PŘEDNÁŠKA 1

METRICKÉ A NORMOVANÉ PROSTORY

1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$ a jeho podmnožiny

Připomeňme, že prostorem $\mathbb{R}^n$ rozumíme množinu uspořádaných n–tic reálných čísel, tj.

$$\mathbb{R}^{\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ krát}} .$$

Prvky $\mathbb{R}^n$ budeme značit $\boldsymbol{x}$, tj. $\boldsymbol{x} = \big(x_1, x_2, \dots, x_n\big)$, kde $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
V prostoru $\mathbb{R}^n$ se definují operace násobení reálným číslem a a sčítání vztahy

$$a\boldsymbol{x} = a\big(x_1, x_2, \dots, x_n\big) = \big(ax_1, ax_2, \dots, ax_n\big) ,$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \big(x_1, x_2, \dots, x_n\big) + \big(y_1, y_2, \dots, y_n\big) = \\ = \big(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n\big) .$$

Jak víme z lineární algebry, množina $\mathbb{R}^n$ s uvedenými operacemi tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel.

Pro vyšetřování limit v prostoru $\mathbb{R}^n$ je třeba zavést pojem **okolí bodu**. K tomu potřebujeme pojem **vzdálenosti dvou bodů**.

1.2 Metrický prostor

Definice 1. Nechť je M množina. Funkci $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ nazveme **metrikou**, jestliže splňuje následující podmínky:

(1) pro každé $x \in M$ je $\rho(x, x) = 0$;

(2) pro každé $x,\ y \in M$, $x \neq y$, je $\rho(x, y) = \rho(y, x) > 0$;

(3) pro každé $x,\ y,\ z \in M$ platí $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Množinu M, na které je definována metrika, nazýváme **metrický prostor**. Pokud budeme chtít zdůraznit, že M je metrický prostor s metrikou ρ, budeme psát (M, ρ).

Definice 2. Nechť je (M, ρ) metrický prostor a $x_0 \in M$. Pro každé $\varepsilon > 0$ nazýváme množinu všech $x \in M$, pro která je $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ **okolím bodu x_0** (přesněji **otevřeným ε–ovým okolím** bodu x_0. ε–ové okolí bodu x_0 budeme značit $U_\varepsilon(x_0)$.

Množinu všech bodů $x \in M$, pro která je $0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon$ nazýváme **prstencové okolí bodu x_0** a budeme jej značit $P_\varepsilon(x_0)$.

Poznámka. Zřejmě platí:

$$P_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}\,.$$

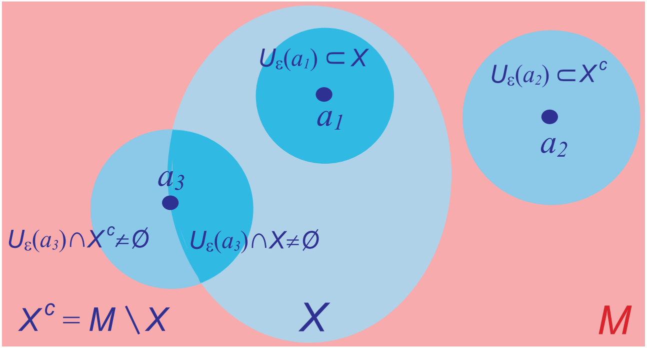
☛ ***Příklad 1.*** Nechť M je libovolná neprázdná množina. Definujme funkci $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = y \\ 1 & \text{pro } x \neq y. \end{cases}$$

Snadno se ukáže, že ρ je metrika na M. Pro $\varepsilon > 1$ a $x_0 \in M$ je $U_\varepsilon\big(x_0\big) = M$ a $P_\varepsilon(x_0) = M \setminus \{x_0\}$. Pro $\varepsilon \leq 1$ a každé $x_0 \in M$ je $U_\varepsilon\big(x_0\big) = \big\{x_0\big\}$, tedy jednobodová množina obsahující pouze bod x_0 a $P_\varepsilon(x_0) = \emptyset$. Takto definovaná metrika se nazývá **diskrétní**.

Definice 3. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $X \subset M$. Bod $a \in X$ se nazývá

- **vnitřní bod množiny X**, existuje-li okolí $U_\varepsilon(a) \subset X$.
- **vnější bod množiny X**, existuje-li okolí $U_\varepsilon(a)$ takové, že $U_\varepsilon(a) \cap X = \emptyset$.
- **hraniční bod množiny X**, má-li každé jeho okolí $U_\varepsilon(a)$ neprázdný průnik s množinou X i s doplňkem $M \setminus X$.



Definice 4. Nechť (M, ρ) je metrický prostor. Množinu všech vnitřních bodů množiny $X \subset M$ nazýváme **vnitřkem množiny X** a značíme X°. Množina $X \subset M$ se nazývá **otevřená** právě tehdy, je-li každý bod $x \in X$ vnitřním bodem množiny X, tj. právě tehdy, když $X = X^\circ$.

Definice 5. Nechť (M, ρ) a (M, σ) jsou metrické prostory. Jestliže existují reálná čísla a a b, $0 < a \leq b$ taková, že pro každé x, $y \in M$ platí $a\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq b\rho(x, y)$ nazveme metriky ρ a σ **ekvivalentní**.

Věta 2. *Nechť jsou (M, ρ) a (M, σ) metrické prostory s ekvivalentními metrikami ρ a σ. Množina $X \subset M$ je otevřená v metrice ρ právě tehdy, když je otevřená v metrice σ.*

Věta 3. *Nechť je (M, ρ) metrický prostor. Pak jsou $\emptyset$ a M otevřené množiny.*

Jestliže jsou $X_i \subset M$, kde $i = 1, 2, \ldots, N$, otevřené množiny, je množina $\bigcap\limits_{i=1}^{N} X_i$ otevřená.

Věta 4. *Vnitřek množiny $X \subset M$ je největší otevřená podmnožina X, tj. jestliže je $Y \subset X$ otevřená množina, pak $Y \subset X^\circ$.*
X° je sjednocení všech otevřených podmnožin Y množiny X.

Definice 6. Nechť je (M, ρ) metrický prostor a $X \subset M$. Bod $x \in M$ nazýváme **hromadný bod množiny X** právě tehdy, když každé prstencové okolí $P_\varepsilon(x)$ obsahuje alespoň jeden bod množiny X. Množinu všech hromadných bodů množiny X budeme značit der X.

Poznámka. Je-li x hromadný bod množiny X, pak každé okolí bodu x obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny X.

Definice 7. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $X \subset M$. Pak množinu $\overline{X} = X \cup \operatorname{der} X$ nazýváme **uzávěr množiny X**.

Definice 8. Podmnožina X metrického prostoru (M, ρ) se nazývá **uzavřená** právě tehdy, když obsahuje všechny své hromadné body, tj. právě když $X = \overline{X}$.

Věta 5. *Nechť (M, ρ) je metrický prostor.*

- *Množina $X \subset M$ je uzavřená právě tehdy, když je $M \setminus X$ otevřená.*
- *Množina $X \subset M$ je otevřená právě tehdy, když je množina $M \setminus X$ uzavřená.*

Věta 6. *Nechť je (M, ρ) metrický prostor. Pak jsou množiny $\emptyset$ a M uzavřené.*

Jestliže jsou X_a, $a \in A$, kde A je libovolná množina, uzavřené množiny. Pak je množina $X = \bigcap_{a \in A} X_a$ uzavřená.

Jestliže jsou X_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, uzavřené množiny, je množina $X = \bigcup_{i=1}^{N} X_i$ uzavřená.

Věta 7. *Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $X \subset M$. Pak platí:*

- *$\overline{X}$ je nejmenší uzavřená množina, pro kterou je $X \subset \overline{X}$, tj. je-li $X \subset Y$ a Y je uzavřená, pak $\overline{X} \subset Y$.*

- *$\overline{X}$ je průnik všech uzavřených množin Y takových, že $X \subset Y$.*

Definice 9. Nechť je (M, ρ) metrický prostor a $X \subset M$. **Hranicí množiny** X nazýváme množinu $\partial X = \overline{X} \cap \overline{M \setminus X}$. Bod $x \in \partial X$ se nazývá **hraniční bod** množiny X.

Definice 10. Nechť je (M, ρ) metrický prostor a $X \subset M$ je neprázdná. **Průměrem množiny** X nazýváme číslo

$$\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,\, y \in X} \rho(x, y)\,.$$

Je-li $X = \emptyset$, klademe $\operatorname{diam}(X) = 0$.

Množina $X \subset M$ se nazývá **omezená**, je-li $\operatorname{diam}(X) < \infty$.

Věta 8. *Podmnožina X metrického prostoru (M, ρ) je omezená právě tehdy, když existuje $y \in M$ a $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in X$ je $\rho(y, x) \leq K$.*

Definice 11. **Vzdáleností** dvou neprázdných podmnožin X a Y metrického prostoru (M, ρ) nazýváme číslo

$$\operatorname{dist}(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \rho(x, y)\,.$$

1.2.1 Normovaný prostor

Definice 12. Nechť je V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Zobrazení $\nu : V \to \mathbb{R}$, pro které platí:

- $\nu(x) \geq 0$
- $\nu(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$
- $\nu(ax) = |a|\nu(x)$
- $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$

se nazývá **norma**. Vektorový prostor V, na kterém je definována norma se nazývá **normovaný prostor**. Jestliže chceme zdůraznit, že V je normovaný prostor s normou ν, budeme psát (V, ν).

Věta 9. *Je-li* (V, ν) *normovaný prostor, je* (V, ρ)*, kde* $\rho(x, y) = \nu(x - y)$*, metrický prostor.*

Důkaz. Protože $\nu(0) = 0$, je $\rho(x, x) = \nu(x - x) = \nu(0) = 0$.
Jestliže $x \neq y$ jsou libovolné dva prvky V, pak $\rho(x, y) = \nu(x - y) = \nu(y - x) = \rho(y, x) \neq 0$. Pro každé tři prvky x, y, $z \in V$ platí

$$\rho(x, z) = \nu(x-z) = \nu\big((x-y)+(y-z)\big) \leq \nu(x-y)+\nu(y-z) = \rho(x, y)+\rho(y, z) \,.$$

Tedy ρ je metrika. $\square$

Definice 13. Dvě normy ν_1 a ν_2 vektorového prostoru V se nazývají **ekvivalentní**, jestliže existují a, $b \in \mathbb{R}$, $0 < a \leq b$, takové, že $a\nu_1(x) \leq \nu_2(x) \leq b\nu_1(x)$.

Poznámka. Je zřejmé, že metriky ρ_1 a ρ_2 generované ekvivalentními normami ν_1 a ν_2 jsou ekvivalentní.

Poznámka. Lze ukázat, že pro každé $p \geq 1$ je

$$\nu_p(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| x_i \right|^p \right)^{1/p}$$

norma v prostoru $\mathbb{R}^n$ a že tyto normy jsou ekvivalentní.

Pro nás budou důležité normy ν_1, ν_2 a $\nu_{\max} = \lim\limits_{p \to \infty} \nu_p$. Pro tyto normy platí

$$\begin{aligned}
\nu_1(\boldsymbol{x}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left| x_i \right| , \\
\nu_2(\boldsymbol{x}) &= \left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \left(x_i \right)^2 \right)^{1/2} , \\
\nu_{\max}(\boldsymbol{x}) &= \max\left(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n| \right) .
\end{aligned}$$

Dále budeme prostor $\mathbb{R}^n$ považovat za metrický prostor s metrikou generovanou jednou z ekvivalentních norem ν_1, ν_2 nebo $\nu_{\max}$.

☛ ***Příklad 2.*** Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ a $B(M)$ je vektorový prostor všech funkcí omezených na M. Ve vektorovém prostoru $B(M)$ lze zavést normu ν vztahem $\nu(f) = \sup_{x \in M} \big(\big|f(x)\big|\big)$.

V prostoru $\mathbb{R}^n$ je norma ν_2 z příkladu 2 definována pomocí operace, která se nazývá skalární součin.

Definice 14. Nechť je V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Pak funkci $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$, která má pro každé x, y, $z \in V$ a a, $b \in \mathbb{R}$ vlastnosti:

- $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$,
- $(x, y) = (y, x)$,
- $(x, x) \geq 0$,
- $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

nazýváme **skalární součin**. Často se značí $(x, x) = \|x\|^2$.

☛ ***Příklad 3.*** Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ definujeme skalární součin vztahem $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Věta 10 (Schwarzova nerovnost) *Jestliže je V vektorový prostor se skalárním součinem, pak pro každé x, $y \in V$ platí nerovnost $(x, y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$. Přitom rovnost platí pouze tehdy, když x a y jsou lineárně závislé.*

Důkaz. Je-li $y = 0$, platí znak rovnosti.
Nechť $y \neq 0$. Pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) = \|x\|^2 - 2\lambda(x, y) + \lambda^2 \|y\|^2.$$

Přitom rovnost platí pouze tehdy, když $x - \lambda y = 0$, tj. když jsou jsou x a y lineárně závislé. Zvolme $\lambda = \dfrac{(x, y)}{\|y\|^2}$. Pak z uvedené nerovnosti dostaneme

$$0 \leq \|x\|^2 - 2\frac{(x, y)^2}{\|y\|^2} + \frac{(x, y)^2}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{(x, y)^2}{\|y\|^2}\ ,$$

z čehož plyne dokazovaná nerovnost. $\square$

Poznámka. Ze Schwarzovy nerovnosti plyne pro $\|x\|, \|y\| \neq 0$, že $-1 \leq \dfrac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$. Proto lze psát $\dfrac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \cos\varphi$, kde φ je úhel mezi vektory x a y. V případě $\mathbb{R}^n$ je tedy úhel mezi dvěma nenulovými vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ dán vztahem

$$\cos\varphi = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{-1/2} .$$

Věta 11. *Jestliže je V vektorový prostor se skalárním součinem, je V normovaný prostor s normou definovanou vztahem $\nu(x) = \sqrt{(x,x)} = \|x\|$.*

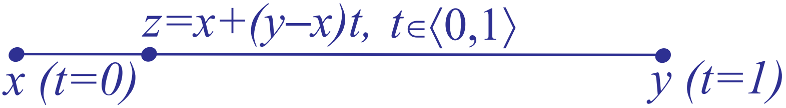
Důkaz. Ověření vlastností normy je zřejmé. Snad až na nerovnost $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Ta plyne ze Schwarzovy nerovnosti, neboť

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y]|\big)^2.$$

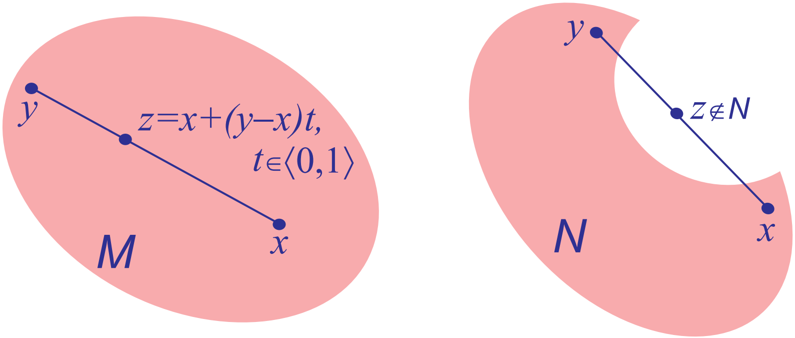
Definice 15. Podmnožina $M \subset \mathbb{R}^n$ s metrikou generovanou normou ν_p se nazývá **kompaktní**, jestliže je omezená a uzavřená.

Poznámka. Význam kompaktních množin pro matematickou analýzu bude zřejmý, až zavedeme pojem limity posloupnosti.

Definice 16. Nechť je V vektorový prostor a $x, y \in V$. Množina všech bodů $z = x + (y - x)t$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ se nazývá **úsečka** z bodu x do bodu y. Bod x je **počáteční bod** a y **koncový bod** této úsečky.



Definice 17. Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá **konvexní**, jestliže pro každé dva body x, $y \in M$ leží celá úsečka z bodu x do bodu y v množině M, tj. pro každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$ je $x + (y - x)t \in M$.



Konvexní množina

Nekonvexní množina