{,i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k}(\mathbf{a}),$$

nazýváme tento výraz *parciální derivací* funkce $f(\mathbf{x})$ podle proměnných $i_1, i_2, \dots, i_k$ v bodě $\mathbf{a}$.

Definice 5.4. Nechť je dána funkce $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Řekneme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$ *diferenciál řádu k* nebo *diferenciál k -tého řádu*, jestliže

- (1) všechny parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ až do řádu $(k-2)$ včetně mají diferenciál prvního řádu v jistém okolí bodu $\mathbf{a}$
- (2) všechny parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ řádu $(k-1)$ mají v bodě $\mathbf{a}$ diferenciál prvního řádu.

Pak definujeme k -tý diferenciál funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{a}$ vztahem

$$d^k f(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = d(d^{k-1} f(\mathbf{x}, \mathbf{h}))(\mathbf{a}, \mathbf{h}),$$

kde diferenciál řádu $(k-1)$ považujeme za funkci proměnné $\mathbf{x}$.

Definice 5.5. Nechť je $M \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Jestliže má funkce $f(\mathbf{x})$ na množině M všechny parciální derivace až do řádu k včetně spojité, říkáme, že je *třídy $C_k(M)$* .

Jestliže má funkce $f(\mathbf{x})$ na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$ spojité parciální derivace všech řádů, říkáme, že je *třídy $C_\infty(M)$* neboli že je *hladká na M* .

Přednáška 6.

Definice 6.1. Nechť je $M \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $\mathbf{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Řekneme, že zobrazení $\mathbf{f}$ je *regulární zobrazení* množiny M , jestliže všechny funkce $f_k(\mathbf{x})$ mají na M spojitě všechny parciální derivace prvního řádu a pro každé $\mathbf{x} \in M$ je

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) \neq 0.$$

Matrice

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\mathbf{x})$$

se nazývá *Jacobiho matice* a její determinant $\det(\mathbf{f}')(\mathbf{x}) = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x})$ nazýváme *Jacobiho determinant* neboli *jakobián* zobrazení $\mathbf{f}$.

Přednáška 7.

Definice 7.1. Nechť je $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$ je funkce n -proměnných, $\mathbf{a} \in M$ a funkce $f(\mathbf{x})$ je definována na nějakém okolí bodu $\mathbf{a}$.

Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\mathbf{x}$, pro která je $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, platí nerovnost

$$f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a}), \quad (1)$$

řekneme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$ *ostré lokální minimum*.

Jestliže místo (1) platí

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}),$$

říkáme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$ *(neostré) lokální minimum*.

Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, pro která je $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, platí nerovnost

$$f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}), \quad (2)$$

řekneme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$ *ostré lokální maximum*.

Jestliže místo (2) platí

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}),$$

říkáme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$ *(neostré) lokální maximum*.

Společný název pro (ostrá) lokální maxima a minima je *(ostré) lokální extrémy* a pro neostrá maxima a minima *neostré lokální extrémy*.

Definice 7.2. Nechť je $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, kde $E \subset \mathbb{R}^n$ je funkce n -proměnných, $M \subset E$ a $\mathbf{a} \in M$.

Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\mathbf{x} \in M$, pro která je $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, platí nerovnost

$$f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a}), \quad (3)$$

řekneme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$ *ostré lokální minimum vzhledem k množině M* .

Jestliže místo (3) platí

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}),$$

říkáme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$ *(neostré) lokální minimum vzhledem k množině M* .

Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\mathbf{x} \in M$, pro která je $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, platí nerovnost

$$f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}), \quad (4)$$

řekneme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$ *ostré lokální maximum vzhledem k množině M* .

Jestliže místo (4) platí

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}),$$

říkáme, že funkce $f(\mathbf{x})$ má v bodě $\mathbf{a}$ *(neostré) lokální maximum vzhledem k množině M* .

Společný název pro (ostrá) lokální maxima a minima vzhledem k množině M je *(ostré) lokální extrémy vzhledem k množině M* a pro neostrá maxima a minima vzhledem k množině M *neostré lokální extrémy vzhledem k množině M* .

Přednáška 8.

Definice 8.1. Necht' je $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ interval $\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle$. Každou množinu bodů x_{ij} , $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 0, 1, 2, \dots, N_i \in \mathbb{N}$, kde $x_{i0} = a_i \leq x_{i1} \leq x_{i2} \leq \dots \leq x_{iN_i} = b_i$, nazýváme *dělení* intervalu $\mathcal{I}$. Dělení intervalu, tj. výše uvedenou množinu bodů, budeme značit $\mathcal{D}$. Množinu všech dělení intervalu $\mathcal{I}$ budeme značit $\mathfrak{D}$.

Definice 8.2. Necht' je $\mathcal{I}$ je interval a $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ jeho dvě dělení. Je-li každý bod dělení $\mathcal{D}_1$ bodem dělení $\mathcal{D}_2$, nazveme dělení $\mathcal{D}_2$ *zjemněním* dělení $\mathcal{D}_1$.

Definice 8.3. Čísla $s(f)$, resp. $S(f)$ z (12), viz přednášky, nazýváme *dolní*, resp. *horní, Riemannův integrál* funkce $f(x)$ přes interval $\mathcal{I}$.

Jestliže v (12) platí rovnost $s(f) = S(f)$ nazýváme toto číslo (*Riemannův*) *integrál* funkce $f(x)$ přes interval $\mathcal{I}$ a říkáme, že funkce $f(\mathbf{x})$ je integrovatelná na intervalu $\mathcal{I}$. Pro tento integrál používáme označení

$$\int_{\mathcal{I}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{\mathcal{I}} f(\mathbf{x}) dV, \text{ a pod.}$$

Definice 8.4. Necht' $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená množina a $\chi_M(\mathbf{x})$ je tzv. *charakteristická funkce* množiny M , která je definována předpisem

$$\chi_M(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \mathbf{x} \in M \\ 0 & \text{pro } \mathbf{x} \notin M \end{cases}$$

Protože je M omezená, existuje interval $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $M \subset \mathcal{I}$. Jestliže existuje Riemannův integrál

$$d(M) = \int_{\mathcal{I}} \chi_M(\mathbf{x}) dV,$$

říkáme, že množina M je (*Riemannovsky*) *měřitelná* a číslo $d(M)$ se nazývá *mírou* (obsahem) množiny M .

Definice 8.5. Necht' je $M \subset \mathbb{R}^n$ je Riemannovsky měřitelná množina a $f(\mathbf{x})$ funkce omezená na množině M . Necht' je $\mathcal{I}$ interval v $\mathbb{R}^n$ takový, že $M \subset \mathcal{I}$. Definujme funkci

$$\widehat{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{pro } \mathbf{x} \in M \\ 0 & \text{pro } \mathbf{x} \in \mathcal{I} \setminus M \end{cases}$$

Jestliže je funkce $\widehat{f}(\mathbf{x})$ integrovatelná na intervalu $\mathcal{I}$, říkáme, že funkce $f(\mathbf{x})$ je integrovatelná na množině M a píšeme

$$\begin{aligned} \int_M f(\mathbf{x}) dV &= \int_M f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_{\mathcal{I}} \widehat{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál přes množinu M budeme značit $\mathfrak{R}(M)$.

Definice 8.6. Necht' je $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$. Funkci

$$f_+(\mathbf{x}) = \max(f(\mathbf{x}), 0), \quad \text{resp.} \quad f_-(\mathbf{x}) = \max(-f(\mathbf{x}), 0)$$

nazýváme *nezápornou*, resp. *nekladnou*, *částí* funkce $f(\mathbf{x})$.

Definice 8.7. Jestliže je $M \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná množina taková, že

$$d(M) = \int_M \chi_M(\mathbf{x}) \, dV = 0,$$

nazýváme množinu M *množinou míry nula* nebo *množinou nulové míry*.

Definice 8.8. Jestliže nějaká vlastnost $V(\mathbf{x})$ platí pro všechna $\mathbf{x} \in M$ mimo bodů z množiny $N \subset M$ a množina N má míru nula, budeme říkat, že vlastnost $V(\mathbf{x})$ platí *skoro všude* na množině M .

Tvrzení $V(\mathbf{x})$ platí skoro všude na M budeme často psát jako: " $V(\mathbf{x})$ platí s.v. na M ".

Přednáška 9.

Definice 9.1. Necht X je množina. Neprázdný systém $\mathfrak{M}$ podmnožin množiny X se nazývá *množinovou algebrou*, jestliže platí

- (1) Pro každou množinu $A \in \mathfrak{M}$ je $X \setminus A \in \mathfrak{M}$.
- (2) Jestliže $A_i \in \mathfrak{M}$, $i = 1, 2, \dots, n$, pak $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{M}$.
- (3) Jestliže $A_i \in \mathfrak{M}$, $i = 1, 2, \dots, n$, pak $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{M}$.

Definice 9.2. Necht X je množina. Neprázdný systém $\mathfrak{M}$ podmnožin množiny X se nazývá *množinovou σ -algebrou*, jestliže platí

- (1) Pro každou množinu $A \in \mathfrak{M}$ je $X \setminus A \in \mathfrak{M}$.
- (2) Jestliže $A_i \in \mathfrak{M}$, $i \in \mathbb{N}$, pak $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$.
- (3) Jestliže $A_i \in \mathfrak{M}$, $i \in \mathbb{N}$, pak $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$.

Definice 9.3. Necht X je metrický prostor a $\mathfrak{B}$ je nejmenší σ -algebra, která obsahuje všechny otevřené podmnožiny X . Množiny ze systému $\mathfrak{B}$ se nazývají *Borelovské množiny*.

Definice 9.4. Každá funkce μ na množinové σ -algebře $\mathfrak{M}$ množiny X , pro kterou platí

- (1) pro každou množinu $A \in \mathfrak{M}$ je $0 \leq \mu(A) \leq \infty$,
- (2) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (3) pro každou disjunktní posloupnost $A_n \in \mathfrak{M}$ je $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

se nazývá *míra*.

Pro $A \in \mathfrak{M}$ se nezáporné číslo $\mu(A)$ nazývá *míra množiny A* . Množiny, které patří do σ -algebry $\mathfrak{M}$, na které je definována míra μ , se nazývají μ -měřitelné.

Definice 9.5. Je-li $A \in \mathfrak{M}$ a $\mu(A) = 0$ říkáme, že A je *množina míry nula*.

Definice 9.6. Jestliže je každá podmnožina každé množiny míry nula měřitelná, říkáme, že míra μ je *úplná*.

Definice 9.7. Jestliže je $\mu(A) < \infty$, říkáme, že množina A má *konečnou míru*.

Jestliže je míra celého prostoru X konečná, tj. jestliže je $\mu(X) < \infty$, řekneme, že míra μ je *konečná*.

Je-li celý prostor X sjednocením spočetné posloupnosti množin konečné míry, říkáme, že míra μ je σ -*konečná*.

Definice 9.8. Nechť je f funkce definovaná na měřitelné množině M . Řekneme, že funkce $f(x)$ je *měřitelná*, jestliže pro každé $a \in \mathbb{R}$ je měřitelná množina

$$f^{(-1)}(-\infty, a) = \{x \in M; f(x) < a\}.$$

Definice 9.9. Nechť $f(x)$ je reálná funkce. Funkce $f_+(x) = \max(f(x), 0)$, resp. $f_-(x) = \max(-f(x), 0)$, se nazývají *nezáporná*, resp. *nekladná*, část funkce $f(x)$.

Definice 9.10. *Jednoduchou funkcí* budeme nazývat každou konečnou nezápornou měřitelnou funkci, která nabývá pouze konečného počtu hodnot.

Definice 9.11. Nechť jednoduchá funkce $f(x)$ definovaná na měřitelné množině M má tvar

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{M_k}(x),$$

kde M_k jsou měřitelné množiny. *Integrálem jednoduché funkce $f(x)$ přes množinu M při míře μ nazýváme číslo (konečné nebo nekonečné)*

$$\int_M f(x) d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu(M_k).$$

Definice 9.12. Nechť je $N \subset M$ měřitelná množina a $f(x)$ je jednoduchá funkce na M . Pak definujeme

$$\int_N f(x) d\mu = \int_M f(x) \cdot \chi_N(x) d\mu.$$

Definice 9.13. Nechť je $f(x)$ nezáporná měřitelná funkce definovaná na měřitelné množině M . *Integrálem funkce $f(x)$ přes množinu M při míře μ nazýváme číslo*

$$\int_M f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n(x) d\mu,$$

kde $f_n(x)$ je neklesající posloupnost jednoduchých funkcí, které konvergují k funkci $f(x)$.

Definice 9.14. Nechť je $f(x)$ měřitelná funkce na měřitelné množině M . Nechť $f_+(x)$ a $f_-(x)$ jsou nezáporná a nekladná část funkce $f(x)$. *Integrálem funkce $f(x)$ přes množinu M při míře μ nazýváme číslo*

$$\int_M f(x) d\mu = \int_M f_+(x) d\mu - \int_M f_-(x) d\mu$$

za předpokladu, že rozdíl vpravo existuje.

Definice 9.15. Říkáme, že funkce $f(x)$ je *integrovatelná* přes množinu M (nebo, že integrál *konverguje*) právě tehdy, když je $\int_M f(x) d\mu$ konečné číslo.

Definice 9.16. Nechť je $N \subset M$ měřitelná množina a $f(x)$ je měřitelná funkce definovaná na množině M . *Integrálem* funkce $f(x)$ přes množinu N budeme rozumět integrál

$$\int_N f(x) d\mu = \int_M f(x) \cdot \chi_N(x) d\mu.$$

Definice 9.17. Nechť M je měřitelná množina. Řekneme, že *skoro všechny* body množiny M mají jistou vlastnost V , má-li množina všech bodů $x \in M$, které nemají vlastnost V míru rovnou nule.

Definice 9.18. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je *měřitelná* (nebo podrobněji *měřitelná v Lebesgueově smyslu*), pokud pro každou množinu $Z \subset \mathbb{R}^n$ platí rovnost

$$|Z \cap M| + |Z \setminus M| = |Z|.$$

Množinu měřitelných množin budeme značit $\mathfrak{M}$.

Definice 9.19. Nechť je $M \in \mathfrak{M}$. *Mírou* (přesněji *Lebesgueovou mírou*) množiny M nazveme číslo $\mu(M) = |M|$, kde $|M|$ je vnější míra množiny M .

Přednáška 10.

Definice 10.1. Nechť je $S \subset \mathbb{R}^n$. Množina $M \subset S$ se nazývá *otevřená v množině* S právě tehdy, když existuje otevřená množina $U \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $M = U \cap S$.

Je-li $\mathbf{x} \in S$, nazveme množinu $V_\varepsilon(\mathbf{x}) = S \cap U_\varepsilon(\mathbf{x})$, kde $U_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n$ je otevřené ε -ové okolí bodu $\mathbf{x}$ v $\mathbb{R}^n$, ε -ové okolí bodu $\mathbf{x}$ v množině S .

Definice 10.2. Neprázdnou množinu $S \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme *k -rozměrnou nadplochou* (v $\mathbb{R}^n$), jestliže pro každý bod $\mathbf{x} \in S$ existuje okolí $U_\varepsilon(\mathbf{x})$ v S a vzájemně jednoznačné zobrazení $\Phi : G \rightarrow U_\varepsilon(\mathbf{x})$, kde $G \subset \mathbb{R}^k$, takové, že obě zobrazení Φ a $\Phi^{(-1)}$ jsou spojitá.

Definice 10.3. Nechť je $S \subset \mathbb{R}^n$ k -rozměrná nadplocha. Jestliže pro každý bod $\mathbf{x}_0 \in S$ existuje okolí $U(\mathbf{x}_0)$ v S zobrazení $\Phi : G \rightarrow U_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$, kde G je otevřená množina v $\mathbb{R}^k$, takové, že

- (1) Φ je vzájemně jednoznačné
- (2) obě zobrazení Φ a $\Phi^{(-1)}$ jsou spojitá
- (3) $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ je třídy $C_m(G)$
- (4) hodnost matice

$$\mathbf{W}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \end{pmatrix}$$

je pro každé $\mathbf{t} \in G$ rovna k

říkáme, že S je *regulární nadplocha* (třídy C_m). Zobrazení Φ pak nazýváme regulárním parametrickým popisem (třídy C_m) okolí $U(\mathbf{x}_0)$.

Přednáška 11.

Definice 11.1. Nechť je $\mathcal{C}$ regulární orientovaná křivka v $\mathbb{R}^n$, $\Phi : (a, b) \rightarrow \mathcal{C}$ její parametrický popis a $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ měřitelná vektorová funkce, tj. všechny její složky jsou měřitelné funkce, na křivce $\mathcal{C}$. Pak se

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t) \, dt$$

nazývá *křivkový integrál druhého druhu* funkce $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ přes křivku $\mathcal{C}$.

Definice 11.2. Nechť je $\mathcal{S}$ regulární 2-rozměrná orientovaná plocha v $\mathbb{R}^3$ s orientací danou spojitým vektorovým polem $\mathbf{n}_0$, $\Phi : G \rightarrow \mathcal{S}$ její parametrizace a $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ vektorové pole definované na ploše $\mathcal{S}$. *Plošný integrál druhého druhu* nazýváme výraz

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \, d\mathbf{S} = \iint_G (\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot \mathbf{n} \, du \, dv,$$

kde $\mathbf{n} = \pm(\Phi'_u \times \Phi'_v)$, kde znaménko $\pm$ se volí tak, aby $\mathbf{n} = c\mathbf{n}_0$, kde $c > 0$.