1.1 DIFERENCIÁLY VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

Definice 1. Řekneme, že funkce $f(\boldsymbol{x})$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ **diferenciál druhého řádu** neboli **druhý diferenciál**, jestliže

(1) funkce $f(\boldsymbol{x})$ má diferenciál prvního řádu v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$,

(2) všechny parciální derivace f'_k mají v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál prvního řádu.

Druhý diferenciál funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ budeme značit $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$ a platí

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \sum_{r,s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} \right) (\boldsymbol{a})\, h_r h_s\,. \tag{1.1}$$

Z rovnice (**??**) vidíme, že pro výpočet druhého diferenciálu potřebujeme parciální derivace z parciálních derivací, tj. druhé parciální derivace.

Definice 2. Nechť parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ existuje v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$. Jestliže existuje parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\boldsymbol{a})$ nazýváme tento výraz **druhou parciální derivací** funkce $f(\boldsymbol{x})$ podle proměnných x_i a x_k v bodě $\boldsymbol{a}$. Druhé parciální derivace se často značí

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\boldsymbol{a}) = f'_{ik}(\boldsymbol{a})\,.$$

Poznámka: V obecném případě je nutné zachovávat pořadí derivování. Tedy obecně je $f'_{ik}(\boldsymbol{a}) \neq f'_{ki}(\boldsymbol{a})$. Ale pokud má funkce druhý diferenciál platí následující věta:

Věta 1. *Nechť je $f(x_1, x_2)$ funkce dvou proměnných a nechť její parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = f'_1$ a $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = f'_2$ existují v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ a mají diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak je $f'_{12}(\boldsymbol{a}) = f'_{21}(\boldsymbol{a})$.*

Důsledek. *Jestliže má funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ druhý diferenciál, platí pro každé $i, k = 1, 2, \ldots, n$ rovnost*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\boldsymbol{a}) \,.$$

Protože pro funkce, které mají druhý diferenciál jsou parciální derivace záměnné, tj. platí $f'_{ik}(\boldsymbol{a}) = f'_{ki}(\boldsymbol{a})$, lze vztah (**??**) psát ve tvaru

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{ii}(\boldsymbol{a}) h_i^2 + \sum_{i \neq k} f'_{ik}(\boldsymbol{a}) h_i h_k = \sum_{i=1}^{n} f'_{ii}(\boldsymbol{a}) h_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} f'_{ik}(\boldsymbol{a}) h_i h_k \,. \tag{1.2}$$

Věta 1 o záměnnosti parciálních derivací vyžaduje předpoklad existence diferenciálu prvních parciálních derivací. Tento předpoklad se dá poměrně obtížně ověřit. Jedna z možností, jak ověřit existenci druhého diferenciálu dává následující věta.

Věta 2. *Nechť má funkce $f(\boldsymbol{x})$ všechny první parciální derivace v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$ a všechny druhé parciální derivace jsou spojité v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak v bodě $\boldsymbol{a}$ existuje druhý diferenciál funkce $f(\boldsymbol{x})$.*

Tedy pokud má funkce $f(\boldsymbol{x})$ na množině M spojité druhé derivace, jsou záměnné. Ale abychom ověřili předpoklady této věty, musíme vědět, že jsou spojité obě derivace f'_{ik} a f'_{ki}. Tedy tato věta nemá příliš velký praktický význam pro to, abychom zjistili, že parciální derivace jsou záměnné. Ale platí následující

Věta 3. *Nechť je $f(\boldsymbol{x})$ funkce n proměnných. Nechť v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$ existují první parciální derivace $f'_i(\boldsymbol{x})$ a $f'_k(\boldsymbol{x})$ a nechť je $f'_{ik}(\boldsymbol{x}) = \left(f'_i\right)'_k(\boldsymbol{x})$ je spojitá v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak v bodě $\boldsymbol{a}$ existuje $f'_{ki}(\boldsymbol{a}) = \left(f'_k\right)'_i(\boldsymbol{a})$ a platí $f'_{ik}(\boldsymbol{a}) = f'_{ki}(\boldsymbol{a})$.*

Abychom definovali diferenciál k–tého řádu, budeme nejprve definovat parciální derivace k–tého řádu.

Definice 3. Nechť je $f(\boldsymbol{x})$ funkce n proměnných. Jestliže existuje parciální derivace

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \ldots \partial x_{i_1}}\right)(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}}(\boldsymbol{a}) =$$

$$= f'_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}(\boldsymbol{a}),$$

nazýváme tento výraz **parciální derivací** funkce $f(\boldsymbol{x})$ podle proměnných i_1, i_2, . . . , i_k v bodě $\boldsymbol{a}$.

Obecně závisí parciální derivace k–tého řádu na pořadí, ve které derivujeme. Ale platí věty, které jsou analogické větám 1, 2 a 3:

Věta 4. *Nechť všechny parciální derivace funkce $f(\boldsymbol{x})$ až do řádu $(k-2)$ včetně mají diferenciál v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$ a všechny parciální derivace řádu $(k-1)$ mají diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$. Pak existují všechny parciální derivace funkce $f(\boldsymbol{x})$ v okolí bodu $\boldsymbol{a}$ až do řádu k včetně a nezávisí na pořadí, v němž derivujeme.*

Věta 5. *Nechť jsou všechny parciální derivace až do řádu $(k-1)$ záměnné v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$. Je-li v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá parciální derivace $\left(f_{i_1 i_2 \dots, i_{k-1}}\right)'_{i_k}(\boldsymbol{a})$, pak pro každou permutaci $(j_1, j_2, \dots, j_k)$ indexů $(i_, i_2, \dots, i_k)$ existuje parciální derivace*

$$f'_{j_1 j_2 \dots j_k}(\boldsymbol{a}) = f'_{i_1 i_2 \dots i_k}(\boldsymbol{a})\,.$$

Poznámka: Jestliže má funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ záměnné parciální derivace řádu k, používáme pro parciální derivace zkrácené značení

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}\,,$$

kde $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ a k_1 je počet parciálních derivací podle x_1, k_2 je počet parciálních derivací podle x_2, atd. Přitom je-li $k_i = 0$, vynecháváme symbol ∂x_i^0.

Tedy například $f'_{1214514} = \dfrac{\partial^7 f}{\partial x_1^3 \partial x_2 \partial x_4^2 \partial x_5}$.

Nyní zobecníme definici 1 na případ diferenciálu libovolného řádu.

Definice 4. Nechť je dána funkce $f(\boldsymbol{x}) = f\big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big)$. Řekneme, že funkce $f(\boldsymbol{x})$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ *diferenciál řádu* k nebo **diferenciál k–tého řádu**, jestliže

(1) všechny parciální derivace funkce $f(\boldsymbol{x})$ až do řádu $(k-2)$ včetně mají diferenciál prvního řádu v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$

(2) všechny parciální derivace funkce $f(\boldsymbol{x})$ řádu $(k-1)$ mají v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál prvního řádu.

Pak definujeme k–tý diferenciál funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ vztahem $\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \mathrm{d}\big(\mathrm{d}^{k-1} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})\big)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$, kde diferenciál řádu $(k-1)$ považujeme za funkci proměnné $\boldsymbol{x}$.

Věta 6. *Jestliže má funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál řádu k, pak jsou její všechny parciální derivace až do řádu k v bodě $\boldsymbol{a}$ záměnné.*

Definice 5. Nechť je $M \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Jestliže má funkce $f(\boldsymbol{x})$ na množině M všechny parciální derivace až do řádu k včetně spojité, říkáme, že je **třídy** $C_k(M)$. Jestliže má funkce $f(\boldsymbol{x})$ na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$ spojité parciální derivace všech řádů, říkáme, že je **třídy** $C_\infty(M)$ neboli že je **hladká na** M.

Věta 7. *Každá funkce $f(\boldsymbol{x}) \in C_k(M)$ má na množině M diferenciál řádu k a všechny její parciální derivace až do řádu k jsou na množině M záměnné.*

Jak jsme se již zmínili, lze diferenciály vyjádřit pomocí parciálních derivací. První diferenciál je funkce $f(\boldsymbol{x})$ je

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_r}(\boldsymbol{x}) h_h \, .$$

Protože druhý diferenciál je první diferenciál druhého diferenciálu je

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}) = \sum_{r,s} \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s}(\boldsymbol{x}) h_r h_s \,.$$

Obecně je k–tý diferenciál funkce $f(\boldsymbol{x})$ roven

$$\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k} f'_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\boldsymbol{x}) h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_k} \,. \tag{1.3}$$

Jestliže má funkce $f(\boldsymbol{x})$ diferenciál k–tého řádu jsou podle věty 4 všechny parciální derivace řádu k záměnné. To nám umožňuje sloučit v (**??**) členy, které se liší pouze pořadím derivování. Počet všech permutací k prvkové množiny je $k!$. Jestliže se v této množině vyskytuje derivace podle první proměnné k_1–krát, derivací podle druhé proměnné k_2–krát atd., nezmění se permutace, jestliže permutujeme k_1 prvkovou množinu, která obsahuje derivace podle proměnné x_1, k_2 prvkovou množinu, která obsahuje derivace podle proměnné x_2, atd. Tedy (**??**) lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = \\ &= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=k} \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_n!} \, \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}(\boldsymbol{x}) h_1^{k_1} h_2^{k_2} \ldots h_n^{k_n} \,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Poznámka: Jestliže si uvědomíme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí vztah

$$\big(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\big)^k = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=k} \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_n!} \, a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n} \,,$$

lze vztah (**??**) přepsat ve tvaru

$$\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_a \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(\boldsymbol{x}) \,.$$

Z věty 4.9 víme, že když má zobrazení $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál prvního řádu a funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ v bodě $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$ diferenciál prvního řádu, existuje diferenciál prvního řádu, a tedy i všechny parciální derivace složené funkce $H = f \circ \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Přitom jsou parciální derivace dány vztahem

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_r}(\boldsymbol{A}) \cdot \frac{\partial g_r}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\,.$$

Tedy jestliže existují první diferenciály zobrazení $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$ a funkce $f(\boldsymbol{y})$ v jistém okolí bodu $\boldsymbol{A}$ existuje parciální derivace složené funkce $H(\boldsymbol{x}) = f\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)$ v jistém okolí bodu $\boldsymbol{a}$ a je rovna

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_r}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) \cdot \frac{\partial g_r}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\,. \tag{1.5}$$

Jestliže budeme předpokládat, že zobrazení $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ a funkce $f(\boldsymbol{y})$ mají diferenciály druhého řádu, lze derivovat rovnost (**??**) podle

x_k. Derivací dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)(\boldsymbol{x}) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial y_r}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) \cdot \frac{\partial g_r}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{m}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial y_r}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)\right)\frac{\partial g_r}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial f}{\partial y_r}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial g_r}{\partial x_i}\right)(\boldsymbol{x})\right].$$

Protože $\dfrac{\partial f}{\partial y_r}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)$ je složená funkce a druhé parciální derivace jsou záměnné (předpokládali jsme, že existuje druhý diferenciál), dostaneme

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k}(\boldsymbol{x}) = \sum_{r,s=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial y_r \partial y_s}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial g_s}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})\frac{\partial g_r}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) + \\ + \sum_{r=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_r}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)\frac{\partial^2 g_r}{\partial x_k \partial x_i}(\boldsymbol{x})\,. \quad (1.6)$$

Podobně jako jsme odvodili ze vztahu (**??**) rovnost (**??**), lze za předpokladu existence třetích diferenciálů zobrazení $f(\boldsymbol{y})$ a $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ najít třetí parciální derivace složené funkce $H = f \circ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, atd. Obecně platí:

Věta 8. *Nechť má zobrazení $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál k–tého řádu a funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ v bodě $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$ diferenciál k–tého řádu. Pak v bodě $\boldsymbol{a}$ má složená funkce $H = f \circ \boldsymbol{g}$ všechny parciální derivace až do řádu k a tyto derivace jsou záměnné.*

Věta 9. *Jestliže je zobrazení $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ třídy $C_k(M)$, kde M je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je třídy $C_k(N)$, kde $N \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina taková, že $\boldsymbol{g}(M) \subset N$, pak je složená funkce $H = f \circ \boldsymbol{g} \in C_k(M)$.*

Věta 10. *Nechť má zobrazení $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál k–tého řádu a funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ v bodě $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$ diferenciál k–tého řádu. Pak v bodě $\boldsymbol{a}$ má složená funkce $H = f \circ \boldsymbol{g}$ diferenciál k–tého řádu.*

Při počítání s diferenciály se často používá velmi užitečná symbolika. Zaveďme v $\mathbb{R}^n$ speciální funkce $V_i(\boldsymbol{x}) = x_i$. Funkcím $V_i(\boldsymbol{x})$ můžeme říkat třeba ”i–tá nezávislá proměnná”. Funkce $V_i(\boldsymbol{x})$ mají diferenciály všech řádů a přitom je $\mathrm{d}V_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = h_i$ a $\mathrm{d}^k V_i(\boldsymbol{x}) = 0$ pro každé $k > 1$. Jestliže jsme diferenciál funkce f značili $\mathrm{d}f$, je přirozené psát $h_i = \mathrm{d}V_i = \mathrm{d}x_i$. Při tomto označení se zapíše jako

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_r}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_r$$

nebo prostě

$$\mathrm{d}f = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_r}\,\mathrm{d}x_r = \sum_{r=1}^{n} f'_r\,\mathrm{d}x_r\,.$$

Toto označení je velmi výhodné i pro zápis diferenciálu složené funkce. Je-li totiž $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kde zobrazení $\boldsymbol{g} = \big(g_1, g_2, \ldots, g_m\big)$, pak lze první diferenciál složené funkce $H = f \circ \boldsymbol{g}$

zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}H = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} f'_r g_{r,s} \, \mathrm{d}x_s = \sum_{r=1}^{m} H'_r \mathrm{d}g_r \,,$$

protože $\mathrm{d}g_r = \sum_{s=1}^{n} g_{r,s} \, \mathrm{d}x_s$. Mnohdy se ještě mlčky používá úmluva, že složenou funkci $H(\boldsymbol{x}) = f\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)$ značíme také f. Při této úmluvě vždy platí vztah

$$\mathrm{d}f = \sum_{r=1}^{m} f'_r (\boldsymbol{y})_r \,.$$

Pak závisí na tom, jestli považujeme funkci f za funkci nezávisle proměnné $\boldsymbol{y}$ nebo je to proměnná, která ještě závisí na proměnné $\boldsymbol{x}$.

Ale obecně lze zavést operaci diferencování d, která funkci f přiřadí funkci $\mathrm{d}f$. Tato operace má následující vlastnosti:

(1) $\mathrm{d}(af + bg) = a\mathrm{d}f + b\mathrm{d}g$, kde a a b jsou reálné konstanty

(2) $\mathrm{d}(fg) = g\mathrm{d}f + f\mathrm{d}g$

(3) $\mathrm{d}\big(f^m\big) = mf^{m-1}\mathrm{d}f$, kde $m \in \mathbb{R}$

(4) $\mathrm{d}\big(\mathrm{d}^k f\big) = \mathrm{d}^{k+1} f$.

Přitom si je ale třeba uvědomit, že pokud jsou x_i nezávisle proměnné, je $\mathrm{d}^k x_i = 0$ pro $k \geq 2$.
Správné používání těchto označení mnohdy dělá výpočty pro parciální derivace a diferenciály přehlednější. Tohoto označení budeme často používat zejména v přednášce 7 při výpočtu tzv. vázaných extrémů funkce více proměnných.

Na závěr uvedeme analogii Taylorova vzorce pro funkci více proměnných.

Věta 11. *Nechť je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce, která má v každém bodě úsečky $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}$, $t \in (0,1)$ diferenciál $(k+1)$–ního řádu. Pak existuje $\Theta \in (0,1)$ takové, že*

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + \cdots + \frac{1}{k!}\,\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + \\ + \frac{1}{(k+1)!}\,\mathrm{d}^{k+1} f(\boldsymbol{a}+\Theta\boldsymbol{h},\boldsymbol{h})\,. \quad (1.7)$$

V praxi je mnohdy výhodnější trochu slabší tvrzení, které ukazuje, jak lze pomocí diferenciálů nahradit funkci n proměnných $f(\boldsymbol{x})$ aproximovat polynomem do řádu k.

Věta 12. *Nechť je funkce $f(\boldsymbol{x}) \in C_k(M)$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a $\boldsymbol{a} \in M$. Pak pro každé $\boldsymbol{h}$ takové, že $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h} \in M$ platí*

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{1!}\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + \cdots + \frac{1}{k!}\,\mathrm{d}^k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}) + \eta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\,, \qquad (1.8)$$

kde

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{\left|\eta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{h})\right|}{\|\boldsymbol{h}\|^k} = 0\,.$$