FUNKCE DEFINOVANÉ IMPLICITNĚ

Nyní se budeme zabývat následujícím problémem:
Je dáno s spojitých funkcí $F_k\big(x_1, x_2, \dot{;}x_r, y_1, y_2, \ldots, y_s\big) = F_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, s$, $r + s$ proměnných. Kdy existují, alespoň lokálně, spojité funkce $y_1 = f_1(\boldsymbol{x})$, $y_2 = f_2(\boldsymbol{x})$, . . . , $y_s = f_s(\boldsymbol{x})$ proměnných x_1, x_2, . . . , x_r takové, že pro každé $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, s$ platí

$$F_k\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = F_k\big(x_1, \ldots, x_r, f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_s(\boldsymbol{x})\big) = 0\,?$$

V podstatě se jedná o to, kdy můžeme zaručit, že ze soustavy rovnic

$$F_k\big(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s\big) = 0, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, s\,,$$

lze, alespoň lokálně, najít y_k jako spojité funkce x_i.
Řešení tohoto problému nejprve ukážeme na případě, kde $r = s = 1$. Jedná se tedy o řešení rovnice $F(x, y) = 0$. Nejprve musíme zaručit, že rovnice má nějaké řešení. Proto budeme předpokládat, že existují a a b taková, že $F(a, b) = 0$. Pro řešení rovnice $F(x, y) = 0$ v okolí bodu (a, b) existují na funkci $F(x, y)$ různé předpoklady. My budeme předpokládat, že funkce $F(x, y)$ je v okolí bodu (a, b) spojitá, že v jistém okolí bodu (a, b) existuje spojitá parciální derivace $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$, která je v bodě (a, b) různá od nuly. Za těchto předpokladů lze totiž, aspoň teoreticky, sestrojit pro každé x z jistého okolí bodu a funkci $y = f(x)$, pro kterou platí $F\big(x, f(x)\big) = 0$.

Pro obecné r a s platí následující věta.

Věta 1. (o implicitních funkcích)
Nechť jsou r a s přirozená čísla a nechť je

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s)\,.$$

Nechť jsou funkce $F_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F_k(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,$ spojité v jistém okolí bodu $\boldsymbol{\alpha}$ a mají v tomto okolí všechny parciální derivace prvního řádu $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_i}$, které jsou spojité spojité v bodě $\boldsymbol{\alpha}$. Nechť platí:

$$\begin{aligned} &F_k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = F_k(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s) = 0 \quad \textit{pro } k = 1,\ 2,\ \ldots,\ s \\ &\det\left(\tfrac{\partial F_k}{\partial y_i}\right)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Pak existují $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ taková, že ke každému $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_r) \in J$, kde $J = \big\{\boldsymbol{x}\,;\ |x_i - a_i| < \delta,\ i = 1, 2, \ldots, r\big\}$, existuje právě jeden bod $\boldsymbol{y} \in K$, kde $K = \big\{\boldsymbol{y}\,;\ |y_k - b_k| < \Delta,\ k = 1, 2, \ldots, s\big\}$, pro který platí $F_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F_k(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) = 0$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots, s$.

Souřadnice y_k tohoto bodu definují funkce

$$y_k = \varphi_k\big(x_1, x_2, \ldots, x_r\big) \quad k = 1,\, 2\, \ldots,\, s\,.$$

Tyto funkce φ_1, φ_2, . . . , φ_s jsou spojité na intervalu J.
Jestliže funkce $F_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $k = 1, 2, \ldots, s$, mají diferenciál n–tého řádu na množině $J \times K$, mají funkce $y_k = \varphi_k(\boldsymbol{x})$, $k = 1, 2, \ldots, s$ na množině J diferenciál n–tého řádu.
Jestliže jsou pro všechna $k = 1, 2, \ldots, s$ funkce $F_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in C_n(J \times K)$, pak jsou funkce $y_k = \varphi_k(x_1, \ldots, x_r) \in C_n(J)$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots, s$.

V praxi se věty o implicitních funkcí používá tak, že se nejprve ověří její předpoklady. Pak najdeme první diferenciál funkcí $F_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ a z rovnic

$$\mathrm{d}F_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial F_k}{\partial x_i}\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\big)\,\mathrm{d}x_i + \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial F_k}{\partial y_\ell}\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\big)\,\mathrm{d}y_\ell = 0$$

najdeme $\mathrm{d}y_k$. Řešení této soustavy existuje v bodech $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, kde determinant

$$D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \det\left(\frac{\partial F_k}{\partial y_\ell}\right)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{D\big(F_1, F_2, \dots, F_s\big)}{D\big(y_1, y_2, \dots, y_s\big)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq 0\,.$$

Protože $\mathrm{d}y_k = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$, lze velmi snadno najít z prvního diferenciálu funkcí y_k jejich první parciální derivace.
Abychom našli druhý diferenciál funkcí $y_k(\boldsymbol{x})$, resp. druhé parciální derivace těchto funkcí, diferencujeme rovnici (8). Tím dostaneme (pro jednoduchost vynecháváme označení bodu, v němž se počítají parciální derivace)

$$\mathrm{d}^2 F = \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_i \partial x_j}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j + 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{m=1}^{s} \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_i \partial y_m}\,\mathrm{d}x_i \mathrm{d}y_m + \\ + \sum_{m,n=1}^{s} \frac{\partial^2 F_k}{\partial y_m \partial y_n}\,\mathrm{d}y_m \mathrm{d}y_n + \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial F_k}{\partial y_\ell}\,\mathrm{d}^2 y_\ell = 0\,.$$

Protože z (8) již známe $\mathrm{d}y_m$, je soustava (10) soustavou lineárních rovnic pro $\mathrm{d}^2 y_\ell$. Všimněte si, že koeficienty u $\mathrm{d}^2 y_\ell$ v (10) jsou stejné jako koeficienty u $\mathrm{d}y_\ell$ v soustavě (9). Abychom tedy našli ze soustavy (10) druhé diferenciály $\mathrm{d}^2 y_\ell$ stačí znát inverzní matici k matici $\mathbf{Y}$ s prvky $Y_{k\ell} = \dfrac{\partial F_k}{\partial y_\ell}$. Ale tu jsme vlastně našli při řešení soustavy (8). Jestliže jsme našli druhé diferenciály $\mathrm{d}^2 y_\ell$, snadno najdeme všechny druhé parciální derivace funkcí y_k, protože

$$\mathrm{d}^2 y_k = \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j} \,\mathrm{d}x_i \,\mathrm{d}x_j \,.$$

Postup při výpočtu diferenciálů a parciálních derivací vyšších řádů je podobný.

☛ ***Příklad 1.*** Najděte všechny první a druhé parciální derivace funkcí $u(x,y)$ a $v(x,y)$, které jsou definovány soustavou rovnic

$$\bigl(u^2 - v^2\bigr)x - 2uvy = 1\,, \quad 2uvx + \bigl(u^2 - v^2\bigr)y = 0$$

v okolí bodu $\bigl[x_0, y_0, u_0, v_0\bigr] = [1, 0, -1, 0]$.

Řešení. Obě funkce $F_1(x,y,u,v) = \bigl(u^2 - v^2\bigr)x - 2uvy - 1$ a $F_2(x,y,u,v) = 2uvx + \bigl(u^2 - v^2\bigr)y$ mají spojité derivace všech řádů v celém $\mathbb{R}^4$. Dále platí $F_1(1,0,-1,0) = F_2(1,0,-1,0) = 0$ a $D(1,0,-1,0) = 4 \neq 0$. Proto tyto funkce implicitně definují v jistém okolí bodu $[x,y] = [1,0]$ spojité funkce $u = u(x,y)$ a $v = v(x,y)$ takové, že $u(1,0) = -1$ a $v(1,0) = 0$. Tyto funkce mají v okolí bodu $[x,y] = [1,0]$ spojité parciální derivace všech řádů. V principu bychom mohli ze soustavy rovnic $F_1(x,y,u,v) = F_2(x,y,u,v) = 0$ určit explicitně příslušné funkce $u = u(x,y)$ a $v = v(x,y)$ a pak najít jejich derivace. Ale tento postup není nutný. Derivace těchto funkcí lze najít, aniž bychom znali funkce $u(x,y)$ a $v(x,y)$. Pro první diferenciál funkcí F_1 a F_2 je

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_1 &= \bigl(u^2 - v^2\bigr)\mathrm{d}x - 2uv\mathrm{d}y + 2(ux - vy)\mathrm{d}u - 2(vx + uy)\mathrm{d}v = 0\,, \\ \mathrm{d}F_2 &= 2uv\mathrm{d}x + \bigl(u^2 - v^2\bigr)\mathrm{d}y + 2(vx + uy)\mathrm{d}u + 2(ux - vy)\mathrm{d}v = 0\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Tedy v bodě $[x,y,u,v] = [1,0,-1,0]$ je

$$\mathrm{d}x - 2\mathrm{d}u = 0\,, \quad \mathrm{d}y - 2\mathrm{d}v = 0 \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Tedy $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(1,0) = \dfrac{1}{2}$ a $\dfrac{\partial u}{\partial y}(1,0) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(1,0) = 0$.

Druhé diferenciály najdeme diferencováním (1.2). To dává

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 F_1 &= 4u\mathrm{d}x\mathrm{d}u - 4v\mathrm{d}x\mathrm{d}v - 4v\mathrm{d}y\mathrm{d}u - 4u\mathrm{d}y\mathrm{d}v + 2x\mathrm{d}u^2 - \\
&\quad -4y\mathrm{d}u\mathrm{d}v - 2x\mathrm{d}v^2 + 2(ux - vy)\mathrm{d}^2 u - 2(vx + uy)\mathrm{d}^2 v = 0\,, \\
\mathrm{d}^2 F_2 &= 4v\mathrm{d}x\mathrm{d}u + 4u\mathrm{d}x\mathrm{d}v + 4u\mathrm{d}u\mathrm{d}y - 4v\mathrm{d}y\mathrm{d}v + 2y\mathrm{d}u^2 + \\
&\quad +4x\mathrm{d}u\mathrm{d}v - 2y\mathrm{d}v^2 + 2(vx + uy)\mathrm{d}^2 u + 2(ux - vy)\mathrm{d}^2 v = 0\,,
\end{aligned}
$$

kde jsme označili, jak je zvykem $\mathrm{d}u^2 = (\mathrm{d}u)^2$ atd. Poznamenejme, že je to v diferenciálním počtu obvyklá konvence. Naopak chceme-li psát diferenciál funkce u^2, používáme značení $\mathrm{d}\big(u^2\big)$. Jestliže do těchto rovnic dosadíme známe hodnoty $x = 1$, $y = v = 0$, $u = -1$, $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}v = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y$, dostaneme

$$
-\frac{3}{2}\mathrm{d}x^2 + \frac{3}{2}\mathrm{d}y^2 - 2\mathrm{d}^2 u = 0\,, \quad -3\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\mathrm{d}^2 v = 0
$$

$$
\Rightarrow \mathrm{d}^2 u = \frac{3}{4}\big(-\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\big)\,, \quad \mathrm{d}^2 v = -\frac{3}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.
$$

Z těchto vztahů plyne, že nenulové druhé parciální derivace jsou

$$
u_{xx}(1,0) = -u_{yy}(1,0) = v_{xy}(1,0) = -\frac{3}{4}\,.
$$

☛ ***Příklad 2.*** Nalezněte první dvě derivace funkce $y(x)$, která je řešením rovnice $y - \cos y = 2x$.

Řešení. Derivací rovnice

$$y(x) - \cos y(x) - 2x = 0$$

získáme

$$y'(x) + \sin y(x) y'(x) - 2 = 0.$$

Odtud získáme derivaci v obecném bodě:

$$y'(x) = \frac{2}{1 + \sin y(x)}$$

a po dalším derivování

$$y''(x) = -\frac{2\cos y(x)}{(1 + \sin y(x))^2} y'(x)\,.$$

Podobně lze pak určit např. rovnici tečné roviny ke grafu funkce, první a druhý diferenciál, apod.

☛ ***Příklad 3.*** Pro funkci $y(x)$, která je v okolí bodu $(0,-\frac{1}{2})$ řešením rovnice $y-\cos y=2x$, nalezněte její první a druhý diferenciál v bodě $-\frac{1}{2}$, rovnici tečny ke grafu funkce $y(x)$ sestrojené v bodě $(0,-\frac{1}{2})$ a aproximaci druhého stupně v okolí bodu $-\frac{1}{2}$.

Řešení. Stejně jako v předchozím příkladu získáme

$$y'(x)+\sin y(x)y'(x)-2=0,$$

tedy

$$y'(x)=\frac{2}{1+\sin y(x)}\,; \qquad y'(-\tfrac{1}{2})=\frac{2}{1+\sin 0}=2;$$

$$y''(x)=-\frac{2\cos y(x)}{(1+\sin y(x))^2}y'(x)\,; \qquad y''(-\tfrac{1}{2})=-\frac{2\cos 0}{(1+\sin 0)^2}\cdot 2=-4\,.$$

$$dy(-\tfrac{1}{2},h)=2h; \qquad d^2y(-\tfrac{1}{2},h)=-4h^2;$$

$$t:\quad y-0=2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\,; \qquad y(x)\doteq 0+2(x-\tfrac{1}{2})-4(x-\tfrac{1}{2})^2$$